第 53 卷 第 7 期 2004 年 7 月
1000-3290/2004/53(07)/2401-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.7, July, 2004

环面黑洞背景下量子场的熵*

王波波†

(北京交通大学物理系,北京 100044)

(2003 年 8 月 1 日收到;2003 年 12 月 4 日收到修改稿)

利用薄层(改进的 brick-wall 模型),通过分别求解标量场方程和 Dirac 场方程,计算了环面黑洞事件视界附近的标量场和 Dirac 场的量子统计熵.按薄层模型的观点,在视界面附近薄层上的量子场的熵就是黑洞的熵.结果表明,黑洞熵正比于事件视界的面积,遵循 Bekenstein-Hawking 面积熵公式.

关键词:熵,环面黑洞,薄层模型,量子场
PACC:9760L,0420

1.引 言

自从 Hawking[1] 证明"黑洞不黑",具有热辐射以后,人们已经普遍相信 Bekenstein[2] 提出的正比于黑洞视界面积的黑洞熵具有真正的热力学意义.此后,黑洞熵的统计起源就成为人们极为关注的一个问题.为此人们进行了大量的研究,提出了许多解释黑洞熵的方法[3—9],其中之一就是 t'Hooft[8] 提出的 brick-wall 模型,被人们广泛应用来求解各种黑洞熵,取得了令人满意的结果.按 brick-wall 模型的观点,通过求解黑洞视界外的量子场的熵就能得到黑洞的熵.或者准确地说,视界外量子场的熵的主要贡献项就是黑洞的熵,brick-wall 模型在计算中应用了紫外截断因子和红外截断因子来消除发散.t'Hooft 的 brick-wall 模型被成功应用于求解静态球对称黑洞的熵[10—18].文献[19,20]通过分析 brick-wall 模型的不足之处,提出了改进后的 brick-wall 模型(薄层模型),认为黑洞熵来自于视界外的一个薄层.通过求解薄层内的标量场方程或 Dirac 方程,就能得到黑洞的熵.这个方案物理概念更清晰、计算简单,拓展了 brick-wall 模型的应用范围,还被广泛应用于计算动态黑洞的熵[19—24]等.薄层模型还被用于平面对称黑洞统计熵的研究中[25].

文献[26]从带宇宙常数的 Einstein-Maxwell 场方程的平面对称解构造出了一个带电的环面黑洞解(宇宙常数 $\Lambda<0$),并对其时空结构进行了研究.文献[27]曾利用 York 形式的路径积分方法对环面黑洞的热力学问题进行了研究,得出的环面黑洞熵是黑洞视界面积的 1/4,满足 Hawking-Bekenstein 面积熵公式.

在球对称情况下,用 brick-wall 模型或薄层模型的方法求黑洞熵与用其他方法(如路径积分方法等)得到的结果一致.本文将用薄层模型研究环面黑洞的熵,通过求解标量场方程和 Dirac 方程,计算了薄层内的标量场和 Dirac 场的量子统计熵.结果发现,如果采用原始的 brick-wall 模型,计算将十分困难,而采用薄层模型则计算变得很容易.对于环面黑洞,我们仍然采用与球对称情况相同的截断因子,结果得到标量场的熵为事件视界面积的 1/4,Dirac 场的熵为事件视界面积的 7/8.这一结果与球对称黑洞的情况一致[10].

2.环面时空的性质

环面时空度规的线元为[26]

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+f(r)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\psi^2),\tag{1}$$

其中

$$f(r)=-\frac{1}{3}\Lambda r^2-\frac{2M}{\pi r}+\frac{4Q^2}{\pi r^2},\tag{2}$$

M,Q 分别为黑洞的质量和电量,Λ 为宇宙常数,坐

---

* 国家自然科学基金(批准号:10175070)资助的课题.

† E-mail:bbwang@center.njtu.edu.cn

标 φ,ψ 的周期均为 $2\pi(0\leqslant\varphi,\psi\leqslant2\pi)$. 度规(1)描述的时空流形的拓扑为 $S^1\times S^1\times M^2$,其中坐标 t,r 均为常数的二维面的拓扑为 $S^1\times S^1$,它是一个环面(torus),其面积为 $4\pi^2r^2$.

对于负的宇宙常数 Λ,度规(1)描述了一个黑洞时空,方程 $f(r)=0$ 有两个正根 r_- 和 r_+,即

$$f(r_\pm)=\left(-\frac{1}{3}\Lambda r_\pm^2-\frac{2M}{\pi r_\pm}+\frac{4Q^2}{\pi r_\pm^2}\right)=0. \tag{3}$$

它们分别对应于柯西视界 r_- 和事件视界 r_+($r_+\geqslant r_-$). 本文中只考虑 $r_+\neq r_-$ 的非极端情况,此时黑洞的三个参数满足 $0\leqslant Q^2<\frac{3}{8}(3M^4/2\pi|\Lambda|)^{1/3}$ [26].

视界上的表面重力 κ 由下式给出[28]:

$$\kappa^2=-\frac{1}{2}(\nabla^\mu\chi^\nu)(\nabla_\mu\chi_\nu)\Big|_{r=r_+}, \tag{4}$$

其中 $\chi^\mu=\delta_0^\mu$ 为类时 Killing 矢量场. 直接计算给出 $\kappa=\frac{1}{2}f'(r_+)$,上撇表示函数对 r 求导. 已知黑洞的 Hawking 温度 $T_{\rm H}$ 与表面重力 κ 的关系为 $T_{\rm H}=\kappa/2\pi$,所以温度的倒数为

$$\beta=\frac{1}{T_{\rm H}}=\frac{2\pi}{\kappa}=\frac{4\pi}{f'(r_+)}. \tag{5}$$

3. 环面时空背景下标量场的熵

弯曲时空的标量场方程(Klein-Gordon 方程)为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\Phi=m_0^2\Phi, \tag{6}$$

其中 m_0 为标量粒子的静质量,为简单起见,令其为零($m_0=0$). 利用环面时空对称性可将标量场分离变量,

$$\Phi={\rm e}^{-{\rm i}Et}{\rm e}^{{\rm i}m\varphi}{\rm e}^{{\rm i}n\psi}R(r), \tag{7}$$

其中 $R(r)$仅为 r 的函数,m,n 为整数以保证角坐标 φ 和 ψ 的周期性. 将(1)式中相应度规分量代入(6)式,并利用(7)式,可以得到波函数的径向方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2f(r)\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right]+[E^2r^2f(r)^{-1}-(m^2+n^2)]R(r)=0. \tag{8}$$

下面利用 Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB)近似求解标量场的自由能和熵. WKB 近似是将函数 $R(r)$ 写为

$$R(r)={\rm e}^{{\rm i}S(r)}, \tag{9}$$

并将其代入(8)式,从所得方程的实部可以得到

$$p_{\rm r}^2\equiv\left(\frac{\partial S(r)}{\partial r}\right)^2=f(r)^{-2}(E^2-r^{-2}(m^2+n^2)f(r)), \tag{10}$$

其中 $p_{\rm r}$ 为标量粒子的径向动量(径向波数). 半经典量子条件要求

$$\int_{r_++h}^{r_++h+\delta}p_{\rm r}{\rm d}r=\pi n_{\rm r}, \tag{11}$$

其中 $n_{\rm r}$ 为正整数. 这里的积分是从 r_++h 到 $r_++h+\delta$,其中 h 和 δ 均为小量,这是因为本文采用了薄层模型[19,20],h 为砖墙(brick-wall)的厚度,而 δ 为量子场所处的薄层厚度.

根据正则系综理论,标量粒子体系的自由能 F 为

$$\beta F=\sum_E\ln(1-{\rm e}^{-\beta E}). \tag{12}$$

对系统作半经典处理,能量可以视为连续变化. 将(12)式的求和变为积分,并利用分部积分,得到自由能为

$$F=-\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(E)}{{\rm e}^{\beta E}-1}{\rm d}E, \tag{13}$$

其中 $\Gamma(E)$为系统能量小于 E 的微观状态数. 由定义知,

$$\Gamma(E)=\sum_{m,n}n_{\rm r}(E,m,n),$$

将(10)和(11)式代入,并将求和变为积分,可以得到

$$\Gamma(E)=\frac{1}{\pi}\int{\rm d}m\int{\rm d}n\int_{r_++h}^{r_++h+\delta}f(r)^{-1}\times\sqrt{E^2-r^{-2}(m^2+n^2)f(r)}\,{\rm d}r, \tag{14}$$

其中 m 和 n 的积分下限均为零,上限的取值要求被积函数有意义(即要求被积函数为实数,亦即 $m^2+n^2\leqslant E^2r^2/f$). 为积分方便,可以利用变换

$$m=V\cos\xi,\quad n=V\sin\xi, \tag{15}$$

将对 m 和 n 的积分,变换为对 V 和 ξ 的积分,于是(14)式变为

$$\begin{aligned}\Gamma(E)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{Er/\sqrt{f(r)}}V{\rm d}V\int_0^{2\pi}{\rm d}\xi\int_{r_++h}^{r_++h+\delta}f(r)^{-1}\times\sqrt{E^2-r^{-2}V^2f(r)}\,{\rm d}r\\&=\frac{2}{3}\int_{r_++h}^{r_++h+\delta}f(r)^{-2}r^2E^3{\rm d}r.\end{aligned} \tag{16}$$

将(16)式代入(13)式,并进行能量积分,就得到自由能的表示式

$$F=-\frac{2\pi^4}{45\beta^4}\int_{r_++h}^{r_++h+\delta}f(r)^{-2}r^2{\rm d}r. \tag{17}$$

由于 h 和 δ 均为小量,对 r 的积分是在事件视界外很薄的一个薄层上进行,所以可作变换

$$r = r_+ + x, \tag{18}$$

其中 x 为一小的变量. 于是,在事件视界附近可以将(17)式中被积函数表示为

$$r^2 f(r)^{-2} \approx r_+^2 f'(r_+)^{-2} x^{-2}. \tag{19}$$

将(19)式代入(17)式,很容易求得自由能

$$F = -\frac{2}{45}\frac{\pi^4 r_+^2}{\beta^4} f'(r_+)^{-2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{20}$$

进一步可求出系统的熵

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{8\pi^4}{45}\frac{r_+^2}{\beta^3} f'(r_+)^{-2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{21}$$

注意到(5)式,并取与球对称黑洞相同的截断因子[19,20],即

$$\frac{\delta}{(h+\delta)h} = 90\beta, \tag{22}$$

最后得到

$$S = \frac{1}{4}A_+, \tag{23}$$

其中 $A_+ = 4\pi^2 r_+^2$ 为视界面积.

4. 环面时空背景下的 Dirac 场方程

Newman-Penrose 形式的 Dirac 方程为[29]

$$(D+\varepsilon-\rho)F_1 + (\bar{\delta}+\pi-\alpha)F_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_1,$$

$$(\Delta'+\mu-\gamma)F_2 + (\delta+\beta-\tau)F_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_2,$$

$$(D+\varepsilon^*-\rho^*)G_2 - (\delta+\pi^*-\alpha^*)G_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_2,$$

$$(\Delta'+\mu^*-\gamma^*)G_1 + (\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_1, \tag{24}$$

其中 μ_0 为 Dirac 粒子的静质量,F_1,F_2,G_1 和 G_2 为波函数的 4 个分量,$D = l^\mu \partial_\mu$,$\Delta' = n^\mu \partial_\mu$,$\delta = m^\mu \partial_\mu$ 和 $\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu$ 分别为沿零标架 l^μ,n^μ,m^μ 和 $\bar{m}^\mu$ 的方向导数算符,α,β,γ,ε,ρ 和 τ 为旋系数. 对于度规(1),可以选择如下零标架:

$$l^\mu = (f(r)^{-1}, 1, 0, 0),$$

$$n^\mu = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}f(r), 0, 0\right),$$

$$m^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}r}, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r}\right),$$

$$\bar{m}^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}r}, -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r}\right). \tag{25}$$

于是可以将(24)式化为

$$\left(f(r)^{-1}\partial_t + \partial_r + \frac{1}{r}\right)F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\varphi - \mathrm{i}\partial_\psi)F_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_t - f(r)\partial_r - \frac{1}{r}f(r) - \frac{1}{2}f'(r)\right)F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\varphi + \mathrm{i}\partial_\psi)F_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_2,$$

$$\left(f(r)^{-1}\partial_t + \partial_r + \frac{1}{r}\right)G_2 - \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\varphi + \mathrm{i}\partial_\psi)F_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_t - f(r)\partial_r - \frac{1}{r}f(r) - \frac{1}{2}f'(r)\right)G_1 - \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\varphi - \mathrm{i}\partial_\psi)G_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_1. \tag{26}$$

为简单起见,下面仅考虑零质量的 Dirac 粒子,即令 $\mu_0 = 0$. 用分离变量法,可以将场量的 4 个分量表示为

$$F_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi} r^{-1} f_1(r),$$

$$F_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi} f_2(r),$$

$$G_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi} g_1(r),$$

$$G_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\psi} r^{-1} g_2(r), \tag{27}$$

其中 $f_1(r)$,$f_2(r)$,$g_1(r)$和 $g_2(r)$仅为 r 的函数,且为保证坐标 φ 和 ψ 的周期性,m 和 n 必须为零或整数. 利用(27)式可将(26)式化为

$$(\partial_r - \mathrm{i}Ef(r)^{-1})f_1(r) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(m - \mathrm{i}n)f_2(r) = 0,$$

$$\left(f(r)\partial_r + \frac{1}{r}f(r) + \frac{1}{2}f'(r) + \mathrm{i}E\right)f_2(r) - \mathrm{i}\sqrt{2}(m+\mathrm{i}n)r^{-2}f_1(r) = 0,$$

$$(\partial_r - \mathrm{i}Ef(r)^{-1})g_2(r) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(m + \mathrm{i}n)g_1(r) = 0,$$

$$\left(f(r)\partial_r + \frac{1}{r}f(r) + \frac{1}{2}f'(r) + \mathrm{i}E\right)g_1(r) + \mathrm{i}\sqrt{2}(m-\mathrm{i}n)r^{-2}g_2(r) = 0. \tag{28}$$

从(28)式前两个耦合方程,可以分别推导出关于 $f_1(r)$和 $f_2(r)$的两个常微分方程,它们是

$$\partial_r(\partial_r f_1(r)) + \frac{1}{2}f(r)^{-1}f'(r)\partial_r f_1(r) + f(r)^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}Ef'(r) + E^2 - \frac{1}{r^2}(m^2+n^2)f(r)\right)f_1(r) = 0, \tag{29}$$

$$\partial_r(\partial_r f_2(r)) + \left(\frac{2}{r} + \frac{3}{2}f(r)^{-1}f'(r)\right)\partial_r f_2(r)$$

$$+ f(r)^{-2}\Big(E^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}Ef'(r) + \frac{1}{2}f(r)(3f'(r)r^{-1} + f''(r)) - \frac{1}{r^2}(m^2+n^2)f(r)\Big) f_2(r) = 0. \tag{30}$$

从(28)式后两个耦合方程,可以分别推导出关于 $g_1(r)$和 $g_2(r)$两个常微分方程,这两个方程的形式分别与(30)和(29)式完全相同,这里省略不写.

5. 环面时空背景下的 Dirac 场的熵

下面将 WKB 近似分别应用于(29)和(30)式.将函数 $f_1(r)=e^{\mathrm{i}S_1(r)}$代入(29)式,从所得方程的实部,可以得到 Dirac 粒子的 $f_1(x)$分量贡献的径向波数

$$k_1 \equiv \frac{\partial S_1(r)}{\partial r} = f(r)^{-1}\sqrt{E^2 - r^{-2}(m^2+n^2)f(r)}. \tag{31}$$

半经典量子条件要求

$$\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} k_1 \mathrm{d}r = \pi n_1, \tag{32}$$

其中 n_1 为正整数,由此可以得到 $f_1(r)$分量对应的能量小于 E 的微观状态数 $\Gamma_1(E)$,

$$\Gamma_1(E) = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}m\int \mathrm{d}n\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} f(r)^{-1} \times \sqrt{E^2 - r^{-2}(m^2+n^2)f(r)}\,\mathrm{d}r, \tag{33}$$

与标量场的情况相同,式中 m 和 n 的积分下限均为零,上限的取值要求被积函数有意义.用与前面标量场相同的处理方式,可以求得

$$\begin{aligned}\Gamma_1(E) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{Er/\sqrt{f(r)}} V\mathrm{d}V\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} f(r)^{-1} \times \sqrt{E^2 - r^{-2}V^2 f(r)}\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{2}{3}\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} f(r)^{-2} r^2 E^3 \mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{34}$$

同样地,由于 h 和 δ 均为小量,利用(18)式,在事件视界附近可以将(34)式中被积函数表示为

$$r^2 f^{-2}E^3 \approx E^3 r_+^2 f'(r_+)^{-2}x^{-2}. \tag{35}$$

将(35)式代入(34)式,直接积分有

$$\Gamma_1(E) = \frac{2}{3}E^3 r_+^2 f(r)^{-2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{36}$$

下面求 $f_2(r)$分量对应的微观状态数.将 $f_2(r)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_2(r)}$代入(30)式,由 WKB 近似得到

$$k_2 = \frac{\partial S_2(r)}{\partial r} = f(r)^{-1}\sqrt{E^2 + \frac{1}{2}f(r)(3f'(r)r^{-1} + f''(r)) - r^{-2}(m^2+n^2)f(r)}. \tag{37}$$

于是得到 $f_2(r)$分量对应的能量小于 E 的微观状态数

$$\begin{aligned}\Gamma_2(E) &= \sum_{m,n} n_2(E,m,n) = \frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}m\int\mathrm{d}n\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} k_2\mathrm{d}r\\ &= \frac{2}{3}\int_{r_+ + h}^{r_+ + h+\delta} f(r)^{-2}r^2\Big[E^2 + \frac{1}{2}f(r) \times (3f'(r)r^{-1} + f''(r))\Big]^{3/2}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{38}$$

考虑在视界外的薄层上积分,作(18)式的变换,注意到 x 为小变量,从(38)式可以得到

$$\Gamma_2(E) = \frac{2}{3}E^3 r_+^2 f(r)^{-2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{39}$$

注意(39)式与(36)式完全相同,即 $\Gamma_1(E)=\Gamma_2(E)$.

因为关于 $g_2(r)$的常微分方程与 $f_1(r)$的方程(29)完全相同,所以用同样的方法可以得到 $g_2(r)$分量对应的能量小于 E 的微观状态数 $\Gamma_4(E)=\Gamma_1(E)$.又因为关于 $g_1(r)$的常微分方程与 $f_2(r)$的方程(30)完全相同,所以用同样的方法可以得到 $g_1(r)$分量对应的能量小于 E 的微观状态数 $\Gamma_3(E)=\Gamma_2(E)$.最后,由 4 个分量决定的能量小于 E 的总的微观状态数为

$$\Gamma(E) = \sum_{i=1}^{4}\Gamma_i(E) = \frac{8}{3}E^3 r_+^2 f(r)^{-2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{40}$$

根据正则系综理论,Dirac 粒子体系的自由能 F 为

$$\beta F = -\sum_E \ln(1+\mathrm{e}^{-\beta E}). \tag{41}$$

对系统作半经典处理,能量可以视为连续变化.将(41)式的求和变为积分,并利用分部积分,得到自由能为

$$F = -\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(E)}{1+\mathrm{e}^{\beta E}}\mathrm{d}E. \tag{42}$$

将(40)式代入(42)式,并进行能量积分,就得到自由能的表示式

$$F = -\frac{7\pi^4}{45}\frac{r_+^2}{\beta^4 f'(r_+)^2}\frac{\delta}{(h+\delta)h}. \tag{43}$$

进一步可求出系统的熵

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{28\pi^4}{45} \frac{r_+^2}{\beta^3 f'(r_+)^2} \frac{\delta}{(h+\delta)h}. \quad (44)$$

注意到(5)式,并取与球对称黑洞相同的截断因子[17,18],即$\frac{\delta}{(h+\delta)h} = 90\beta$,最后得到

$$S = \frac{7}{8} A_+, \quad (45)$$

其中 $A_+ = 4\pi^2 r_+^2$ 为视界面积.

6. 结　　论

本文运用薄层模型研究了环面黑洞视界上量子场的量子统计熵.计算结果表明,环面黑洞视界上标量场的熵为事件视界面积的 1/4,Dirac 场的熵为事件视界面积的 7/8,即为标量场熵的 7/2 倍.环面黑洞视界上这一结果与球对称情形的结果相同[10].按薄层模型的观点,这部分熵正是黑洞的熵.不论是标量场还是 Dirac 场,它们的熵都与黑洞视界面积成正比,这一结果满足 Hawking-Bekenstein 面积熵公式.注意到本文对于环面黑洞,为消除发散所取的截断因子与在球对称黑洞中的截断因子完全相同,这说明将薄层模型应用于环面黑洞是成功的,该模型具有一定的普遍意义.另外,薄层模型可以克服原始 brick-wall 模型在计算上的困难,使计算简便.

一个自然的问题是 :环面黑洞的熵到底是事件视界面积的 1/4 还是 7/8?或者是两者之和?关于这个问题,可以用重整化的方法解决,结论应该是:环面黑洞的熵为事件视界面积的 1/4.文献[30] Li 计算了史瓦西黑洞的标量场和 Dirac 场的量子统计熵,最后用重整化的方法给出史瓦西黑洞的熵就是事件视界面积的 1/4.

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
[2] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333
Bekenstein J D 1974 *Phys. Rev.* D **9** 3292
[3] Hartle J B and Hawking S W 1976 *Phys. Rev.* D **13** 2188
[4] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752
[5] York J W 1983 *Phys. Rev.* D **28** 2929
[6] Frolovm V and Novikov I 1993 *Phys. Rev.* D **48** 4545
[7] Susskind L and Uglum J 1994 *Phys. Rev.* D **50** 2700
[8] t'Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727
[9] Wang D X 1996 *Phys. Rev.* D **53** 5705
[10] Luo Z J and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese) [罗志坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]
[11] Ho J, Kim W T, Park Y J and Shin H 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 2617
[12] Ghosh A and Mitra P 1995 *Phys Lett.* B **357** 295
[13] Jing J L 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 240
[14] Liu W B and Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **61** 63003
[15] Liu W B, Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 581 (in Chinese) [刘文彪、朱建阳、赵　峥 2000 物理学报 **49** 581]
[16] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 293 (in Chinese) [赵　仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 293]
[17] Li C A, Meng Q M and Su J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]
[18] Song T P, Hou C X and Huang J S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1901 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 物理学报 **51** 1901]
[19] Li X and Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **62** 104001
[20] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310
[21] Li C A, Wei X Q, Meng Q M and Liu J L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2173 (in Chinese) [李传安、魏显起、孟庆苗、刘景伦 2002 物理学报 **51** 2173]
[22] Song T P and Hou C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1398 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞 2002 物理学报 **51** 1398]
[23] Zhang J Y and Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2399 (in Chinese) [张靖仪、赵　峥 2002 物理学报 **51** 2399]
[24] Meng J M, Su J Q and Li C A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1822 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]
[25] Zhao R and Zhang L C 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 21 (in Chinese) [赵　仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 21]
[26] Huang C G and Liang C B 1995 *Phys. Lett.* A **201** 27
[27] Peca C S and Lemos J P S 2000 *J. Math. Phys.* **41** 4783
[28] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago: Chicago University Press)
[29] Chandrasekhar S 1983 *The Mathematical Theory of Black Holes* (New York: Oxford University Press)
[30] Li X 2000 *Phys. Rev.* D **65** 84005

Entropy of Dirac field in toroidal black hole *

Wang Bo-Bo†

(*Department of Physics, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

(Received 1 August 2003; revised manuscript received 4 December 2003)

Abstract

The entropies of quantum fields on event horizon of a toroidal black hole are given using the improved brick-wall model. According to the view of the improved brick-wall model, these entropies are nothing but the entropy of the black hole. So the entropy of the toroidal black hole is proportional to the area of event horizon, which satisfies the Bekenstein-Hawking formula.

Keywords: entropy, toroidal black hole, improved brick-wall model, quantum field

PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175070).

† E-mail: bbwang@center.njtu.edu.cn