第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2407-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.8,August,2004

(2+1)维非线性 Burgers 方程变量分离解和新型孤波结构*

徐昌智[1)2)]　张解放[1)]

[1)](浙江师范大学非线性物理研究所,金华　321004)

[2)](金华教育学院物理系,金华　321000)

(2003 年 9 月 25 日收到;2004 年 4 月 27 日收到修改稿)

利用变量分离方法,获得了(2+1)维非线性 Burgers 方程的变量分离解.由于在 Bäcklund 变换和变量分离步骤中引入了作为种子解的任意函数,因而精确解中含有三个任意函数(其中一个为条件函数),适当地选择任意函数,可以获得多种形状的扭状孤波解、周期性孤子解和格子型孤波解.

关键词:变量分离解,非线性波方程,(2+1)维

PACC:0230,0340

1. 引　　言

变量分离法和 Fourier 级数展开法是研究线性波动方程极其通用和有效的方法.在研究非线性波动方程中,逆散射方法可认为是 Fourier 级数展开法的推广.尽管变量分离法的推广是一件困难的工作,但近年来几类变量分离法已相继被提出,如经典方法[1]、微分 Stäckel 方法[2]、基于 ansatz 方法[3]、几何方法[4]、对称约化方法[5](也称 Lax 对线性化或形式变量分离方法)、多线性变量分离方法[6]、齐次平衡方法[7].值得指出的是,变量分离方法在研究高维非线性演化方程(孤子系统)中具有十分有效的作用,已经得到了一大类(2+1)维非线性演化方程的变量分离解,并获得了比(1+1)维系统中更丰富的孤子结构和相互作用性质[8-11].本文旨在研究如下(2+1)维非线性 Burgers 方程:

$$u_t = uu_y + avu_x + bu_{yy} + abu_{xx}, \tag{1}$$

$$v_y = u_x, \tag{2}$$

式中 $u(x,y,t)$,$v(x,y,t)$为待求实函数.该方程可由推广的 Painlevé 可积模型获得,文献[12]用变量分离方法获得(2+1)维非线性 Burgers 方程场变量 u 的势 u_x 的 Y 形孤波解和演化特性.我们用变量分离方法得到方程(1)和(2)不同于文献[12]的变量分离解.由于在 Bäcklund 变换和变量分离步骤中引入了作为种子解的任意函数,因而精确解中含有三个任意函数(其中一个为条件函数),适当地选择任意函数,可以获得(2+1)维非线性 Burgers 方程物理场量 u 许多新的孤子解,如抛物线型的扭状孤波解、周期性孤子解、格子型孤波解等.这些新结构,据我们所知还未见有文献报道,而且我们直接给出了场变量 u 的结构,无须引入场变量 u 的势 u_x 进行讨论,这将给研究高维非线性系统带来新的启示.

2. (2+1)维非线性 Burgers 方程的变量分离解

为了采用变量分离办法,对(2+1)维非线性 Burgers 方程(1)和(2)引入如下 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned} u &= 2b(\ln f)_y + u_0, \\ v &= 2b(\ln f)_x + v_0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $f(x,y,t)$为实函数,$u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$为方程(1)和(2)的一个任意已知的种子解.值得说明的是,上述 Bäcklund 变换可由 Painlevé 截断展开方法[12]或齐次平衡方法[13]得到.为了便于讨论,把种子解 u_0,v_0 设为以下特殊形式:

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = q_0(x,t), \tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10272072)和浙江省自然科学基金(批准号:100039)资助的课题.

式中 $q_0 \equiv q_0(x,t)$为变量 x,t 的任意函数.

把(3),(4) 式代入方程(1),(2),经过整理可写成双线性形式

$$[-D_yD_t + av_0D_xD_y]f\cdot f + b[D_y^3 + aD_x^2D_y]f\cdot f = 0. \tag{5}$$

这里,符号 D 为 Hirota 意义下的双线性算符,

$$\begin{aligned}&D_x^mD_y^nD_t^kg\cdot f\\ &\equiv(\partial_x - \partial_{x'})^m(\partial_y - \partial_{y'})^n(\partial_t - \partial_{t'})^k\\ &\times gf|_{(x=x',y=y',t=t')}.\end{aligned} \tag{6}$$

经过运算,我们发现方程 (5)拥有如下变量分离解:

$$f = q_1(x,t) + q_2(x,t)p(y), \tag{7}$$

其中 $q_1 \equiv q_1(x,t)$,$q_2 \equiv q_2(x,t)$ 为变量 x,t 的任意函数,$p \equiv p(y)$为变量 y 的任意函数.把(7) 式代入(5))式得

$$\begin{aligned}&(q_{1t}q_2 - q_1q_{2t})p_y + av_0(q_1q_{2x} - q_{1x}q_2)p_y\\ &+ bq_1q_2p_{yyy} + bq_2^2(pp_{yyy} - p_yp_{yy})\\ &+ ab(q_1q_{2xx} - q_{1xx}q_2)p_y = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

对(8)式分析后,可设

$$p_{yy} = \pm k^2p, \tag{9}$$

式中 k 为任意常数. 把(9) 式代入(8))式得

$$q_0 = \frac{q_{1t}q_2 - q_1q_{2t} \pm k^2bq_1q_2 + ab(q_1q_{2xx} - q_{1xx}q_2)}{a(q_{1x}q_2 - q_1q_{2x})}. \tag{10}$$

从而我们有(2 + 1)维 Burgers 方程的变量分离解为

$$\begin{aligned}u &= \frac{2bp_yq_2}{q_1 + q_2p},\\ v &= 2b\frac{q_{1x} + q_{2x}p}{q_1 + q_2p} + q_0,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 q_1,q_2 为变量 $\{x,t\}$的任意函数,p 为满足(9)式的关于变量 y 的任意函数,q_0 为满足(10)式的关于变量 $\{x,t\}$的任意函数.从中可见变量分离解含有三个任意函数(其中一个为条件函数),因此其解结构是十分丰富的.

研究方程(9)发现具有如下几类基本解:

$$\begin{aligned}p_1 &= a_0e^{ky+l},\\ p_2 &= a_0\sin(ky + l),\\ p_3 &= a_0\cos(ky + l),\\ p_4 &= a_0\sinh(ky + l),\\ p_5 &= a_0\cosh(ky + l),\\ p_6 &= a_0y + l,\end{aligned}$$

式中 a_0,l 为任意常数.相应代入后可获得(2 + 1)维非线性 Burgers 方程(1)和(2) 含有两个任意函数 q_1,q_2 的六组解,具体为

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{2ba_0ke^{ky+l}q_2}{q_1 + a_0q_2e^{ky+l}},\\ v_1 &= \frac{2b(q_{1x} + a_0q_{2x}e^{ky+l})}{q_1 + a_0q_2e^{ky+l}} + q_0;\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{2ba_0kq_2\cos(ky + l)}{q_1 + aq_2\sin(ky + l)},\\ v_2 &= \frac{2b[q_{1x} + a_0q_{2x}\sin(ky + l)]}{q_1 + a_0q_2\sin(ky + l)} + q_0;\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}u_3 &= \frac{-2ba_0kq_2\sin(ky + l)}{q_1 + a_0q_2\cos(ky + l)},\\ v_3 &= \frac{2b[q_{1x} + a_0q_{2x}\cos(ky + l)]}{q_1 + a_0q_2\cos(ky + l)} + q_0;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}u_4 &= \frac{-2ba_0kq_2\cosh(ky + l)}{q_1 + a_0q_2\sinh(ky + l)},\\ v_4 &= \frac{2b[q_{1x} + a_0q_{2x}\sinh(ky + l)]}{q_1 + a_0q_2\sinh(ky + l)} + q_0;\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}u_5 &= \frac{2ba_0kq_2\sinh(ky + l)}{q_1 + a_0q_2\cosh(ky + l)},\\ v_5 &= \frac{2b[q_{1x} + a_0q_{2x}\cosh(ky + l)]}{q_1 + a_0q_2\cosh(ky + l)} + q_0.\end{aligned} \tag{16}$$

当 $k = 0$ 时,

$$\begin{aligned}u_6 &= \frac{2ba_0q_2}{q_1 + q_2(a_0y + l)},\\ v_6 &= \frac{2b[q_{1x} + q_{2x}(a_0y + l)]}{q_1 + q_2(a_0y + l)}\\ &+ \frac{q_{1t}q_2 - q_1q_{2t} + ab(q_1q_{2xx} - q_{1xx}q_2)}{a(q_{1x}q_2 - q_1q_{2x})}.\end{aligned} \tag{17}$$

我们知道在高维非线性模型中,存在十分丰富的孤子结构,如 dromins,solitoffs,lumps,breathers,instantons,peakons,compactons,foldons,环孤子,局域混沌斑图和分形斑图等.下面我们讨论 q_1,q_2,p 为确定函数时(2 + 1)维非线性 Burgers 方程(1)和(2)的物理场量 $u(x,y,t)$由(11)式表示的几类新的孤波结构.

2.1. 多种形式的扭状孤波解

这里我们通过适当地选择任意函数 q_1,q_2,p,以获得多种形式的新型扭状孤波解.

若选择

$$\begin{aligned}p &= \exp[y - 10],\\ q_1 &= 1,\\ q_2 &= \exp[-(x + wt)^2],\end{aligned} \tag{18}$$

则得到(2 + 1)维非线性 Burgers 方程的抛物线型的

扭状孤波解.图 1 给出的是当 $a_0=1$,$b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的情形.

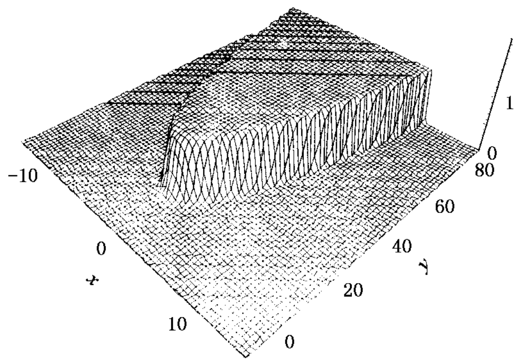

图 1　(2+1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x,y,t)$(由(18)式确定)当 $a_0=1,b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的抛物线型的扭状孤波解

若选择

$$
\begin{aligned}
p &= \exp[y-10],\\
q_1 &= 1,\\
q_2 &= \cosh[4-(x+wt)^2],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

则得到(2+1)维非线性 Burgers 方程带头部的抛物线型扭状孤波解.图 2 给出的是当 $a_0=1$,$b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的情形.

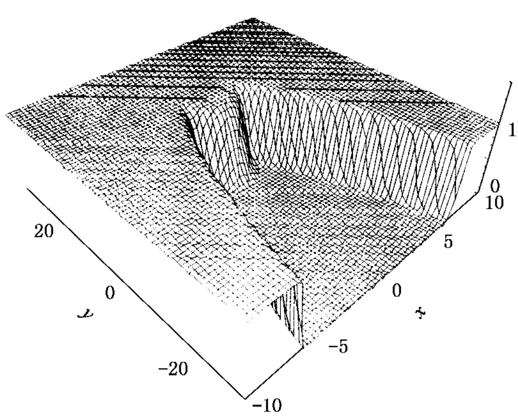

图 2　(2+1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x,y,t)$(由(19)式确定)当 $a_0=1,b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的带头部的抛物线型扭状孤波解

若选择

$$
\begin{aligned}
p &= \exp[y-10],\\
q_1 &= 1,\\
q_2 &= \exp[-(x+wt)^3],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

则得到(2+1)维非线性 Burgers 方程的曲线型扭状孤波解.图 3 给出的是当 $a_0=1$,$b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的情形.

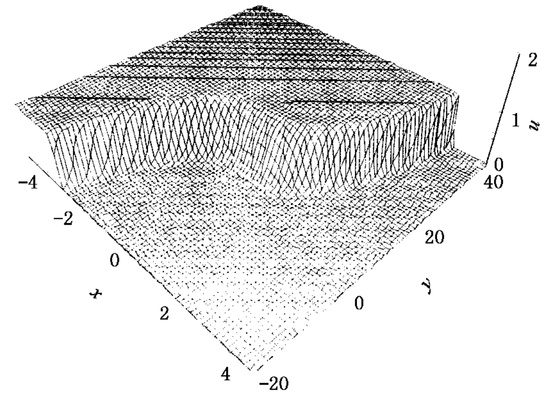

图 3　(2+1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x,y,t)$(由(20)式确定)当 $a_0=1,b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的曲线型扭状孤波解

若选择

$$
\begin{aligned}
p &= \exp[0.6y-10],\\
q_1 &= 1,\\
q_2 &= 0.01+(x+wt)^2,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

则得到(2+1)维非线性 Burgers 方程带尾部的直线型扭状孤波解.图 4 给出的是当 $a_0=1$,$b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时的情形.

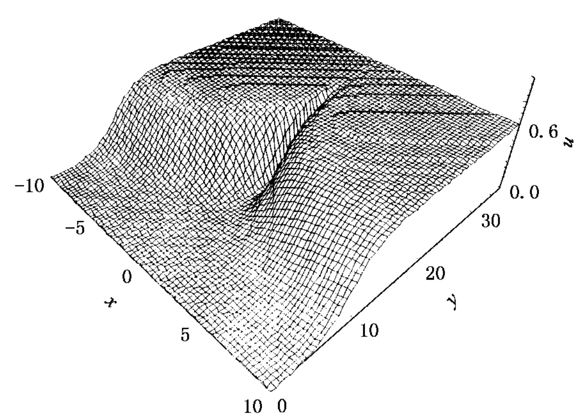

图 4　(2+1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x,y,t)$(由(21)式确定)当 $a_0=1,b=\frac{1}{2}$,在 $t=0$ 时带尾部的直线型扭状孤波解

若选择

$$
\begin{aligned}
p &= \exp[0.6y-10],\\
q_1 &= 1,\\
q_2 &= \frac{1}{0.01+(x+wt)^2},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

则得到(2 + 1)维非线性 Burgers 方程带头部的直线型扭状孤波解. 图 5 给出的是当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的情形.

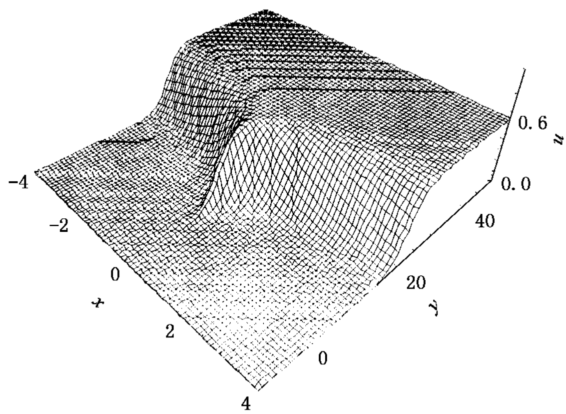

图5 (2 + 1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x, y, t)$(由(22)式确定)当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时带头部的直线型扭状孤波解

若选择

$$p = \cosh[2y],\quad q_1 = 1,\quad q_2 = \exp[x + wt], \tag{23}$$

则得到(2 + 1)维非线性 Burgers 方程的 Y 型扭状孤波解. 图 6 给出的是当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的情形.

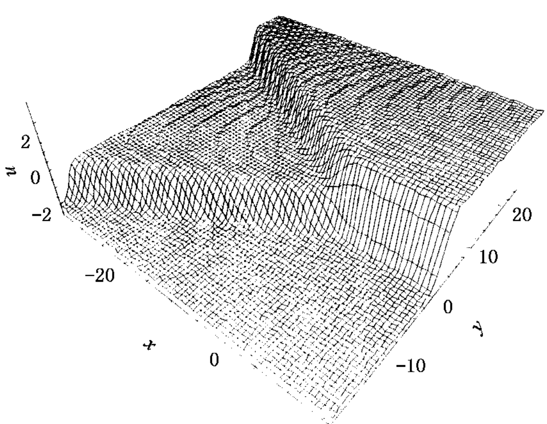

图6 (2 + 1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x, y, t)$(由(23)式确定)当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的 Y 型扭状孤波解

2.2. 周期型孤波结构

若选择

$$p = \exp[1 - y],\quad q_1 = 1,\quad q_2 = \exp[\sin(x + wt)], \tag{24}$$

则得到(2 + 1)维非线性 Burgers 方程的周期型扭状孤波结构. 图 7 给出的是当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的这类孤波结构. 从图 7 可见扭状孤子上叠加周期性孤波.

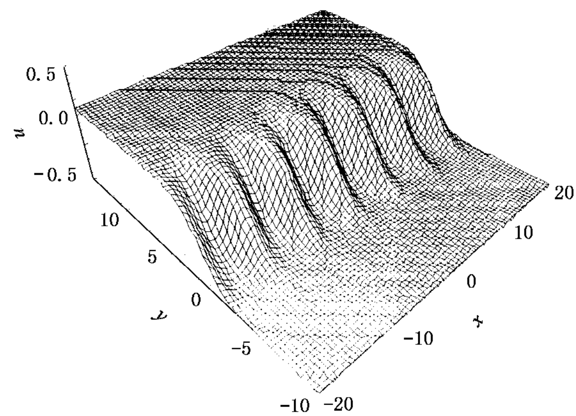

图7 (2 + 1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x, y, t)$(由(24)式确定)当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的周期型孤波解

2.3. 格子型孤子结构

若选择

$$p = \sin y,\quad q_1 = 1,\quad q_2 = \sin(x + wt), \tag{25}$$

则得到(2 + 1)维非线性 Burgers 方程的格子型孤子结构. 图 8 给出的是取 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的

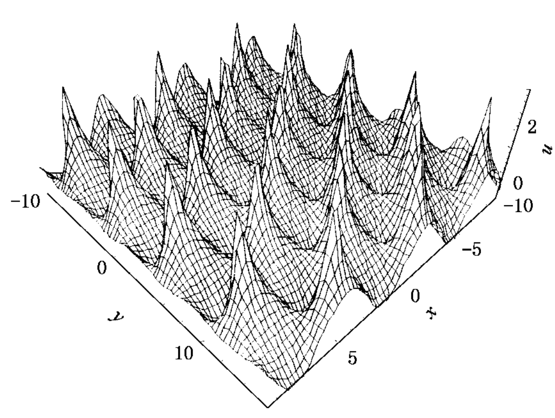

图8 (2 + 1)维非线性 Burgers 方程物理场量 $u(x, y, t)$(由(25)式确定)当 $a_0 = 1, b = \frac{1}{2}$, 在 $t = 0$ 时的格子型孤子结构

这类孤子结构.

3. 结 语

本文把变量分离方法应用于(2+1)维非线性物理模型,构建了(2+1)维非线性 Burgers 方程新的精确解.由于精确解中含有三个任意函数(其中一个为条件函数),适当地选择任意函数,可以获得多种形状的扭状孤波解、叠加型孤波解以及周期孤子解,其中许多是新的孤波结构.我们相信(2+1)维非线性 Burgers 方程的丰富解结构的发现,有助于对实际模型物理运动规律的深入研究.这些新结构在其他(2+1)维非线性物理模型是否存在?在实际自然现象中如何观测和寻找?这些都是值得进一步探索的.

[1] Miller W *Symmetry and Separation of Variables* (Reading:Addison-Wesley) 1977

[2] Kalnins E G, Miller W 1985 *J. Math. Phys.* **26** 1560

[3] Dolye P W, Vassiliou P J 1988 *In. J. Nonlinear Mech.* **33** 315; Dolye P W, Vassiliou P J 1996 *J. Phys. A* **29** 7581

[4] Zhdanov R Z 1994 *J. Phys. A* **27** L291; Zhdanov R Z 1997 *J Math. Phys.* **38** 1197; Zhdanov R Z, Revenko I V, Fushchych W I 1995 *J. Math. Phys.* **36** 5506; Qu C Z, Zhang L S, Liu R C 2000 *Physica* D **144** 97

[5] Cao C 1990 *Sci. China* A **33** 528; Cheng Y, Li S Y 1991 *Phys. Lett.* A **175** 22; Konopelchenko B G, Sidorenko V, Strampp W 1971 *Phys. Lett.* A **175** 17; Lou S Y, Chen L L 1999 *J. Math. Phys.* **40** 6491

[6] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94; Lou S Y 2000 *Phys. Scr.* **65** 7; Lou S Y 2003 *J. Phys. A: Math.* **36** 3877; Lou S Y, Ruan H Y 2001 *J. Phys. A* **34** 305; Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 46601; Tang X Y, Lou S Y 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 1451; Tang X Y, Chen C L, Lou S Y 2002 *J. Phys. A* **35** L293

[7] Zhang J F, Han P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 705 (in Chinese) [张解放、韩 平 2002 物理学报 **51** 705]; Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 277

[8] Zheng C L, Huang W H, Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 653; Huang W H, Zhang J F, Zheng C L 2002 *Chin. Phys.* **11** 299; Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2627 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2627]

[9] Yan Z Y, Zhang H Q 2002 *Commun. Theor. Phys.* **34** 365

[10] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]; Ruan H Y, Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2003 物理学报 **52** 1313]

[11] Zheng C L, Zhang J F, Wu F M *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 472; Zheng C L, Zhang J F, Sheng Z M *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 11

[12] Tang X Y, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 335

[13] Zheng C L, Zhang J F 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1399

[14] Lin J, Xu Y S, Wu F M 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049

[15] Zhang J F, Guo G P, Wu F M 2002 *Chin. Phys.* **11** 533

Variable separation solution and new soliton structures in the (2 + 1)-dimensional nonlinear Burgers equations*

Xu Chang-Zhi[1)2)] Zhang Jie-Fang[1)]

[1)] (Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

[2)] (Department of Physics, Jinhua Teacher College, Jinhua 321000, China)

(Received 25 September 2003; revised manuscript received 27 April 2004)

Abstract

A variable separation approach is applied to obtain the new exact explicit solution of (2 + 1)-dimensional nonlinear Burgers equations. Using a Bäcklund transformation and the variable separation technique, we find the variable separation solution of the (2 + 1)-dimensional Burgers equations by the entrance of there arbitrary functions (one condition function) for the seed solution. Some special type of the kink soliton solution, periodic soliton solutions and lattice soliton solutions are discussed by selecting the arbitrary functions appropriately.

Keywords: variable separation solution, nonlinear wave equation, (2 + 1)-dimensions

PACC: 0230, 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272072) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100039).