第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2419-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.8, August, 2004

约束对 Birkhoff 系统 Noether 对称性和守恒量的影响*

张 毅[1)] 梅凤翔[2)]

1)(苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

2)(北京理工大学理学院,北京 100081)

(2003 年 8 月 29 日收到;2003 年 12 月 20 日收到修改稿)

研究约束对 Birkhoff 系统的 Noether 对称性和守恒量的影响.首先,建立了 Birkhoff 系统的运动微分方程.其次,给出了系统 Noether 对称性的判据.然后,讨论了受约束作用后,Birkhoff 系统的 Noether 对称性发生的变化,并给出了系统的 Noether 对称性以及守恒量保持不变的条件.最后,举例说明结果的应用.

关键词:分析力学, Birkhoff 系统, 约束, Noether 对称性, 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

1927 年美国著名数学家 Birkhoff 提出了一个新型积分变分原理和一类新型运动微分方程[1].1978 年美国物理学家 Santilli 将其推广,并建议方程命名为 Birkhoff 方程[2].Birkhoff 方程是 Hamilton 方程经过非正则变换而得到的,比 Hamilton 方程更具一般性.1989 年苏联学者 Галиуллин 指出,对 Birkhoff 方程的研究是分析力学的一个近代发展方向[3].1992 年以来,我国学者对 Birkhoff 系统动力学进行了较全面深入的研究,并取得了一系列重要成果[4—23].梅凤翔[6]应用变换群 G_r 的无限小群变换的广义准对称性建立了 Birkhoff 系统的 Noether 理论,并将结果推广到约束 Birkhoff 系统[10].当 Birkhoff 系统受到约束作用时,系统的 Noether 对称性和守恒量都会发生变化.本文试图研究约束对 Birkhoff 系统的 Noether 对称性和守恒量的影响,给出了系统受到约束作用后 Noether 对称性及守恒量保持不变的条件,并举例说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

Birkhoff 方程的一般形式为[4]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \quad (\mu,\nu=1,\cdots,2n), \tag{1}$$

式中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组,a^μ 为变量.

假设系统(1)中的变量 a^μ $(\mu=1,\cdots,2n)$ 不是彼此独立的,而受到一些限制,这些限制表示为约束方程

$$f_\beta(t,\boldsymbol{a})=0 \quad (\beta=1,\cdots,g). \tag{2}$$

约束(2)式对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\delta a^\mu=0 \quad (\beta=1,\cdots,g). \tag{3}$$

约束 Birkhoff 系统的运动微分方程可表示为[13]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \quad (\mu=1,\cdots,2n). \tag{4}$$

考虑系统非奇异,则在运动微分方程积分以前,可由方程(2)和(4)求出约束乘子 λ_β 并表示为 $t,\boldsymbol{a}$ 的函数,于是方程(4)可表示为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=P_\mu \quad (\mu=1,\cdots,2n), \tag{5}$$

其中

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)及江苏省"青蓝"工程基金资助的课题.

$$P_\mu = P_\mu(t, \boldsymbol{a}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}. \tag{6}$$

称方程(5)为与约束 Birkhoff 系统(2),(4)相应的自由 Birkhoff 系统的运动微分方程.

3. 约束对 Birkhoff 系统的 Noether 对称性和守恒量的影响

取时间 t 和 Birkhoff 变量 a^μ 的无限小群变换为

$$\begin{aligned} t^* &= t + \Delta t, \\ a^{\mu *} &= a^\mu + \Delta a^\mu \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \end{aligned} \tag{7}$$

或其展开式

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{a}), \\ a^{\mu *} &= a^\mu + \varepsilon_\alpha \xi_\mu^\alpha(t, \boldsymbol{a}), \end{aligned} \tag{8}$$

式中 ε_α($\alpha = 1, \cdots, r$)为无限小参数,ξ_0^α,ξ_μ^α 为无限小群变换(7)式的生成元或生成函数.

判据 1[13] 如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 满足 r 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha - B\dot{\xi}_0^\alpha + R_\mu \dot{\xi}_\mu^\alpha = -\dot{G}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r), \tag{9}$$

其中 $G^\alpha = G^\alpha(t, \boldsymbol{a})$ 为规范函数,则变换(7)式为 Birkhoff 系统(1)的 Noether 准对称变换.

判据 2[13] 如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 满足 r 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha - B\dot{\xi}_0^\alpha + R_\mu \dot{\xi}_\mu^\alpha - P_\mu(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha) = -\dot{\tilde{G}}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r), \tag{10}$$

其中 $\tilde{G}^\alpha = \tilde{G}^\alpha(t, \boldsymbol{a})$ 为规范函数,则变换(7)式为相应自由 Birkhoff 系统(5)的 Noether 广义准对称变换.

因

$$\delta a^\mu = \Delta a^\mu - \dot{a}^\mu \Delta t = \varepsilon_\alpha(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha), \tag{11}$$

约束(2)式对无限小生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 的限制条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha) = 0. \tag{12}$$

判据 3 如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 满足方程(10)和限制条件(12)式,则变换(7)式为约束 Birkhoff 系统(2),(4)的 Noether 广义准对称变换.

如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 同时满足方程(9)和(10),则 Birkhoff 系统(1)受约束(2)式的作用后,其 Noether 对称性仍是相应自由 Birkhoff 系统(5)的 Noether 对称性.进而,如果生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 还满足限制条件(12)式,那么 Birkhoff 系统(1)的 Noether 对称性也是约束 Birkhoff 系统(2),(4)的 Noether 对称性.

如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 满足方程(9)但不满足方程(10),则 Birkhoff 系统(1)受约束(2)式的作用后,其相应的 Noether 对称性将会消失.

如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 不满足方程(9)但满足方程(10),则与约束 Birkhoff 系统(2),(4)相应的自由 Birkhoff 系统(5)产生了新的 Noether 对称性.进而,如果生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 还满足限制条件(12)式,那么约束 Birkhoff 系统(2),(4)产生了新的 Noether 对称性.

Birkhoff 系统(1)受到约束(2)式的作用后,有些 Noether 对称性可以保持,有下述定理.

定理 1 如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α,规范函数 G^α,$\tilde{G}^\alpha$ 以及广义约束力 P_μ 满足条件

$$P_\mu(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha) = \dot{\tilde{G}}^\alpha - \dot{G}^\alpha, \tag{13}$$

则 Birkhoff 系统(1)的 Noether 对称性仍是相应自由 Birkhoff 系统(5)的 Noether 对称性.

定理 2 如果无限小群变换(7)式的生成元 ξ_0^α,ξ_μ^α 相应于 Birkhoff 系统(1)的 Noether 对称性,并且满足条件(13)式和限制条件(12)式,则此对称性也是约束 Birkhoff 系统(2),(4)的 Noether 对称性.

对应于系统的 Noether 对称性,可由下述定理找到相应的守恒量.

定理 3[13] 如果无限小群变换(7)式是 Birkhoff 系统(1)的 Noether 准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的守恒量,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = C_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r). \tag{14}$$

定理 4[13] 如果无限小群变换(7)式是相应自由 Birkhoff 系统(5)的 Noether 广义准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的守恒量,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + \tilde{G}^\alpha = C_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r). \tag{15}$$

定理 5 如果无限小群变换(7)式是约束 Birkhoff 系统(2),(4)的 Noether 广义准对称变换,那么系统存在形如(15)式的 r 个线性独立的守恒量.

Birkhoff 系统(1)受到约束(2)式的作用后,在一

定条件下,某些 Noether 对称性守恒量可以保持,有定理 6.

定理 6　如果 Birkhoff 系统(1)受到约束(2)式的作用后,某一 Noether 对称性保持不变,且满足条件

$$P_\mu(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha) = 0, \tag{16}$$

则与该 Noether 对称性相应的守恒量也保持不变.

4. 算　　例

设 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2], \quad R_1 = a^3, \quad R_2 = a^4, \quad R_3 = R_4 = 0, \tag{17}$$

所受到的约束为

$$f_1 = a^1 a^3 - c_1^2 = 0, \quad f_2 = a^1 + a^4 - c_2 = 0, \tag{18}$$

试研究约束(18)式对 Birkhoff 系统(17)的 Noether 对称性的影响.

Birkhoff 系统(17)的运动方程为

$$\begin{aligned} -\dot{a}^3 - a^1 &= 0, \\ -\dot{a}^4 &= 0, \\ \dot{a}^1 - a^3 &= 0, \\ \dot{a}^2 - a^4 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

受约束(18)式的作用后,运动方程成为

$$\begin{aligned} -\dot{a}^3 - a^1 &= \lambda_1 a^3 + \lambda_2, \\ -\dot{a}^4 &= 0, \\ \dot{a}^1 - a^3 &= \lambda_1 a^1, \\ \dot{a}^2 - a^4 &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{20}$$

由方程(18),(20)求得

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{a^1}, \quad \lambda_2 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}, \tag{21}$$

于是有

$$\begin{aligned} -\dot{a}^3 &= 0, \\ -\dot{a}^4 &= 0, \\ \dot{a}^1 &= 0, \\ \dot{a}^2 - a^4 &= -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}. \end{aligned} \tag{22}$$

对照(6)式,有

$$\begin{aligned} P_1 &= -a^1, \\ P_2 &= 0, \\ P_3 &= -a^3, \\ P_4 &= -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}. \end{aligned} \tag{23}$$

对 Birkhoff 系统(17),条件(9)式给出

$$-a^1\xi_1 + (\dot{a}^1 - a^3)\xi_3 + (\dot{a}^2 - a^4)\xi_4 - B\dot{\xi}_0 + a^3\dot{\xi}_1 + a^4\dot{\xi}_2 = -\dot{G}. \tag{24}$$

受到约束(18)式的作用后,(24)式成为

$$\begin{aligned} &-a^1\xi_1 + (\dot{a}^1 - a^3)\xi_3 + (\dot{a}^2 - a^4)\xi_4 \\ &- B\dot{\xi}_0 + a^3\dot{\xi}_1 + a^4\dot{\xi}_2 + a^1(\xi_1 - \dot{a}^1\xi_0) \\ &+ a^3(\xi_3 - \dot{a}^3\xi_0) - \left(-a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}\right)(\xi_4 - \dot{a}^4\xi_0) \\ &= -\dot{\tilde{G}}. \end{aligned} \tag{25}$$

方程(24)有如下解:

$$\xi_0^1 = 0, \quad \xi_1^1 = 0, \quad \xi_2^1 = 1, \quad \xi_3^1 = 0, \quad \xi_4^1 = 0, \quad G^1 = 0; \tag{26}$$

$$\xi_0^2 = 0, \quad \xi_1^2 = a^3, \quad \xi_2^2 = t, \quad \xi_3^2 = -a^1, \quad \xi_4^2 = 1, \quad G^2 = \frac{1}{2}[(a^1)^2 - (a^3)^2] - a^2; \tag{27}$$

$$\xi_0^3 = 0, \quad \xi_1^3 = a^3, \quad \xi_2^3 = a^4, \quad \xi_3^3 = -a^1, \quad \xi_4^3 = 0, \quad G^3 = \frac{1}{2}[(a^1)^2 - (a^3)^2 - (a^4)^2]. \tag{28}$$

生成元(26)—(28)式均对应 Birkhoff 系统(17)的 Noether 对称性.

限制条件(12)式给出

$$a^3(\xi_1 - \dot{a}^1\xi_0) + a^1(\xi_3 - \dot{a}^3\xi_0) = 0, \quad \xi_1 - \dot{a}^1\xi_0 + \xi_4 - \dot{a}^4\xi_0 = 0. \tag{29}$$

显然,生成元(27)式不满足方程(25)和限制条件(29)式,即生成元(27)式对应的 Birkhoff 系统(17)的 Noether 对称性由于施加了约束(18)式而消失了.

生成元(26)和(28)式都满足方程(25),且有

$$\tilde{G}^1 = 0,$$
$$\tilde{G}^3 = \frac{1}{2}[(a^1)^2 - (a^3)^2 - (a^4)^2]. \tag{30}$$

容易验证生成元(26)和(28)式,规范函数(30)式满足条件(13)式,由定理1,生成元(26)和(28)式对应的 Birkhoff 系统(17)的 Noether 对称性仍是相应自由 Birkhoff 系统(22)的 Noether 对称性.生成元(26)式还满足限制条件(29)式,由定理2,它也对应约束 Birkhoff 系统(18),(20)的 Noether 对称性.

方程(25)有解

$$\xi_0^4 = 0,$$
$$\xi_1^4 = -\frac{2a^3}{a^1}t,$$
$$\xi_2^4 = -t,$$
$$\xi_3^4 = -t - \left(\frac{a^3}{a^1}\right)^2 t,$$
$$\xi_4^4 = -1,$$
$$\tilde{G}^4 = a^2 + a^1 t + \frac{(a^3)^2}{a^1}t. \tag{31}$$

将生成元(31)式代入方程(24),有

$$\dot{G}^4 = -2a^3 t + \dot{a}^1 t - \left(\frac{a^3}{a^1}\right)^2 \dot{a}^1 t - a^3 t - \left(\frac{a^3}{a^1}\right)^2 a^3 t + \dot{a}^2 + \frac{2(a^3)^2}{a^1} + \frac{2a^3}{a^1}\dot{a}^3 t. \tag{32}$$

显然找不到规范函数 G^4,即生成元(31)式不满足方程(24),因此它所对应的相应自由 Birkhoff 系统(22)的 Noether 对称性是由于施加了约束(18)式而新产生的.

可以验证,生成元(26)和(28)式都满足条件(16)式,由定理6,与它们相应的 Noether 对称性守恒量受约束作用后仍保持不变,即有

$$I^1 = I^{1\prime} = a^4 = \text{const}. \tag{33}$$

$$I^3 = I^{3\prime} = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2] = \text{const}. \tag{34}$$

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence RI: AMS College Publishers)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)

[3] Galiullan A S 1989 *Analytical Dynamics* (Moscow: Nauka) (in Russian) [Галиуллин А С 1989 Аналитическая Динамика (Москва: Наука)]

[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F *et al* 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发等 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]

[5] Mei F X 1993 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **38** 816

[6] Mei F X 1993 *Sci*. *China* A **36** 1456

[7] Shi R C, Mei F X, Zhu H P 1994 *Mech*. *Res*. *Commun*. **21** 269

[8] Wu H B, Mei F X 1995 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **40** 885

[9] Mei F X 1996 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **41** 641

[10] Shang M, Mei F X 1997 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **6** 221

[11] Mei F X 1999 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **44** 318

[12] Mei F X, Wu H B 2000 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **45** 412

[13] Mei F X 1999 *Application of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[14] Chen X W, Mei F X 2000 *Mech*. *Res*. *Commun*. **27** 365

[15] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 271

[16] Zhang Y 2001 *Acta Mech*. *Sin*. **33** 669 (in Chinese) [张 毅 2001 力学学报 **33** 669]

[17] Mei F X, Chen X W 2001 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **10** 138

[18] Zhang Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[19] Guo Y X, Shang M, Luo S K 2003 *Appl*. *Math*. *Mech*. **24** 62 (in Chinese) [郭永新、尚 玫、罗绍凯 2003 应用数学和力学 **24** 62]

[20] Zhang Y, Xue Y 2003 *Chin*. *Quart*. *Mech*. **24** 280 (in Chinese) [张 毅、薛 纭 2003 力学季刊 **24** 280]

[21] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 12

[22] Guo Y X, Luo S K, Shang M *et al* 2001 *Rep*. *Math*. *Phys*. **47** 313

[23] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 449

Effects of constraints on Noether symmetries and conserved quantities in a Birkhoffian system*

Zhang Yi[1)] Mei Feng-Xiang[2)]

[1)] (*Department of Civil Engineering*, *University of Science and Technology of Suzhou*, *Suzhou* 215011, *China*)

[2)] (*School of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 29 August 2003; revised manuscript received 20 December 2003)

Abstract

The effects of constraints on Noether symmetries and conserved quantities in a Birkhoffian system are studied. Firstly, the differential equations of the Birkhoffian system are established. Secondly, the criteria of Noether symmetries of the system are given. Thirdly, when constraints are inserted in the system, the variations that occur in the Noether symmetries are discussed, and the conditions under which the Noether symmetries and the conserved quantities of the system will remain unchanged are given. Finally, the results are applied to an illustrative example.

Keywords: analytical mechanics, Birkhoffian system, constraint, Noether symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021) and the "Qing Lan" Program Foundation of Jiangsu Province, China.