第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2434-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.8, August, 2004

扩展的双曲函数法和 Zakharov 方程组的新精确孤立波解*

黄定江 张鸿庆
（大连理工大学应用数学系，大连 116024）
（2003 年 10 月 27 日收到；2003 年 11 月 26 日收到修改稿）

借助于符号计算软件 Maple，利用扩展的双曲函数法求出了 Zakharov 方程组的精确孤立波解，包括钟状孤立波解、扭结状孤立波解、包络孤立波解、奇性孤立波解和一种新的形式的孤立波解. 这种方法也适用于其他非线性波方程.

关键词：扩展的双曲函数法，Zakharov 方程组，孤立波解，精确解
PACC：0340K，0290

1. 引　　言

随着现代科学技术的发展和线性理论研究的日趋完善，非线性理论的研究越来越受到人们的重视. 特别是作为能够解释众多物理现象，在光纤通讯、流体力学、等离子体物理、量子场论等物理领域有广泛应用的孤立子理论一直是最活跃的研究领域之一. 而孤立子理论中一个最重要的研究课题就是非线性波方程孤立波的求解问题. 近十多年来，已经有许多文献报告相关的研究成果，求解的方法更是层出不穷，如反散射方法[1]、Bäcklund 和 Darboux 变换[2]、Hirota 方法[3]、齐次平衡法[4—8]，扩展的 tanh-函数法[9,10]、Jacobi 椭圆函数展开法[11—13]、sine-cose 方法[14] 以及分离变量法[15,16] 等等. 求得的解包括大量的孤立波解、冲击波解[4—10,14,17—24] 和椭圆函数解[11—13]. 然而，寻找新形式的精确解仍然是一件很有意义的工作.

最近，文献[25]在双曲正切函数法[26] 的基础上提出了一种求解非线性波方程精确孤立波解的双曲函数法. 该方法的主要思想是基于对一个辅助的耦合 Riccati 方程解的先验假设. 下面我们首先简述该法.

对于给定的非线性波方程，

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

设其有两个变量 x，t，考虑其行波解

$$u(x, t) = u(\xi), \qquad \xi = kx - \lambda t + l, \tag{2}$$

式中 k 为波数，λ 为频率，均为待定常数，l 为任意常数. 可将方程(1)化为仅关于变量 ξ 的常微分方程 ODE，假设该 ODE 的解为

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i f^i + \sum_{j=1}^{m} b_j f^{j-1} g, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\cosh\xi + r}, \\ g(\xi) &= \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi + r}, \end{aligned} \tag{4}$$

则

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= -f(\xi)g(\xi), \\ g'(\xi) &= 1 - g^2(\xi) - rf(\xi), \\ g^2(\xi) &= 1 - 2rf(\xi) + (r^2 - 1)f^2(\xi), \end{aligned} \tag{5}$$

m 通过平衡微分方程 ODE 的最高阶导数项和非线性项来确定. 接着把(3)，(5)式代入微分方程 ODE 并化简，然后收集 $f^i g^j$ $(i = 0, 1, 2\cdots; j = 0, 1)$ 的系数并令它们为零. 就得到一个包含所有待定系数的非线性代数方程组 NAEs，求解此 NAEs 最终可获得非线性波方程的精确孤立波解. 以上工作一般可利用吴消元法在 Maple 上实现.

文献[27—29]曾经对该方法进行过进一步的探讨，并用该方法获得了非线性波方程的许多精确解.

本文将通过对方程(5)的进一步改进和其特解

* 国家重点基础研究发展规划（批准号：G1998030600）和国家自然科学基金（批准号：10072013）资助的课题.

的进一步研究,扩展了双曲函数法,并用该方法成功找到了 Zakharov 方程组的一些精确解,其中包括一种新的精确孤立波解.

2. 扩展的双曲函数法和 Zakharov 方程组新的精确解

我们考虑如下更一般的耦合 Riccati 方程组:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= -f(\xi)g(\xi), \\ g'(\xi) &= 1 - g^2(\xi) - rf(\xi), \\ g^2(\xi) &= 1 - 2rf(\xi) + (r^2+\varepsilon)f^2(\xi), \\ &\varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \tag{6}$$

当 $\varepsilon = -1$ 时,方程(6)变成方程(5).并且容易知道方程(6)有如下形式解:

当 $\varepsilon = -1$ 时,

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{4}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi + 4r}, \\ g_1(\xi) &= \frac{5\sinh\xi + 3\cosh\xi}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi + 4r}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} f_2(\xi) &= \frac{1}{\cosh\xi + r}, \\ g_2(\xi) &= \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi + r}. \end{aligned} \tag{8}$$

当 $\varepsilon = 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_3(\xi) &= \frac{1}{\sinh\xi + r}, \\ g_3(\xi) &= \frac{\cosh\xi}{\sinh\xi + r}. \end{aligned} \tag{9}$$

解(8)和(9)式在文献[25,27,28]中已被发现,但解(7)式是新的.根据上述分析,我们仍然假设行波约化后的 ODE 有形如(3)式的解.具体的步骤和以上简述的双曲函数法一样.

下面我们利用扩展后的双曲函数法求解如下 Zakharov 方程组[30,12,31]:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c_s^2 u_{xx} - \beta(|v|^2)_{xx} = 0, \\ &\mathrm{i}v_t + \alpha v_{xx} - \delta uv = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

方程(10)是描写等离子体的高频运动或非线性光波的模型,其中 u 是离子的数密度偏差,v 是电场强度的慢变振幅,c_s 是电子-离子热运动速度,$\alpha(>0)$,$\beta(>0)$,δ,c_s 为常数.令

$$\begin{aligned} u &= u(\xi), \\ v &= \phi(\xi)\exp[\mathrm{i}(px - \omega t)], \\ \xi &= kx - \lambda t + l, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 p,ω,k,λ 为待定常数.将(11)式代入(10)式,得到

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - c_s^2 k^2)u'' - \beta k^2(\phi^2)'' = 0, \\ &\alpha k^2\phi'' + (\omega - \alpha p^2)\phi - \delta u\phi \\ &\quad + \mathrm{i}(2\alpha pk - \lambda)\phi' = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

对(12)式的第一式直接积分并取积分常数为零,则得

$$u = \frac{\beta k^2}{\lambda^2 - c_s^2 k^2}\phi^2. \tag{13}$$

在(12)式的第二式中取 $\lambda = 2\alpha pk$,并把(13)式代入整理后得

$$\lambda = 2\alpha pk, \tag{14}$$

$$\alpha k^2\phi'' + (\omega - \alpha p^2)\phi - \frac{\delta\beta}{4\alpha^2p^2 - c_s^2}\phi^3 = 0. \tag{15}$$

平衡方程(15)的最高阶导数项和非线性项得 $m = 1$,于是可设其有如下形式解:

$$\phi = a_0 + a_1 f + b_1 g. \tag{16}$$

其中 a_0,a_1,b_1 为待定常数.$f(\xi)$和 $g(\xi)$满足方程(6).

把方程(6)和(16)代入方程(15),收集 $f^i g^j$($i = 0,1,2,3$;$j = 0,1$)的系数并令它们为零,就得到一个关于变量 a_0,a_1,b_1,r,k,p,w 的非线性代数方程组 NAEs.利用吴消元法和 Maple 求解该 NAEs,我们得到如下五组解:

当 $a_0 = 0$,$r = 0$,p 和 k 为任意常数时,有

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3\varepsilon p^2 - 2\alpha\varepsilon c_s^2}{\beta\delta}}k, \\ b_1 &= 0, \\ \omega &= \alpha(p^2 - k^2); \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta}}k, \\ \omega &= \alpha(p^2 + 2k^2); \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3\varepsilon p^2 - \alpha\varepsilon c_s^2}{2\beta\delta}}k, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k, \\ \omega &= \frac{\alpha(2p^2 + k^2)}{2}. \end{aligned} \tag{19}$$

当 $a_0 = 0$,p 和 k 为任意常数,$\omega = \dfrac{\alpha(2p^2 + k^2)}{2}$ 时,我们有

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k, \\ r^2 &= -\varepsilon; \end{aligned} \tag{20}$$

$$a_1 = a_1,$$

$$b_1 = \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k, \tag{21}$$

$$r^2 = \frac{2\beta\delta a_1^2}{k^2(4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2)} - \varepsilon.$$

利用上述解和(7)—(9),(11),(13),(14),(16)式,我们可得方程组(10)如下精确孤立波解:

对于(17)式,当 $\varepsilon = -1$,$\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta} < 0$ 时,有

$$u = -\frac{32\alpha k^2}{\delta(5\cosh\xi + 3\sinh\xi)^2},$$

$$v = \pm 4\sqrt{\frac{2\alpha c_s^2 - 8\alpha^3 p^2}{\beta\delta}}k\frac{\exp[i(px - wt)]}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi}; \tag{22}$$

$$u = -\frac{2\alpha k^2}{\delta}\mathrm{sech}^2\xi,$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2\alpha c_s^2 - 8\alpha^3 p^2}{\beta\delta}}k\,\mathrm{sech}\xi\exp[i(px - wt)]. \tag{23}$$

当 $\varepsilon = 1$,$\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha^2 c_s^2}{\beta\delta} > 0$ 时,有

$$u = \frac{2\alpha k^2}{\delta}\mathrm{csch}^2\xi,$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta}}k\,\mathrm{csch}\xi\exp[i(px - wt)], \tag{24}$$

其中 $\xi = k(x - 2\alpha pt) + l$,$\omega = \alpha(p^2 - k^2)$.

对(18)式,当 $\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta} > 0$ 时,有

$$u = \frac{2\alpha k^2(5\sinh\xi + 3\cosh\xi)^2}{\delta(5\cosh\xi + 3\sinh\xi)^2},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta}}k\frac{5\sinh\xi + 3\cosh\xi}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi} \times \exp[i(px - wt)]; \tag{25}$$

$$u = \frac{2\alpha k^2}{\delta}\tanh^2\xi,$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta}}k\tanh\xi\exp[i(px - wt)]; \tag{26}$$

$$u = \frac{2\alpha k^2}{\delta}\coth^2\xi,$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{8\alpha^3 p^2 - 2\alpha c_s^2}{\beta\delta}}k\coth\xi\exp[i(px - wt)], \tag{27}$$

其中 $\xi = k(x - 2\alpha pt) + l$,$\omega = \alpha(p^2 + 2k^2)$.

对(19)式,要求 $\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}$ 恒大于零,所以 ε 只能取 1,此时有

$$u = \frac{\alpha k^2}{2\delta}(\mathrm{csch}\xi \pm \coth\xi)^2,$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k(\mathrm{csch}\xi \pm \coth\xi) \times \exp[i(px - wt)], \tag{28}$$

其中 $\xi = k(x - 2\alpha pt) + l$,$\omega = \frac{\alpha(2p^2 + k^2)}{2}$.

对(20)式,由于 $r^2 = -\varepsilon$,所以 ε 只能取 -1,此时当 $\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta} > 0$ 时,有

$$u = \frac{\alpha k^2(5\sinh\xi + 3\cosh\xi)^2}{2\delta(5\cosh\xi + 3\sinh\xi \pm 4)^2},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k\frac{5\sinh\xi + 3\cosh\xi}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi \pm 4} \times \exp[i(px - wt)]; \tag{29}$$

$$u = \frac{\alpha k^2\sinh^2\xi}{2\delta(\cosh\xi \pm 1)^2},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi \pm 1}\exp[i(px - wt)], \tag{30}$$

其中 $\xi = k(x - 2\alpha pt) + l$,$\omega = \frac{\alpha(2p^2 + k^2)}{2}$.

对(21)式,当 $\varepsilon = -1$,$\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta} > 0$,$r^2 = \frac{2\beta\delta a_1^2}{k^2(4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2)} + 1 > 0$ 时,有

$$u = \frac{\beta}{4\alpha^2 p^2 - c_s^2}\left[\frac{4a_1 + b_1(5\sinh\xi + 3\cosh\xi)}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi + 4r}\right]^2,$$

$$v = \left[\frac{4a_1 + b_1(5\sinh\xi + 3\cosh\xi)}{5\cosh\xi + 3\sinh\xi + 4r}\right]\exp[i(px - wt)]; \tag{31}$$

$$u = \frac{\beta}{4\alpha^2 p^2 - c_s^2}\left(\frac{a_1 + b_1\sinh\xi}{\cosh\xi + r}\right)^2,$$

$$v = \left(\frac{a_1 + b_1\sinh\xi}{\cosh\xi + r}\right)\exp[i(px - wt)]. \tag{32}$$

当 $\varepsilon = 1$,$\frac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta} > 0$,$r^2 = \frac{2\beta\delta\alpha_1^2}{k^2(4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2)} - 1 > 0$ 时,有

$$u = \frac{\beta}{4\alpha^2 p^2 - c_s^2}\left(\frac{a_1 + b_1\cosh\xi}{\sinh\xi + r}\right)^2,$$

$$v = \left(\frac{a_1 + b_1\cosh\xi}{\sinh\xi + r}\right)\exp[i(px - wt)], \tag{33}$$

其中 $\xi = k(x - 2\alpha pt) + l$，$w = \dfrac{\alpha(2p^2 + k^2)}{2}$，$b_1 = \pm\sqrt{\dfrac{4\alpha^3 p^2 - \alpha c_s^2}{2\beta\delta}}k$，$a_1$ 为任意常数.

(23)和(26)式中的 u 分别是钟状和扭结状孤立波解，v 是包络孤立波解；(24)，(27)，(28)式是奇性孤立波解.文献[12]曾经利用 Jacobi 椭圆函数展开法获得解(23)，(24)和(26)式，而其余的解则是本文首次得到，其中(22)式中的 u 是一种新的形式的钟形($\delta < 0$)或反钟形($\delta > 0$)孤立波解，v 是包络孤立波解；(25)，(29)和(31)是一种新的形式的奇性孤立波解.

3. 结　论

本文利用扩展的双曲函数法，借助于耦合 Riccati 方程组新的特解，成功地找到了 Zakharov 方程组的一些精确孤立波解，其中包括一种新形式的孤立波解.相信若对耦合 Riccati 方程组及其特解进行进一步的扩展，并用它去求解非线性波方程，将会得到更多形式新的精确解.本文的方法也可以应用到其他非线性波方程或方程组的求解，如 Bore-Kaup 方程组、NSL 方程等.文中所有的解已在计算机代数系统上得到验证.

[1] Ablowitz M J，Clarkson P A 1991 *Solitons，Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*（Cambridge：Cambridge University Press）

[2] Gu C H *et al* 1990 *Soliton Theory and Its Application*（Hangzhou：Zhejiang Science and Technology Press）（in Chinese）[谷超豪等 1990 孤立子理论与应用(杭州 浙江科学技术出版社)]

[3] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[5] Wang M L，Zhou Y B，Li Z B 1996 *Phys. Lett.* A **216** 67

[6] Yang L，Liu J，Wang Y 1999 *Phys. Lett.* A **260** 55

[7] Fan E G，Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353（in Chinese）[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[8] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1049（in Chinese）[范恩贵 2000 物理学报 **49** 1049]

[9] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[10] Li D S，Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569（in Chinese）[李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[11] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[12] Liu S D，Fu Z T，Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718（in Chinese）[刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[13] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 1923]

[14] Yan C 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[15] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[16] Tang X Y，Lou S Y 2002 *Commun. Theor. Phys.*（Beijing）**38** 1

[17] Yan Z Y，Zhang H Q，Fan E G 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1 [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[18] Li Z B，Yao R X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062（in Chinese）[李志斌、姚若霞 2001 物理学报 **50** 2062]

[19] Zhang S Q，Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2197（in Chinese）[张善卿、李志斌 2002 物理学报 **51** 2197]

[20] Li Z B，Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402（in Chinese）[李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]

[21] Xue G Q，Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 946（in Chinese）[徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946]

[22] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1416（in Chinese）[张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[23] Zhang J F，Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1048（in Chinese）[张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1048]

[24] Yan Z Y，Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1962（in Chinese）[闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[25] Zhang G X，Li Z B，Duan Y S 2000 *Sci. China* A **30** 1103（in Chinese）[张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]

[26] Li Z B，Zhang S Q 1997 *Acta Mathematica Scienta* **17** 81（in Chinese）[李志斌、张善卿 1997 数学学报 **17** 81]

[27] Lü K P，Shi Y R，Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074（in Chinese）[吕克璞、石玉仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]

[28] Shi Y R，Lü K P，Duan W S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267（in Chinese）[石玉仁、吕克璞、段文山等 2003 物理学报 **52** 267]

[29] Guo G P，Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159（in Chinese）[郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[30] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics*（Beijing：Peking University Press）（in Chinese）[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京 北京大学出版社)]

[31] Zhang J L，Wang Y M，Wang M L *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1574（in Chinese）[张金良、王跃明、王明亮等 2003 物理学报 **52** 1574]

Extended hyperbolic function method and new exact solitary wave solutions of Zakharov equations*

Huang Ding-Jiang Zhang Hong-Qing

(*Department of Applied Mathematics*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116024, *China*)

(Received 27 October 2003; revised manuscript received 26 November 2003)

Abstract

With the aid of symbolic computation system Maple and by using the extended hyperbolic function method, the exact solitary wave solutions of Zakharov equations are obtained which include bell-shaped soliton solutions, kink-shaped soliton solutions, envelop soliton solutions, singular soliton solutions and a new type of soliton solutions. The method can be also used to solve other nonlinear wave equations.

Keywords: extended hyperbolic function method, Zakharov equations, solitary wave solutions, exact solutions

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1998030600) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10072013).