

非平行导线型边界下 Maxwell-Chern-Simons 场的 Casimir 效应*

白占武†

(华北电力大学应用物理系, 保定 071003)

(2002 年 11 月 19 日收到 2003 年 9 月 9 日收到修改稿)

在路径积分量子化框架下, 利用复变函数论中的保角变换与 Plana 求和公式, 计算了 $(2+1)$ 维空间中两个非平行导线型边界下 Maxwell-Chern-Simons 场的 Casimir 效应. 不引入任何截断参数, 而得出有限的解析表达式.

关键词: Casimir 效应, 路径积分, 保角变换, Plana 求和公式

PACC: 1110N, 0370

1. 引 言

$(2+1)$ 维空间中的 Maxwell-Chern-Simons 场 (Maxwell-C-S 场) 与分数量子 Hall 效应^[1] 及高温超导^[2] 有关, 是分数统计的工具, 研究 Maxwell-C-S 场的 Casimir 效应可以为该理论提供检验. 文献 [3, 4] 用 Green 函数方法讨论了两个平行导线型边界与圆形边界下的 Casimir 效应, 文献 [5] 用路径积分量子化方法与复变函数论中的 Plana 求和公式, 计算了两个平行导线型边界下的 Casimir 效应, 得到有限的解析表达式. 本文在路径积分量子化框架下, 利用复变函数论中的保角变换与 Plana 求和公式, 计算了两个非平行导线型边界的 Casimir 效应.

2. 保角变换与真空零点能

我们知道, 利用复变函数论中的保角变换可以将一些边界变换成两个平行导线型边界, 从而可以解析计算出该边界下 Maxwell-C-S 场的 Casimir 效应. 两个非导线型边界 (图 1) 就是这些边界之一. 边界 AB, CD 延伸后相交于 O 点, 交角为 θ , 边界两端到 O 点的距离分别为 R_1 和 R_2 , $L = R_2 - R_1$ 为边界的长度.

建立如图 2 所示的复数平面 z . 首先, 利用保角

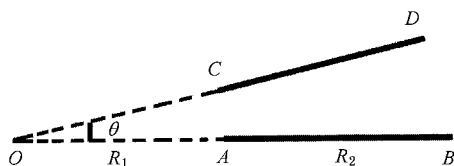


图 1 边界形状

变换将 z 平面上导线所在的两条射线之间的区域变成图 3 所示的 z_1 平面的上半平面, 所用变换式为

$$z_1 = z^{\frac{\pi}{\theta}}.$$

这样 AB, CD 分别处在 z_1 平面的正、负实轴上, 再次作变换

$$\zeta = \ln z_1.$$

把 z_1 平面的上半平面变成了 ζ 平面上平行于实轴、宽为 π 的一个带形区域 (见图 4). 这里,

$$\xi_A = \frac{\pi}{\theta} \ln R_1,$$

$$\xi_B = \frac{\pi}{\theta} \ln R_2.$$

这样, z 平面上非平行导线型边界经过上述二次变换为 ζ 平面上平行导线型边界. 两导线的长度为

$$L' = \xi_B - \xi_A = \frac{\pi}{\theta} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\pi}{\theta} \ln \left(1 + \frac{L}{R_1} \right). \quad (1)$$

* 华北电力大学青年科研基金 (批准号 D60214) 资助的课题.

† E-mail: baizhanwu@hotmail.com

导线间距离为

$$a' = \pi. \tag{2}$$

为了计算上的方便, 令 $R_1 = 1$. 只要 L 以 R_1 为单位, 我们总可以这样做. 讨论 $L' \gg \pi$, 即 $L \gg e^\theta - 1$ 的情况.

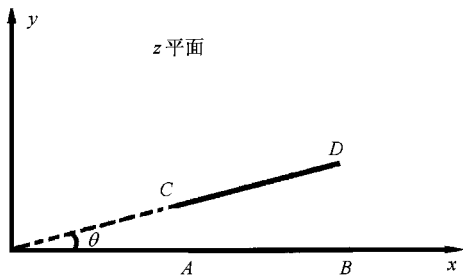


图 2 位于 z 平面的区域

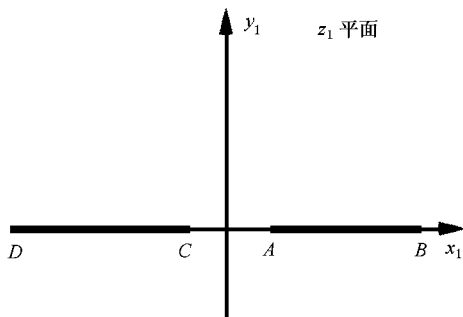


图 3 一次变换后区域

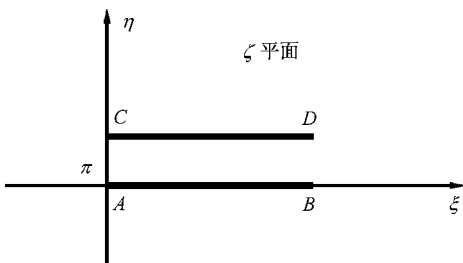


图 4 二次变换后区域

真空到真空的跃迁振幅^[5]

$$Z = \langle 0 | 0 \rangle = \int DA_i \exp \left\{ i \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{2} A_i (\nabla^2 - m^2) A_i \right] \right\}. \tag{3}$$

作保角变换 $\zeta = \xi + i\eta = f(z)$,

$$A_i(x, y, t) = SA_i(\xi, \eta, t)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_i &= |f'(z)|^2 \nabla_\xi^2 SA_i(\xi, \eta, t) \\ &= |f'(\xi, \eta)|^2 \nabla_\xi^2 SA_i(\xi, \eta, t), \end{aligned}$$

$$dx dy = \mathcal{K}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

对 SA_i 作傅氏展开^[6]

$$SA_i(\xi, \eta, t) = \sum \tilde{A}_i(k) \frac{1}{\sqrt{TL'a'}} \exp(ik\xi),$$

代入 Z 中, 并作一 Wick 转动, 从闵氏空间过渡到欧氏空间, 则

$$Z = \int DA_i \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} \sum_{k'_i, k} (k_0^2 - m^2) F[J] - k_i^2 F[J] |f'(z)|^2 \right] \tilde{A}_i(k') \tilde{A}_i(k) \right\}, \tag{4}$$

式中

$$\begin{aligned} F[J] &= \frac{1}{L'a'} \int d\xi d\eta \mathcal{K}(\xi, \eta) \exp[i(k' + k) \cdot \zeta] \\ &= \text{Re}_1(k_{\delta i}) + i \text{Im}_1(k_{\delta i}), \tag{5} \\ F[J] |f'(z)|^2 &= \frac{1}{L'a'} \int d\xi d\eta \mathcal{K}(\xi, \eta) |f'(z)|^2 \\ &\quad \times \exp[i(k' + k) \cdot \zeta] \\ &= \text{Re}_2(k_{\delta i}) + i \text{Im}_2(k_{\delta i}), \tag{6} \end{aligned}$$

其中 $k_{\delta i} = k'_i + k_i$. 引入下列展开式

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_i^+(k', k) + iA_i^-(k', k)], \tag{7} \\ \tilde{A}_i(k') &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_i^+(k', k) - iA_i^-(k', k)]. \end{aligned}$$

记作

$$\begin{aligned} (k_0^2 - m^2) F[J] - k_i^2 F[J] |f'(z)|^2 &= u(k', k) + i\theta(k', k) = \rho \exp[i\theta(k', k)] \tag{8} \end{aligned}$$

将(7)(8)式代入(4)式,

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{k'_i, k} \int DA_i \exp \left\{ - \rho \exp[i\theta(k'_i, k)] \right. \\ &\quad \times [A_i^+(k'_i, k)^2 + A_i^-(k'_i, k)^2] \left. \right\} \\ &= \prod_{k'_i, k} \exp[-i\theta(k'_i, k)] \int DA'_i \exp \left\{ - \rho [A_{iV}^+(k'_i, k)^2 \right. \\ &\quad \left. + A_{iZ}^-(k'_i, k)^2] \right\}, \tag{9} \end{aligned}$$

式中连乘积只对 $k > 0$ 进行,

$$A_{iV}^+ = \exp[i\theta(k'_i, k)/2] A_i^+,$$

$$A_{iZ}^- = \exp[i\theta(k'_i, k)/2] A_i^-.$$

(9)式中的被积函数是 (A_{iV}^+, A_{iZ}^-) 的解析函数, 积分可转到实轴上,

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{k'_i, k} \exp[-i\theta(k'_i, k)/2] \int DA'_{iV} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \rho [A_{iV}^+(k'_i, k)^2 + A_{iZ}^-(k'_i, k)^2] \right\} \\ &= \prod_{k'_i, k} \exp[-i\theta(k'_i, k)/2] \rho^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \prod_{k_{\delta i}, k} \exp[-i\alpha(k_{\delta i}, k) \rho^{-1/2}]. \quad (10)$$

由此得真空零点能为

$$E_0 = -\frac{1}{T} \ln Z = \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \rho^2 + \frac{1}{2} i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k_{\delta i}, k} \alpha(k_{\delta i}, k). \quad (11)$$

因为

$$H[f(\xi, \eta)] \propto \int f(\xi, \eta) \exp(ik_{\delta 1} \cdot \xi) \exp(ik_{\delta 2} \cdot \eta) d\xi d\eta,$$

变换的实部为 $(k_{\delta 1}, k_{\delta 2})$ 的偶函数, 虚部为 $(k_{\delta 1}, k_{\delta 2})$ 的奇函数, 故 u 为 $(k_{\delta 1}, k_{\delta 2})$ 的偶函数, v 为 $(k_{\delta 1}, k_{\delta 2})$ 的奇函数, 而 $\tan \theta = v/u$, θ 为 $(k_{\delta 1}, k_{\delta 2})$ 的奇函数,

$$\sum_{k_{\delta i}, k} \alpha(k_{\delta i}, k) = \sum_k \sum_{k_{\delta i} = -\infty}^{\infty} \alpha(k_{\delta i}, k) = 0. \quad (12)$$

这正是 E_0 的实数性所要求的.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= u^2 + v^2 = [k_0^2 \text{Re}_1 - k_i^2 \text{Re}_2 - m^2 \text{Re}_1] \\ &+ [k_0^2 \text{Im}_1 - k_i^2 \text{Im}_2] \\ &= (\text{Re}_1^2 + \text{Im}_1^2) k_0^4 - 2(\text{Re}_1 \text{Re}_2 + \text{Im}_1 \text{Im}_2) k_i^2 + \text{Re}_1^2 m^2 k_0^2 \\ &+ [(\text{Re}_2 k_i^2 + \text{Re}_1 m^2) + \text{Im}_2^2 k_i^4] \end{aligned} \quad (13)$$

令(13)式中 k_0^2 的二次项、一次项、零次项系数分别为 a_0, b_0, c_0 , $\rho^2 = 0$ 的 k_0^2 的根为 k_{01}^2, k_{02}^2 , 即

$$\begin{aligned} k_{01}^2 &= \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c_0}}{2a_0}, \\ k_{02}^2 &= \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c_0}}{2a_0}, \end{aligned}$$

则 ρ^2 可分解为

$$\rho^2 = [\text{Re}_1^2 + \text{Im}_1^2] k_0^2 - k_{01}^2 [k_0^2 - k_{02}^2]. \quad (14)$$

为满足 $\rho^2 \geq 0$, 必须使 $b_0^2 - 4a_0 c_0 \leq 0$. 记 $k_{01}^2 = k_{0e} + ik_{0i}, k_{02}^2 = k_{0e} - ik_{0i}$, 这里

$$\begin{aligned} k_{0e} &= -\frac{b_0}{2a_0}, \\ k_{0i} &= \frac{1}{2a_0} \sqrt{4a_0 c_0 - b_0^2}. \end{aligned}$$

由(11)(14)式得

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k_{\delta i}, k} [\ln(\text{Re}_1^2 + \text{Im}_1^2) \\ &+ \ln(k_0^2 - k_{01}^2) + \ln(k_0^2 - k_{02}^2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

略去与导线间距 a' ($a' = \pi$) 无关的第一项, 以下分两种情形进行讨论.

情形 1: $k_{0i} \neq 0$.

将 k_0 延拓到复平面上. k_0 在实轴到 k_{0r} , $\times \exp[i(\theta_0 + \pi)/2]$ (第一个积分) 或到

$k_{0r} \exp[-i(\theta_0 + \pi)/2]$ 夹角小于 π 的那个区域解析, 可将 k_{0r} 的积分转到对 $k'_0 = k_{0r} \exp[i(\theta_0 + \pi)/2]$ (第一个积分) 或 $k'_0 = k_{0r} \exp[-i(\theta_0 + \pi)/2]$ (第二个积分) 积分, 再利用文献[7]中的公式(17c) (现在 x 为复变量), 得到与 a' 有关的部分为

$$E_0 = \frac{1}{8} \sum_{k_{\delta i}, k} \sqrt{-2k_{0e} + 2\sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2}}. \quad (16)$$

情形 2: $k_{0i} = 0$.

情形 2 可分两种情况.

(a) $k_{\delta i}$ 与 k_i^2 有关. $E_0 = \sum_{k_{\delta i}, k} f(k_{01}^2, k_{02}^2)$ 将 k_i^2 与 $k_{\delta i}$ 关系代入 E_0 , 得

$$E_0 = \sum_{k_{\delta i}, k} f(k_{\delta i}). \quad (17)$$

(b) $k_{\delta i}$ 与 k_i^2 无关. $k_{\delta i} = \text{常数}$, $k_{0i}^2 = 4a_0 c_0 - b_0^2$ 为 k_i^2 的二次式, 令 k_i^2 各幂次系数为零, 解得

$$\begin{aligned} \text{Re}_1 &= 0, \\ \text{Re}_2^2 &= \text{Im}_2^2 (1 - \text{Im}_2^2 / \text{Im}_1^2). \end{aligned} \quad (18)$$

或

$$\begin{aligned} \text{Im}_1 &= 0, \\ \text{Im}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

对于非平行导线型边界,

$$\begin{aligned} \text{Re}_1 &= \frac{1}{\pi L' a'} \frac{\exp\left(\frac{\theta}{\pi} L'\right) - 1}{\theta^2 / \pi^2 + k_{\delta 1}^2} \theta \delta_{k_{\delta 2}, 0}, \\ \text{Im}_1 &= -\frac{1}{L' a'} \frac{\exp\left(\frac{\theta}{\pi} L'\right) - 1}{\theta^2 / \pi^2 + k_{\delta 1}^2} k_{\delta 1} \delta_{k_{\delta 2}, 0}; \\ \text{Re}_2 &= \frac{\pi}{L' a' \theta^2} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\pi} L'\right)}{\theta^2 / \pi^2 + k_{\delta 1}^2} \theta \delta_{k_{\delta 2}, 0}, \\ \text{Im}_2 &= \frac{\pi^2}{L' a' \theta^2} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\pi} L'\right)}{\theta^2 / \pi^2 + k_{\delta 1}^2} k_{\delta 1} \delta_{k_{\delta 2}, 0}. \end{aligned} \quad (20)$$

方程组(18)无解. 方程组(19)有解 $k_{\delta 1} = 0$, 满足方程组(19)即 $v = 0$. 此时, 回到 Z 的表达式(4), 利用文献[5]的结果,

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{1}{T} \ln Z = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln[(k_0^2 - m^2) \\ &\times \text{Re}_1(0, 0) - k_i^2 \text{Re}_2(0, 0)], \end{aligned} \quad (21)$$

对 k_0 求和, 并略去与 a' 无关的项, 得

$$E_0 = \frac{L'}{2(2\pi)} \int dk_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_1^2 + \left(\frac{n\pi}{a'}\right)^2 + m^2 r^2} \cdot \frac{1}{r}, \quad (22)$$

式中

$$r = [\operatorname{Re}_1(0, \rho) \operatorname{Re}_2(0, \rho)]^2 = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{1 + L}. \tag{23}$$

3. Plana 求和公式与 Casimir 效应

Plana 求和公式^[8]可陈述如下:

定理 1 设函数 $f(z)$ 当 $\operatorname{Re} z > 0$ 时解析, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2}f(0) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_{c_2}^{\infty} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi iz} - 1} - \int_{c_1}^{\infty} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi iz} - 1}, \tag{24}$$

其中 c_1 和 c_2 是复平面(一叶 Riemann 面)上沿虚轴从 $(-i\infty)$ 到 0 和从 0 到 $(i\infty)$ 的积分路径. 当复平面上沿 c_1 和 c_2 积分时不遇到割线, 即 $f(z)$ 为单值函数时, 可令积分中 $z = it$, 便有公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2}f(0) - \int_0^{\infty} f(x) dx = i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \tag{25}$$

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), k_2 = n \rightarrow z, f(z) = g(z^2),$$

$f(z)$ 当 $\operatorname{Re} z > 0$ 时解析.

对于情形 1, 我们来证明, 割线不会沿着虚轴, 即 $f(z)$ 沿虚轴为 z 的单值函数.

内部根号支点在虚轴上.

$$\begin{aligned} k_{0e}^2 + k_{0i}^2 &= a_1 k_i^4 + b_1 k_i^2 + c_1, \\ a_1 k_i^4 + b_1 k_i^2 + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

的根记为

$$\begin{aligned} k_i^2 &= k_{1e} \pm i k_{1i} \quad (k_{0e}^2 + k_{0i}^2 \geq 0, b_1^2 - 4a_1 c_1 \leq 0), \\ \sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2} &= \sqrt{(k_i^2 - k_{1e})^2} + k_{1i}. \end{aligned}$$

欲使支点在虚轴上, 必须 $k_{1i} = 0$, 此时 $\sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2} = \sqrt{(k_i^2 - k_{1e})^2}$ 没有支点, 即内部根号支不可能在虚轴上, 沿虚轴内部根号为单值函数.

外部根号没有支点.

根号内函数

$$f_r = -2k_{0e} + 2\sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2}$$

沿着虚轴单值解析(可能有可去奇点), $f_r = 0, k_{0i}^2 = 0$ 的根 $k_i^2 = k_{2e} \pm i k_{2i} = k_{2e}$ (计算表明 $k_{2i} \equiv 0$), 此根为 $f_r = 0$ 的二重根. 证明如下:

$$f_r = -2k_{0e} + 2\sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2} \Big|_{k_{0i}^2=0}$$

$$= -2k_{0e} + 2\sqrt{k_{0e}^2} = 0,$$

必须 $k_{0e} \geq 0$ 若为单根, 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_r}{\partial k_i^2}\right)_{k_{2e}} &= -2\left(\frac{\partial k_{0e}}{\partial k_i^2}\right)_{k_{2e}} + 2\left(\frac{\partial k_{0e}}{\partial k_i^2}\right)_{k_{2e}} \\ &\quad + \frac{1}{2k_{0e}}\left(\frac{\partial k_{0i}^2}{\partial k_i^2}\right)_{k_{2e}} \neq 0, \end{aligned}$$

即 $k_{0e}(k_i^2 = k_{2e}) = 0$. 结合 $k_{0i}^2(k_i^2 = k_{2e}) = 0$ 给出

$$b_0 = c_0 = 0. \tag{26}$$

解出:

$$(i) \quad m = 0, \quad k_i^2 = 0, \tag{27}$$

由此得

$$\operatorname{Re}_1/\operatorname{Im}_1 = \operatorname{Re}_2/\operatorname{Im}_2. \tag{28}$$

$$(ii) \quad m \neq 0, \quad \operatorname{Re}_1 = 0 \text{ 或 } \operatorname{Im}_2 = 0. \tag{29}$$

(28)(29) 式的解均为 $k_{\delta 1} = 0$, 而此时 $k_{0i} \equiv 0$, 这与所设 $k_{0i}(k_i^2 \geq 0) \neq 0$ 矛盾, 故 $k_i^2 = k_{2e}$ 为二重根.

在 $k_i^2 = k_{2e}$ 处作泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_r &= (k_i^2 - k_{2e})^2 T(k_i^2), \\ T(k_i^2) &\neq 0, \\ &\sqrt{-2k_{0e} + 2\sqrt{k_{0e}^2 + k_{0i}^2}} \\ &= \sqrt{(k_i^2 - k_{2e})^2} \sqrt{T(k_i^2)}. \end{aligned}$$

没有支点, $f_r(z)$ 沿虚轴为单值函数.

由于 $f(it) = f(-it) = g(-t^2) - g(-t^2) = 0$, 根据 (25) 式, 情形 1 对 Casimir 能的贡献 $E_{C1} = 0$.

现在讨论情形 2.

(a) $E_0 = \sum_{k_{\delta i}} f(k_{\delta i}), E_0$ 与 a' 无关, 对 Casimir 能无贡献.

(b) 由 (22) 式, E_0 与 (x, y) 空间平行导线型边界的 E_0 表达式^[5]相似, 只要作替换 $L \rightarrow L', a \rightarrow a', m \rightarrow mr$ 并乘以一个总体因子 $\frac{1}{r}$, 便可由文献 [5] 根据 Plana 求和公式算出的 Casimir 能得到这里的 Casimir 能.

$$\begin{aligned} E_C = E_{C2} &= -\frac{L'}{32a'^2 \pi r} \int_{2ma'r}^{\infty} dt \frac{t^2 - 4m^2 a'^2 r^2}{e^t - 1} \\ &= -\frac{\ln(1+L)}{32\pi\theta^2} \int_{2m\theta\sqrt{1+L}}^{\infty} dt \frac{t^2 - 4m^2 \theta^2 (1+L)}{e^t - 1}. \end{aligned} \tag{30}$$

在极限 $\theta \rightarrow 0$ 及 $R_1 (= 1) \gg L \gg a (= R_1 \theta)$ 条件下, 导线可视为平行导线,

$$E_C = -\frac{L}{32\pi a^2} \int_{2ma}^{\infty} dt \frac{t^2 - 4m^2 a^2}{e^t - 1}. \tag{31}$$

这与文献 5 的结果相同.

导线受一个力矩 M 作用,

$$M = - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} = - \frac{\ln(1+L)}{16\pi\theta^3} \int_{2m\theta/\sqrt{1+L}}^{\infty} dt \frac{t^2}{e^t - 1}. \quad (32)$$

两非平行导线边界条件下的 Maxwell-C-S 场的 Casimir 力矩为一种吸引力矩. 考虑 m 的极限情况.

当 $m=0$ 时,

$$\begin{aligned} M &= - \frac{\ln(1+L)}{16\pi\theta^3} \int_0^{\infty} dt \frac{t^2}{e^t - 1} \\ &= - \frac{\ln(1+L)}{16\pi\theta^3} \Gamma(3)\zeta(3) \\ &= - \frac{\ln(1+L)}{8\pi\theta^3} \zeta(3), \end{aligned} \quad (33)$$

式中 Γ, ζ 为 Γ 函数和 Riemann ζ 函数. 当 $m\theta \sqrt{1+L} \gg 1$ 时,

$$\begin{aligned} M &= - \frac{\ln(1+L)}{8\pi\theta^3} \left[2m^2 \theta^2 (1+L) \right. \\ &\quad \left. + 2m\theta \sqrt{1+L} + 1 \right] \exp(-2m\theta \sqrt{1+L}), \end{aligned} \quad (34)$$

式中 L 以 R_1 为单位, 对于任意单位, L 应代之以 L/R_1 .

本文提供了计算 $(2+1)$ 维空间中非简单、规则几何结构 Casimir 效应的一种方法. $(3+1)$ 维空间的情形可参见文献 [9].

-
- [1] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [2] Laughlin R B 1988 *Science* **242** 525
- [3] Milton K A, Ng Y J 1990 *Phys. Rev. D* **42** 2875
- [4] Milton K A, Ng Y J 1992 *Phys. Rev. D* **46** 842
- [5] Zhang Z H, Li Z P 1998 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **22** 87 (in Chinese) [张智和、李子平 1998 高能物理与核物理 **22** 87]
- [6] Zheng T Y 1990 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **14** 796 (in Chinese) [郑泰玉 1990 高能物理与核物理 **14** 796]
- [7] Chu F W, Liu Z Z, Zhou H C 1992 *A Collection of Integral Table* (Beijing: Astronavigation Press) p147 (in Chinese) [邹凤梧、刘中柱、周怀春 1992 积分表汇编(北京:宇航出版社)第 147 页]
- [8] Ni G J, Zhang M, Gong J W 1991 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **15** 695 (in Chinese) [倪光炯、张敏、宫家文 1991 高能物理与核物理 **15** 695]
- [9] Jiang W Z, Fu D J, Wang Z X et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 813 (in Chinese) [蒋维洲、傅德基、王震遐等 2003 物理学报 **52** 813]

Casimir effect of the Maxwell-Chern-Simons field for two non-parallel lines boundary^{*}

Bai Zhan-Wu

(*Department of Applied Physics , North China Electric Power University , Baoding 071003 ,China*)

(Received 19 November 2002 ; revised manuscript received 9 September 2003)

Abstract

Based on the Faddeev formalism of path-integral quantization for a constrained Hamiltonian system , the Casimir effect between two non-parallel lines in the $(2 + 1)$ -dimensional space is calculated by using conformal mapping and Plana summation formula in the theory of complex variable function. Without introducing any cutoff of parameter , the finite analytical expression is obtained.

Keywords : Casimir effect , path integral , conformal mapping , Plana summation formula

PACC : 1110N , 0370

^{*} Project supported by the Youth Foundation of North China Electric Power University ,China (Grant No. 060214).