

光场与 V 型三能级原子依赖强度耦合系统 场熵的演化特性*

黄春佳 贺慧勇 孔凡志 方家元

(长沙理工大学物理与电子科学系, 长沙 410077)

(2003 年 9 月 26 日收到, 2003 年 12 月 24 日收到修改稿)

研究了光场与 V 型三能级原子依赖强度耦合系统场熵的演化特性, 讨论了单光子跃迁失谐量和初始光子数对场熵演化的影响. 研究表明, 当失谐量比较小且初始光场较弱时, 场熵的时间演化行为与单光子 Jaynes-Cummings 模型相似; 当失谐量足够大或初始光场足够强时, 场熵的时间演化表现出类似于双光子 Jaynes-Cummings 模型中场熵演化的周期性.

关键词: 单模辐射场, V 型三能级原子, 依赖强度耦合, 场熵演化

PACC: 4250

1. 引 言

依赖强度耦合 Jaynes-Cummings (J-C) 模型是 Buck 和 Sukumar 为反映光场与原子相互作用对光场强度的依赖性而提出的理论模型^[1,2]. 该模型不仅可以精确求解, 而且还展示了丰富的量子效应, 如原子反转的崩溃与回复现象^[3]、光场的压缩效应^[4]、光场的相位特性^[5]、光场(原子)熵的演化特性^[6]等. 虽然人们对依赖强度耦合 J-C 模型作了多种推广, 但有关光场与三能级原子依赖强度耦合系统量子特性的研究尚少.

Phoenix 和 Knight 等^[7,8]用量子熵研究光场与二能级原子相互作用时的动力学特性, 显示出很大的优越性, 熵自动包含了量子系统密度矩阵的全部统计矩, 它既是一种十分灵敏的量子态纯度和原子-光场关联程度的量度, 也是解释量子系统动力学特性的重要工具. 场(原子)熵的时间演化反映出光场与原子关联程度的演化特性, 熵越高, 关联越强. 如果初始光场、原子均处于纯态, 彼此无关联, 则光场-原子全系统的熵 S 为零且不随时间变化. 根据熵的 Araki-Lieb 不等式^[9]

$$|S_a - S_f| \leq S \leq |S_a + S_f|, \quad (1)$$

在 $t > 0$ 的任何时刻, 光场与原子的熵相等. 自从量

子熵理论应用于量子光学领域以来, 光场与原子相互作用系统中场熵演化规律的研究很快引起人们的重视, 并进行了大量的工作^[10-18]. 然而, 对于光场与三能级原子依赖强度耦合系统中光场和原子熵特性的研究尚未见报道.

本文应用量子熵理论, 研究了光场与 V 型三能级原子依赖强度耦合系统的场熵演化规律. 发现光场与原子单光子跃迁失谐量和初始光场的强度对场熵的时间演化行为具有非常重要的影响.

2. 理论模型和态矢

考虑一单模量子化光场与如图 1 所示的 V 型三能级原子发生依赖于光场强度的相互作用, 系统哈密顿量为

$$H = H_0 + V, \quad (2)$$

其中

$$H_0 = \sum_{j=1}^3 \omega_j b_j^\dagger b_j + \omega a^\dagger a, \quad (3)$$

$$V = g_1 (b_2^\dagger b_1 a \sqrt{a^\dagger a} + b_1^\dagger b_2 \sqrt{a^\dagger a a^\dagger}) + g_2 (b_3^\dagger b_1 a \sqrt{a^\dagger a} + b_1^\dagger b_3 \sqrt{a^\dagger a a^\dagger}). \quad (4)$$

(3)(4)式中, a^\dagger 和 a 分别为光场光子的产生算符和湮没算符, b_j^\dagger 和 b_j 分别表示在第 j ($j=1, 2, 3$) 个能级上原子的产生算符和湮没算符, ω 和 ω_j 分别为

* 湖南省教育厅科研基金(批准号 03A003)资助的课题.

光场圆频率和原子第($j = 1, 2, 3$)个能级的本征跃迁圆频率, g_1 和 g_2 表征光场-原子相互作用强度.

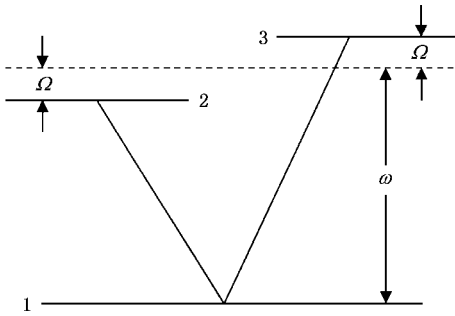


图 1 V型三能级原子

相互作用绘景中,系统有效哈密顿量为

$$V^I = g_1 \left(b_2^+ b_1 a \sqrt{a^+} a e^{-i\Omega} + b_1^+ b_2 \sqrt{a^+} a a^+ e^{i\Omega} \right) + g_2 \left(b_3^+ b_1 a \sqrt{a^+} a e^{i\Omega} + b_1^+ b_3 \sqrt{a^+} a a^+ e^{-i\Omega} \right), \quad (5)$$

其中 $\Omega = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = (\omega_3 - \omega_1) - \omega$ 为单光子跃迁失谐量.

设初始时刻($t = 0$)系统原子处于相干叠加态,光场处于相干态,且光场-原子间无耦合,即

$$|\psi_A(0)\rangle = \gamma_1 |3\rangle + \gamma_2 |2\rangle + \gamma_3 |1\rangle,$$

其中

$$C_{jn} = \frac{\left\{ g_2^2(n+1)^2 \gamma_1 + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 u_{in} \gamma_i + g_2(n+1) \left[g_1(n+1) \gamma_2 + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 u_{in} - \Omega \right) \gamma_3 \right] \right\} f_n}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 (u_{jn} - u_{in})}. \quad (14)$$

这里 $u_{jn} (j = 1, 2, 3)$ 是方程 $u^3 - 3\Omega^2 u^2 + [2\Omega^2 - (g_1^2 + g_2^2)(n+1)^2] u + 2g_2^2 \Omega (n+1)^2 = 0$ 的解.

3. 场熵的演化特性

为简便计,令

$$g_1 = g_2 = g, \quad \lambda = \frac{\Omega}{g}, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 |\gamma_j|^2 = 1, \quad (6)$$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle, \quad f_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{in\theta}, \quad (7)$$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\gamma_1 |3, n\rangle + \gamma_2 |2, n\rangle + \gamma_3 |1, n\rangle). \quad (8)$$

(7)式中 \bar{n} 为初始光场的平均光子数, θ 为相位角,为简便计,本文取 $\theta = 0$.

在任一时刻($t > 0$)系统的态矢演化为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) |3, n\rangle + b_n(t) |2, n\rangle + c_n(t) |1, n\rangle]. \quad (9)$$

解薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = V^I |\psi(t)\rangle, \quad (10)$$

得到

$$a_n(t) = \sum_{j=1}^3 C_{jn} e^{iu_{jn}t}, \quad (11)$$

$$b_n(t) = \frac{e^{-2i\Omega t}}{g_1 g_2 (n+1)^2} \sum_{j=1}^3 C_{jn} e^{iu_{jn}t} \times [u_{jn}(u_{jn} - \Omega) - g_2^2(n+1)^2] \quad (12)$$

$$c_n(t) = \frac{e^{-i\Omega t}}{ng_2} \sum_{j=1}^3 C_{jn-1} e^{iu_{jn-1}t} u_{jn-1}, \quad (13)$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由系统的初始条件及(1)式可知,在 $t > 0$ 的任意时刻,系统的场熵和原子熵总是相等的.因此,可利用原子约化密度矩阵求出系统场熵的表达式.

原子约化密度矩阵为

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_F |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_n a_n(t) a_n^*(t) & \sum_n a_n(t) b_n^*(t) & \sum_n a_n(t) c_n^*(t) \\ \sum_n b_n(t) a_n^*(t) & \sum_n b_n(t) b_n^*(t) & \sum_n b_n(t) c_n^*(t) \\ \sum_n c_n(t) a_n^*(t) & \sum_n c_n(t) b_n^*(t) & \sum_n c_n(t) c_n^*(t) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

系统的场(原子)熵为

$$\begin{aligned} S_f(t) &= S_a(t) \\ &= -\text{Tr}_a[\rho_a(t) \ln \rho_a(t)] \\ &= -\sum_{j=1}^3 \lambda_j \ln \lambda_j, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\lambda_j (j=1, 2, 3)$ 为原子约化密度矩阵的本征值,

可通过求解方程

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (17)$$

得到.(17)式中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 由原子约化密度算符 ρ_a 的矩阵元确定

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\rho_{11} \rho_{22} \rho_{33} - \rho_{12} \rho_{23} \rho_{31} - \rho_{13} \rho_{32} \rho_{21} \\ &\quad + \rho_{11} \rho_{23} \rho_{32} + \rho_{22} \rho_{31} \rho_{13} + \rho_{33} \rho_{12} \rho_{21}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_{11} \rho_{22} + \rho_{22} \rho_{33} + \rho_{33} \rho_{11} \\ &\quad - \rho_{12} \rho_{21} - \rho_{23} \rho_{32} - \rho_{31} \rho_{13}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\alpha_2 = -\rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33}. \quad (20)$$

为了揭示系统场熵的时间演化特性,分别选取不同的 $\lambda = \Omega/g$ 值和 \bar{n} 值对(16)式作数值计算,得到如图 2 和图 3 所示的结果.

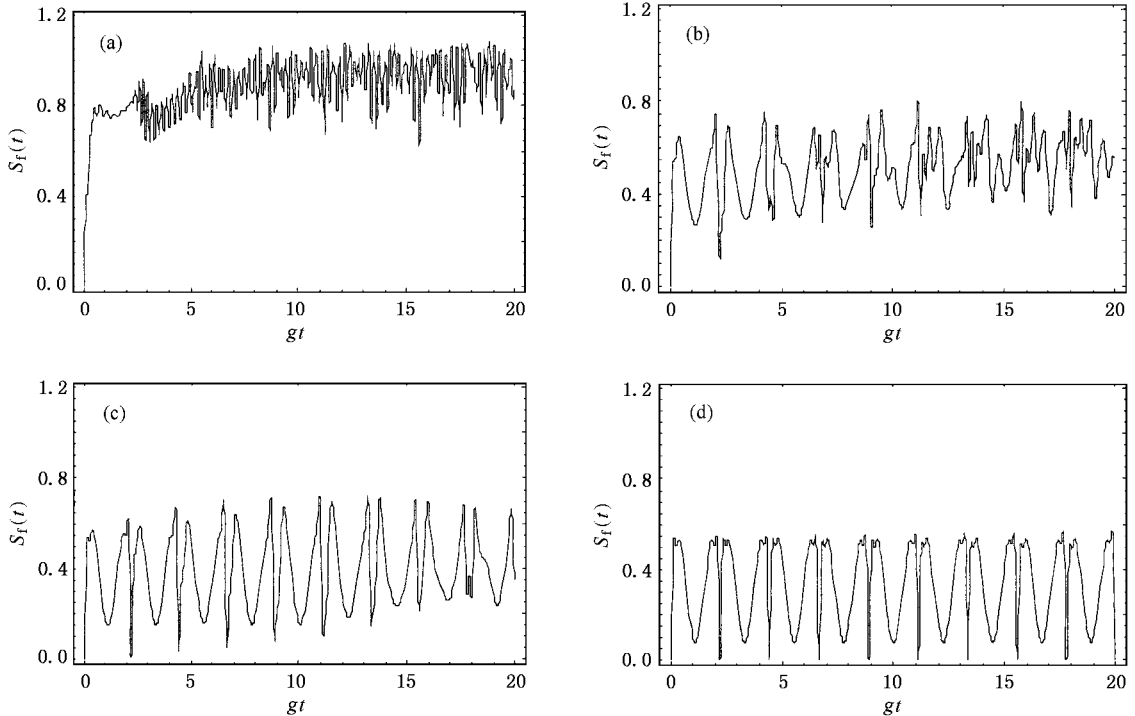


图 2 λ 不同时场熵的时间演化规律($\bar{n}=5$) (a) $\lambda=0.1$ (b) $\lambda=0.5$ (c) $\lambda=1.0$ (d) $\lambda=5.0$

图 2 给出了在初始光场平均光子数较小($\bar{n}=5$)的情况下, λ 不同时场熵的时间演化规律.可以看出,系统场熵的时间演化具有如下的特点:当 λ 值比较小时,场熵的时间演化行为与单光子 J-C 模型相似,随时间作不规则的振荡,如图 2(a)所示;随着 λ 值增大,场熵的时间演化逐渐显现出一定的周期性,如图 2(b)–(c)所示;当 λ 值足够大时,场熵的时间演化表现出类似于双光子 J-C 模型中场熵演化的周期性,如图 2(d)所示.系统场熵时间演化的上述特点可以这样理解:在光场-原子间相互作用强度 g 一定的情况下, λ 值比较小意味着光场频率

与原子本征跃迁频率之间单光子跃迁的失谐较小,原子与光场发生相互作用的过程中,由于占据主导地位的就是单光子跃迁,其场熵演化规律与单光子 J-C 模型相似,不具有周期性;而 λ 值足够大也就意味着光场频率与原子本征跃迁频率之间单光子跃迁的失谐很大,从而使得双光子跃迁占据主导地位,其场熵演化规律与双光子 J-C 模型相同,具有明显的周期性.

图 3 给出了比值 $\lambda = \Omega/g$ 较小($\lambda=0.1$)的情况下,初始光场平均光子数对场熵的时间演化规律

的影响. 图 3(a)–(c)表明, 随着初始光场平均光子数的增大, 场熵的演化逐渐显现出明显的周期性; 当 \bar{n} 值足够大即初始光场足够强时, 场熵的时间演化表现出完全类似于双光子 J-C 模型中场熵演化的周期性, 如图 3(d)所示. 系统场熵的时间演化的这

一特点可以这样理解: 即使在光场频率与原子本征跃迁频率之间单光子跃迁的失谐较小, 只要光场足够强, 在原子与光场发生相互作用的过程中, 双光子跃迁占据主导地位, 因而其场熵演化规律与双光子 J-C 模型相同, 具有明显的周期性.

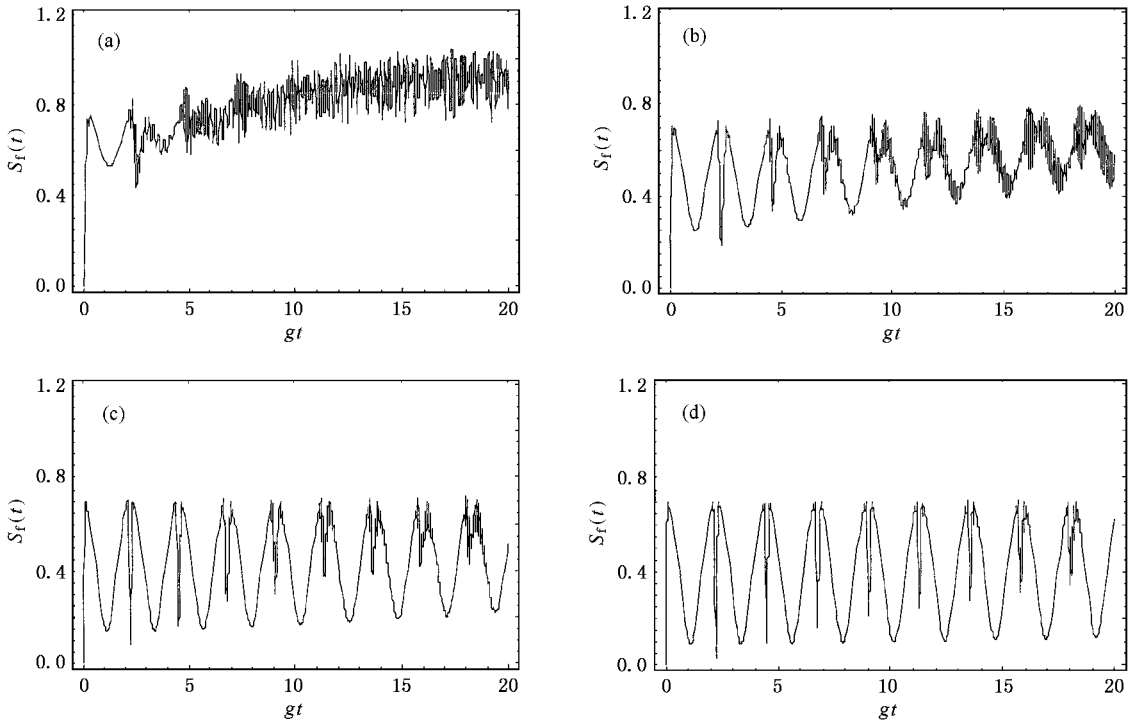


图 3 初始光场强度不同时场熵的时间演化规律 ($\lambda = 0.1$) (a) $\bar{n} = 10$ (b) $\bar{n} = 20$ (c) $\bar{n} = 30$ (d) $\bar{n} = 40$

4. 结 论

应用量子熵理论, 研究了光场与 V 型三能级原子依赖强度耦合系统的场熵演化规律. 数值计算结果显示, 光场与原子单光子跃迁失谐量和初始光场的强度对场熵的时间演化行为具有非常重要的影响. 当失谐量比较小且初始光场较弱时, 场熵随时

间做不规则的振荡, 其行为与单光子 J-C 模型相似, 表明在小失谐和弱光场情况下, 光场与原子的相互作用中占据主导地位的是单光子跃迁过程; 而当失谐量足够大或初始光场足够强时, 场熵的时间演化显现出明显的周期性, 其行为与双光子 J-C 模型相似, 表明在大失谐或强光场情况下, 光场与原子的相互作用中占据主导地位的是双光子跃迁过程.

- [1] Buck B, Sukumar C V 1981 *Phys. Lett. A* **81** 132
 [2] Sukumar C V, Buck B 1981 *Phys. Lett. A* **83** 211
 [3] Zhou P, Hu Z L, Peng J S 1992 *J. Mod. Opt.* **39** 49
 [4] Buzek V 1989 *J. Mod. Opt.* **36** 1151
 [5] Zhou P, Peng J S, Li G X 1993 *Acta Opt. Sin.* **13** 444 (in Chinese) [周 鹏, 彭金生, 李高翔 1993 光学学报 **13** 444]
 [6] Fang M F 1995 *Acta Opt. Sin.* **15** 296 (in Chinese) [方卯发 1995 光学学报 **15** 296]
 [7] Phoenix S J D, Knight P L 1988 *Ann. Phys.* **186** 381

- [8] Phoenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
 [9] Araki H, Lieb E 1970 *Commun. Math. Phys.* **18** 160
 [10] Fang M F, Zhou P 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 570 (in Chinese) [方卯发, 周 鹏 1994 物理学报 **43** 570]
 [11] Fang M F 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1776 (in Chinese) [方卯发 1994 物理学报 **43** 1776]
 [12] Fang M F, Zhou G H 1994 *Phys. Lett. A* **184** 397
 [13] Fang M F, Liu H E 1994 *Acta Opt. Sin.* **14** 475 (in Chinese) [方卯发, 刘惠恩 1994 光学学报 **14** 475]

- [14] Fang M F , Liu X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 435 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2000 物理学报 **49** 435]
- [15] Ao S M , Zhou S L , Zeng G J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 52 (in Chinese) [敖胜美、周石伦、曾高坚 2001 物理学报 **50** 52]
- [16] Huang C J , Zhou M , Li J F *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 805 (in Chinese) [黄春佳、周 明、厉江帆等 2002 物理学报 **51** 805]
- [17] Huang C J , He H Y , Li J F *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1049 (in Chinese) [黄春佳、贺慧勇、厉江帆等 2002 物理学报 **51** 1049]
- [18] Zhang L H , Li G X , Gan Z W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1168 (in Chinese) [张立辉、李高翔、甘仲惟 2003 物理学报 **52** 1168]

Evolution of the entropy of light field interacting with the V-type three-level atom via intensity-dependent coupling *

Huang Chun-Jia He Hui-Yong Kong Fan-Zhi Fang Jia-Yuan

(*Department of Physics and Electronic Science ,Changsha University of Science and Technology ,Changsha 410077 ,China*)

(Received 26 September 2003 ; revised manuscript received 24 December 2003)

Abstract

The evolution properties of the entropy of a single-mode light field interacting with the V-type three-level atom via intensity-dependent coupling have been studied. The discussion is centered on the influence of detuning and initial photon number on the field entropy evolution. The results show that the behavior of the field entropy is non-periodic for the cases of small detuning and weak initial light field ,being similar to the single-photon Jaynes-Cummings model (JCM). On the contrary ,the field entropy evolution is periodic for the cases of large detuning or strong initial light field ,being similar to the two-photon JCM.

Keywords : single-mode light field , V-type three-level atom , intensity-dependent coupling , field entropy evolution

PACC : 4250

* Project supported by the Science Foundation of Education Bureau of Hunan Province ,China (Grant No.03A003).