第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2644-10
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.8, August, 2004

无碰撞等离子体电流片中的低频波*

周国成　曹晋滨　王德驹　蔡春林

(中国科学院空间科学与应用研究中心,北京　100080)

(2003 年 9 月 9 日收到;2003 年 11 月 4 日收到修改稿)

采用两种无碰撞二维三分量不可压缩磁流体力学(MHD)模型,计入电子扰动压力张量效应,研究了电流片等离子体的色散性质和波. 由于得到的一般色散关系较为复杂,只解析讨论了电流片的中心区和电子 $\beta_e^* = 0$ 两种特殊情况. 主要结果如下:(1)在短波区($kd_i > 1$),存在快磁声-动理学 Alfven 波和斜 Alfven-哨声模,电子磁流体力学模型是足够精确的 MHD 模型;在长波区($kd_i < 1$),存在 Alfven 波和离子声波,理想的 MHD 模型是适用的. (2)电子 $\beta_e^* = 0$情况下的结果,显然遗漏了一些波模(如离子声波和快磁声-动理学 Alfven 波等),因此它并不完全适合电流片的一般情况. (3)在电流片中心区两种模型的结果中都有快磁声-动理学 Alfven 波.

关键词:电流片,磁流体力学,电子压力张量,色散关系

PACC: 5235B, 9430D, 9430E, 9530Q

1. 引　　言

近年来,在磁重联的理论、空间观测和数值模拟研究中,磁重联电流片内无碰撞等离子体效应(如 Hall 电流效应、电子压力张量效应和电子惯性效应)的研究是一个重要的焦点问题[1—18]. 这些无碰撞等离子体效应将在某些等离子体成分的特征空间尺度上破坏磁"冻结"条件,造成该等离子体成分不再与磁场"冻结"(或耦合)在一起,其动力学效应就不重要了,动力学过程将主要由继续保持"冻结"的其他等离子体成分和自洽磁场来决定. 同时,无碰撞等离子体效应也强烈地影响重联层内等离子体的色散性质,使得一些波模被抑制,而其他波模在磁重联物理过程中起着不同寻常的作用. 因此,研究无碰撞等离子体电流片的色散性质和波是很有意义的.

Drake[4] 最早研究了磁重联层内无碰撞等离子体的色散性质和波,他们采用等温可压缩磁流体力学(MHD)模型得到,广义 Ohm 定律中电子压力标量的平行梯度项可把动理学 Alfven 波引入系统. 同时,他们又由 Hall MHD 模型得到了哨声模波,认为哨声模波在磁重联过程中起主要作用. 他们的工作是开创性的,但缺乏系统和完整的研究.

Biskamp 等[7] 采用不可压缩的两流体(电子和离子流体)物理模型研究了一维平衡电流片的无碰撞磁重联问题,他们假定压力张量的散度近似为压力标量的梯度和一个黏性项之和. 结果表明:在长波区($kd_i < 1$,这里 k 是波数,d_i 是离子惯性长度),Alfven 波占优势,电子和离子都与磁场"冻结"在一起运动,MHD 描述是适用的;在短波区($kd_i > 1$),色散关系变为哨声模波关系,离子不再与磁场"冻结"因而不随电子和磁场运动,只形成电荷中性背景,动力学只由电子来确定. 由于对压力张量采用了黏性假定,等离子体 β 参数(热压力与磁压力之比)和压力张量的完整效应,未能进入色散关系.

Wang 等[12] 采用类似于 Biskamp 等[7] 的不可压缩的 MHD 物理模型,忽略离子的压力梯度效应,研究结果表明:在长波区($kd_i < 1$),色散关系变为 Alfven 波色散关系;在短波区($kd_i > 1$),色散关系变为斜传播的 Alfven-哨声模波,它的频率是在哨声频率范围,像哨声那样色散传播,但有较大的垂直波数. 然而,由于假定电子压力近似为标量,等离子体 β 参数和电子压力张量效应也未能进入色散关系.

本文采用两种类似于 Biskamp 等[7] 和 Wang 等[12] 无碰撞 MHD 模型研究了电流片的色散性质和波,与他们不同的是计入了电子扰动压力张量效应.

* 国家自然科学基金(批准号:40174042, 40074043)和国家杰出青年科学基金(批准号:40025413)资助的课题.

得到的一般色散关系较为复杂,本文只讨论了电流片的中心区和电子 $\beta_e^* = 0$ 两种特殊情况下的波模.结果表明 :在长波区或对流区($kd_i < 1$),除了 Alfven 波外,还有离子声波 ;在短波区($kd_i > 1$),除了斜 Alfven-哨声模波外,还有快磁声-动理学 Alfven 波.电子 $\beta_e^* = 0$ 情况下的结果与 Biskamp 等[7] 和 Wang 等[12] 的结果基本一致,说明他们的结果只适用于这种特殊情况.电流片中心区的结果中有快磁声-动理学 Alfven 波,与 Drake[4] 得到的动理学 Alfven 波相似,但又不完全相同.本文得到的一般色散关系的完整研究需通过数值计算得到,我们将在另文中讨论.

2. 物理模型 A :无碰撞磁流体力学

2.1. 主要考虑和假定

采用二维($\partial/\partial y = 0$)三分量 MHD 模型.平衡电流片磁场假定为如下形式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_0 &= B_{0x}(z)\boldsymbol{e}_x, \\ B_{0x}(z) &= B_0 \tanh(z/a), \end{aligned} \tag{1}$$

式中 B_0 为电流片边界处($z \to \pm a$)的渐进磁场强度,$\boldsymbol{e}_x$ 为 x 方向的单位矢量,a 为电流片的半厚度.在磁中性片($z = 0$)的两边,磁场方向相反.平衡等离子体压力假定为各向同性 $\boldsymbol{P}_0 = p_{e0}(z)\boldsymbol{I}$,忽略离子压力梯度效应.假定电流片区等离子体电导率很高,以至于(经典的和反常的)电阻都可以忽略不计,着重考虑无碰撞效应(即 Hall 效应、电子压力张量效应和电子惯性效应)的影响.考虑氢等离子体(电子和离子),并满足电中性条件,即电子和离子密度相等,$n_e = n_i = n_0$.电流片是处在高等离子体 β(等离子体热压力与磁压力之比)状态下($\beta > 1$).由于离子声速远大于 Alfven 速度,可假定离子动力学为不可压缩,$\nabla \cdot \boldsymbol{V}_i \approx \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$.考虑低频波扰动,所有扰动量都有如下形式:

$$\sim \exp\{(k_x x + k_z z - \omega t)\}, \tag{2}$$

其中波数满足条件:

$$\begin{aligned} &|k_x| < |k_z|, \\ &|k_z|^{-1} \ll a = [\partial B_{0x}/(B_0 \partial z)]^{-1}. \end{aligned}$$

2.2. 基本方程和色散关系

无量纲的含无碰撞效应(即 Hall 效应、电子压力张量效应和电子惯性效应)的不可压缩的 MHD 方程组由下列方程组成 :即动量方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \beta_e \nabla \cdot \boldsymbol{P}_e, \tag{3}$$

广义 Ohm 定律

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} = d_i(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \beta_e \nabla \cdot \boldsymbol{P}_e) + d_e^2 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}, \tag{4}$$

电子压力张量方程[19—22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{P}_e}{\partial t} = &- \boldsymbol{V}_e \cdot \nabla \boldsymbol{P}_e \cdot \boldsymbol{P}_e \cdot \nabla \boldsymbol{V}_e - (\boldsymbol{P}_e \cdot \nabla \boldsymbol{V}_e)^{\mathrm{T}} \\ &- \frac{d_i}{d_e^2}[\boldsymbol{P}_e \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{P}_e \times \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}], \end{aligned} \tag{5}$$

以及 Faraday 定律和 Ampere 定律

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = - \nabla \times \boldsymbol{E}, \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}, \tag{7}$$

离子和电子流速为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_i &\approx \boldsymbol{V}, \\ \boldsymbol{V}_e &\approx \boldsymbol{V} - d_i \boldsymbol{J}. \end{aligned} \tag{8}$$

在方程组(3)—(8)中,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{V}_i$,$\boldsymbol{V}_e$,$\boldsymbol{P}_e$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 分别为单流体流速、离子流速、电子流速、电子压力张量、磁场强度、电场强度和电流密度 ;$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示$(\cdot)$的转置张量 ;$d_{i,e} \equiv c/(a\omega_{pi,e})$为离子(i)和电子(e)的惯性长度 ;$\omega_{pi,e} \equiv \sqrt{e^2 n_0/(\varepsilon_0 m_{i,e})}$为离子(i)和电子(e)的等离子体频率 ;$c$ 为光速 ;$\beta_e \equiv \mu_0 P_{e0}/B_0^2$;$\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)$.同时,采用无量纲单位 :时间 $t_A = a/V_A$,长度尺度 a,Alfven 速度 $V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 m_i n_0}$,压力 $p_{e0} = n_0 T_e = \beta_e B_0^2/\mu_0$,磁场 B_0 ;也采用无量纲符号:$\boldsymbol{V}/V_A \to \boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{B}/B_0 \to \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{E}/(B_0 V_A) \to \boldsymbol{E}$,$\mu_0 a\boldsymbol{J}/B_0 \to \boldsymbol{J}$,$\boldsymbol{P}_e/p_{e0} \to \boldsymbol{P}_e$,$a\nabla \to \nabla = (\partial/\partial x, 0, \partial/\partial z)$,$a\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k} = (k_x, 0, k_z)$,和 $\omega t_A \to \omega$.

由方程(3),(4),(6)—(8)可得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \beta_e \nabla \cdot \boldsymbol{P}_e, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(1 - d_e^2 \nabla^2)\boldsymbol{B} = &\nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \\ &- d_i \nabla \times \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V} - d_i \nabla \times \boldsymbol{B}. \tag{11}$$

这样,方程(5),(9)—(11)便构成模型 A 的完整方程组.由该方程组出发,经线性理论分析(其细节列在附录 A 中),可得到色散关系(即(A22)式)

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ k^2 d_i \omega & k_x B_{0x} & 0 & \omega(1+k^2 d_e^2) \\ \left(k_x B_{0x} - \mathrm{i}\dfrac{k_x k_z}{k^2}\dfrac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right) & d_i\omega & \omega(1+k^2 d_e^2) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

式中 A, B, C, D, E, F, G, H 的定义列在(A19)和(A20)式后面.可见一般色散关系较为复杂,下面讨论两种特殊情况.

在电流片中心区($|z| \approx 0$),色散关系(12)式可简化为(即(A25)式)

$$\omega^2 = \beta_e k^2 \left(1 + \frac{k^2 d_i^2}{1 + k^2 d_e^2}\right). \tag{13}$$

它带量纲的形式为

$$\omega^2 = \beta_e k^2 V_A^2 \left(1 + \frac{k^2 d_i^2}{1 + k^2 d_e^2}\right) = k^2\left(V_s^2 + \frac{k^2 \rho_s^2}{1 + k^2 d_e^2} V_A^2\right), \tag{14}$$

式中 $V_s \equiv \sqrt{T_e/m_i} = \sqrt{\beta_e} V_A$ 为离子声速,$\rho_s = \sqrt{\beta_e} d_i$ 为等效离子回旋(或 Larmor)半径.当 $d_i < k^{-1} < a$ 时,(14)式变为离子声波色散关系:$\omega \approx kV_s$;在 $d_e \ll k^{-1} \ll d_i$ 范围内,(14)式变为快磁声-动理学 Alfven 波色散关系:$\omega \approx k^2 V_A \rho_s$;在 $k^{-1} \ll d_e$ 范围内,(14)式变为电子静电震荡关系:$\omega \approx k(T_e/m_e)^{1/2}$.

当 $\beta_e^* \equiv \beta_e p_{e0}(z) = 0$,或 $B_{0x}(z) = \tanh(z) = \sqrt{2\beta_e} = \mathrm{const}$ 时,色散关系(12)式简化为(即(A28)式)

$$\omega^2 = (k_x B_{0x})^2 \frac{[(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/2] \pm k d_i \sqrt{(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/4}}{(1 + k^2 d_e^2)^2}. \tag{15}$$

其带量纲的形式为

$$\omega^2 = (k_x V_A^*)^2 \frac{[(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/2] \pm k d_i \sqrt{(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/4}}{(1 + k^2 d_e^2)^2}, \tag{16}$$

式中

$$V_A^*(z) \equiv B_{0x}(z/a)/\sqrt{\mu_0 m_i n} = V_A \tanh(z/a) = V_A\sqrt{2\beta_e},$$

$$V_A \equiv B_0/\sqrt{\mu_0 m_i n_0}$$

分别为局域磁场 B_{0x} 和渐进磁场 B_0 定义的 Alfven 速度,而 $V_A^*(a) \approx V_A$,$k_{/\!/} = k_x$.在 $d_i < k^{-1} < a$ 范围内,(16)式变为 Alfven 波的色散关系:$\omega \approx k_{/\!/} V_A^*$;在 $d_e \ll k^{-1} \ll d_i$ 范围内,(16)式变为斜 Alfven-哨声模波色散关系:$\omega \approx k_x k V_A^* d_i = k_x k d_i^2 \Omega_i^* = k_x k d_e^2 \Omega_e^*$;在 $k^{-1} \ll d_e$ 范围内,(16)式变为电子回旋波色散关系:

$$\omega \approx k_{/\!/} V_A^* d_i/(k d_e^2) = k_{/\!/}\Omega_e^*/k.$$

这里 $\Omega_{i,e}^* \equiv eB_{0x}/m_{i,e}$ 为回旋频率.需要说明,这里和下面采用的 β_e^* 和 β_e 是不同的,因为 $\beta_e \equiv \mu_0 p_{e0}/B_0^2 = \mu_0 p_{e0}(0)/B_0^2$,而 $\beta_e^* \equiv \beta_e p_{e0}(z) = \beta_e - \tanh^2(z)/2$,或者 $\beta_e^* \equiv \mu_0 p_{e0}(z/a)/B_0^2$.因此,当 $\beta_e^* = 0$ 时,$\beta_e = \tanh^2(z)/2$ 即它代表在电流片边界附近区域.

3. 物理模型 B:电子磁流体力学模型

3.1. 主要考虑和假定

与物理模型 A 不同的是:只考虑小于离子惯性长度(d_i)的长度尺度情况.在该尺度上,离子不再被磁场"冻结",离子动力学可以忽略,离子只是形成电荷中性背景;而电子仍然与磁场"冻结"在一起,动力学由电子流速 $\boldsymbol{V}_e = -\boldsymbol{J}/en_e$ 和自洽磁场决定,即所谓电子磁流体力学(EMHD)模型[7,23,24].

3.2. 基本方程和色散关系

无量纲的不可压缩的 EMHD 方程组包括:电子运动方程

$$\frac{d_e^2}{d_i}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_e}{\mathrm{d}t} = -\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{d_i}\boldsymbol{V}_e \times \boldsymbol{B}\right) - \beta_e \nabla \cdot \boldsymbol{P}_e, \tag{17}$$

电子流速和 Ampere 定律

$$\boldsymbol{V}_e = -d_i\boldsymbol{J} = -d_i\nabla\times\boldsymbol{B}, \tag{18}$$

以及电子压力张量方程[19—22]

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}_e}{\partial t} = -\frac{1}{d_i}[\boldsymbol{V}_e\cdot\nabla\boldsymbol{P}_e + \boldsymbol{P}_e\cdot\nabla\boldsymbol{V}_e + (\boldsymbol{P}_e\cdot\nabla\boldsymbol{V}_e)^{\mathrm{T}}] - \frac{1}{d_e^2}[\boldsymbol{P}_e\times\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{P}_e\times\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}], \tag{19}$$

再加上 Faraday 定律(6)式构成闭合的方程组.在方程(17)—(19)中各符号定义和无量纲单位(除时间单位外)与模型 A 相同.在模型 A 中采用 Alfven 时间 $t_A = a/V_A$ 为时间单位,而在模型 B 中则采用所谓哨声时间 $t_w = at_A/d_i = a^2/(d_iV_A)$为时间单位.由(6)和(17)—(19)式,不难得到磁场 $\boldsymbol{B}$ 和电子压力张量 $\boldsymbol{P}_e$ 的方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(1-d_e^2\nabla^2)\boldsymbol{B}\\&= -\nabla\times[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}] + d_id_e^2\nabla\\&\quad\times[((\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla)(\nabla\times\boldsymbol{B})]\\&\quad+\beta_e\nabla\times(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{P}_e}{\partial t} &= (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\boldsymbol{P}_e + \boldsymbol{P}_e\cdot\nabla(\nabla\times\boldsymbol{B})\\&\quad+[\boldsymbol{P}_e\cdot\nabla(\nabla\times\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}\\&\quad-\frac{1}{d_e^2}[\boldsymbol{P}_e\times\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{P}_e\times\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}].\end{aligned} \tag{21}$$

于是,方程(20)和(21)是模型 B 的完整方程组.由该方程组出发,经线性理论分析(其细节列在附录 B 中),可得到色散关系(即(B10)式)

$$\begin{aligned}&(B_{0x}k_x)^2k^2\left[1-\frac{\beta_e p_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\right.\\&\left.\times\left(k^2-2\frac{B_{0x}^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]\\&\times\left[1-\frac{\beta_e p_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}(k_z^2-k_x^2)\right]\\&-\left[\omega(1+k^2d_e^2)-\frac{\beta_e p_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\right.\\&\left.\times\left(k^4-4\frac{B_{0x}^2k_x^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]\\&\times\left[\omega(1+k^2d_e^2)-\frac{\beta_e p_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\right.\\&\left.\times\left(k^4-\frac{k^2k_z^2B_{0x}^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right] = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

可见一般色散关系也较为复杂,下面也讨论两种特殊情况.

在电流片中心区($|z|\approx 0$),色散关系(22)式可简化为(即(B11)式)

$$\omega^2 = \frac{\beta_e k^4}{(1+k^2d_e^2)}. \tag{23}$$

其带量纲的形式为

$$\omega^2 = \frac{k^4V_A^2\rho_s^2}{(1+k^2d_e^2)}. \tag{24}$$

在 $d_e \ll k^{-1} \ll d_i$ 范围内,它变为快磁声-动理学 Alfven 波色散关系:$\omega\approx k^2V_A\rho_s$;在 $k^{-1}\ll d_e$ 范围内,它变为电子静电振荡关系:$\omega\approx k(T_e/m_e)^{1/2}$.

当 $\beta_e^* \equiv \beta_e p_{e0}(z) = 0$,或 $B_{0x}(z) = \tanh(z) = \sqrt{2\beta_e} = \mathrm{const}$ 时,色散关系(22)式可简化为(即(B12)式)

$$\omega^2 = \frac{B_{0x}^2k_x^2k^2}{(1+k^2d_e^2)^2}. \tag{25}$$

其带量纲的形式为

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{B_{0x}^2k_x^2k^2d_i^2V_A^2}{(1+k^2d_e^2)^2}\\&= k_{/\!/}^2 V_A^{*2}\frac{k^2d_i^2}{(1+k^2d_e^2)^2}.\end{aligned} \tag{26}$$

式中 $V_A^*(z)\equiv B_{0x}(z/a)/\sqrt{\mu_0m_in_0} = V_A\tanh(z/a) = V_A\sqrt{2\beta_e}$ 和 $V_A\equiv B_0/\sqrt{\mu_0m_in_0}$ 分别是由局域磁场 B_{0x} 和渐进磁场 B_0 定义的 Alfven 速度,$k_{/\!/} = k_x$.显然,在 $kd_e<1<kd_i$ 范围内,它变为斜 Alfven-哨声模色散关系:$\omega\approx k_{/\!/}kV_A^*d_i = k_{/\!/}kd_i^2\Omega_i^* = k_{/\!/}kd_e^2\Omega_e^*$;在 $kd_e\gg1$ 范围内,它变为电子回旋波色散关系:$\omega\approx k_{/\!/}\Omega_e^*/k$.

4. 比较和讨论

我们得到的一般色散关系是较为复杂的,本文只讨论了电流片的中心区($|z|\approx0$)和电子 $\beta_e^*=0$ 两种特殊情况.表 1 列出了上述两种物理模型的结果.可以看出:(1)在两种特定情况下,在短波区($kd_i>1$),模型 A 和模型 B 的结果是一致的,表明 EMHD 模型是足够精确的 MHD 模型;只在长波区($kd_i<1$),需要用到模型 A;在 $kd_e>1$ 范围,虽然形式上列出了色散关系,但严格而言两种 MHD 模型都不适用了,应当用等离子体动理学理论来研究.(2)电子 $\beta_e^*=0$ 情况下的结果显然遗漏了一些波模(如离子声波和快磁声-动理学 Alfven 波等),因此它不完全适合电流片的一般情况.

表 1 电流片中的低频等离子体波

特定情况		$d_i \ll k^{-1}$	$d_e \ll k^{-1} \ll d_i$	$k^{-1} \ll d_e$
模型A	中心区($\|z\| \approx 0$) $\omega^2 = \beta_e k^2 V_A^2 \left(1 + \frac{k^2 d_i^2}{1 + k^2 d_e^2}\right)$	$\omega \approx kV_s$(离子声波)	$\omega \approx k^2 V_A \rho_s$(快磁声-动理学 Alfven 波)	$\omega \approx kV_A \rho_s / d_e = k(T_e/m_e)^{1/2}$(电子静电震荡)
	在 $\beta_e^* = 0$ 情况下 $\omega^2 = (k_{/\!/} V_A^*)^2 \left\{ \frac{[(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/2]}{(1 + k^2 d_e^2)^2} \pm \frac{kd_i \sqrt{(1 + k^2 d_e^2) + k^2 d_i^2/4}}{(1 + k^2 d_e^2)^2} \right\}$	$\omega \approx k_{/\!/} V_A^*$ (Alfven 波)	$\omega \approx k_{/\!/} kV_A^* d_i = k_{/\!/} kd_e^2 \Omega_e^*$(斜 Alfven-哨声模)	$\omega \approx k_{/\!/} \Omega_e^* / k$(电子回旋波)
模型B	中心区($\|z\| \approx 0$) $\omega^2 = \frac{k^4 V_A^2 \rho_s^2}{(1 + k^2 d_e^2)}$		$\omega \approx k^2 V_A \rho_s$(快磁声-动理学 Alfven 波)	$\omega \approx kV_A \rho_s / d_e = k(T_e/m_e)^{1/2}$(电子静电震荡)
	在 $\beta_e^* = 0$ 情况下 $\omega^2 = k_{/\!/}^2 V_A^{*2} \frac{k^2 d_i^2}{(1 + k^2 d_e^2)^2}$		$\omega \approx k_{/\!/} kV_A^* d_i = k_{/\!/} kd_e^2 \Omega_e^*$(斜 Alfven-哨声模)	$\omega \approx k_{/\!/} \Omega_e^* / k$(电子回旋波)

表 2 其他研究者[4,7,12]的结果

研究者	$d_i \ll k^{-1}$	$d_e \ll k^{-1} \ll d_i$	$k^{-1} \ll d_e$
Drake(1995)[4]		$\omega^2 = k_{/\!/}^2 V_A^2 (1 + k_\perp^2 \rho_s^2)$(动理学 Alfven 波) $\omega = k_{/\!/} kd_e^2 \Omega_e$(斜 Alfven-哨声模)	
Biskamp 等(1997)[7] $\omega^2 = k_{/\!/}^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{(1 + k^2 d_e^2)^2}$	$\omega \approx k_{/\!/} V_A$(Alfven 波)	$\omega \approx k_{/\!/} kd_e^2 \Omega_e$(斜 Alfven-哨声模)	$\omega \approx k_{/\!/} \Omega_e / k$(电子回旋波)
Wang 等(2000)[12] $\omega^2 = (k_{/\!/} V_A)^2 \left\{ \frac{(1 + k^2 d_i^2/2)}{(1 + k^2 d_e^2)^2} \pm \frac{kd_i \sqrt{1 + k^2 d_i^2/4}}{(1 + k^2 d_e^2)^2} \right\}$	$\omega \approx k_{/\!/} V_A$(Alfven 波)	$\omega \approx k_{/\!/} kV_A d_i = k_{/\!/} kd_i^2 \Omega_i = k_{/\!/} kd_e^2 \Omega_e$(斜 Alfven-哨声模)	

注:所有公式符号均按本文定义改写.

与其他研究者[4,7,12]的结果(表 2)比较表明:(1)模型 A 和模型 B 中电子 $\beta_e^* = 0$ 情况下的结果与 Biskamp 等[7]和 Wang 等[12]的结果基本一致,说明他们的结果只适用于这种特殊情况,但并不完全适合电流片的一般情况.此外,虽然色散关系形式相同,但我们的结果是对应于局地磁场 $B_{0x}(z/a) = \sqrt{2\beta_e} = \mathrm{const}$,而他们的结果则对应于渐进磁场 B_0.(2)模型 A 和模型 B 中电流片中心区的结果中有快磁声-动理学 Alfven 波,与 Drake[4]结果中的动理学 Alfven 波相似,但又不完全相同. Biskamp 等[7]和 Wang

等[12]的结果中没有动理学 Alfven 波.

5. 结　　论

本文采用两种无碰撞二维三分量不可压缩磁流体力学模型，计入了电子扰动压力张量效应，研究了电流片等离子体的色散性质和波.得到的一般色散关系是较为复杂的，本文只解析讨论了电流片的中心区($|z|\approx 0$)和电子 $\beta_e^*=0$ 两种特殊情况，并与其他研究者[4,7,12]的结果做了比较.主要结论如下：

(1)在短波区($kd_i>1$)，模型 A 和模型 B 的结果是一致的，表明 EMHD 模型是足够精确的 MHD 模型；只在长波区($kd_i<1$)，需要用到模型 A；在 $kd_e>1$ 范围，严格而言应当用等离子体动理学理论来研究.

(2)电子 $\beta_e^*=0$ 情况下的结果显然遗漏了一些波模，如离子声波和快磁声-动理学 Alfven 波等，因此它并不完全适合电流片的一般情况.

(3)模型 A 和模型 B 中电子 $\beta_e^*=0$ 情况下的结果与 Biskamp 等[7]和 Wang 等[12]的结果基本一致，说明他们的结果只适用于这种特殊情况.

(4)模型 A 和模型 B 中电流片中心区的结果中有快磁声-动理学 Alfven 波，与 Drake[4]得到的动理学 Alfven 波相似，但又不完全相同. Biskamp 等[7]和 Wang 等[12]的结果中没有动理学 Alfven 波.

本文得到的一般情况下的色散关系较为复杂，但具有普遍意义，完整的研究需要数值求解，我们将在另文中讨论.

附录 A　模型 A 色散关系的推导

为使方程组(9)—(11)和(5)线性化，引入

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u},\\ &\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{b},\\ &\boldsymbol{P}_e=\boldsymbol{P}_{e0}+\boldsymbol{p}=p_{e0}(z)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{p},\end{aligned}\tag{A1}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别为扰动速度、扰动磁场和扰动压力张量.于是得到零级方程

$$(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0-\beta_e\nabla\cdot\boldsymbol{P}_{e0}=0,\tag{A2}$$

即有平衡方程

$$p_{e0}(z)+\frac{B_{0x}^2(z)}{2\beta_e}=p_{e0}(0)=1.\tag{A3}$$

扰动量的线性方程组为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=&(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{b}+(\nabla\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{B}_0\\&-\beta_e\nabla\cdot\boldsymbol{p},\end{aligned}\tag{A4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-d_e^2\nabla^2)\boldsymbol{b}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}_0)-d_i\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right),\tag{A5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial t}=&-(\boldsymbol{u}-d_i\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\nabla\boldsymbol{P}_{e0}\\&-\boldsymbol{P}_{e0}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}-d_i\nabla\times\boldsymbol{b})\\&-[\boldsymbol{P}_{e0}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}-d_i\nabla\times\boldsymbol{b})]^{\mathrm{T}}\\&-\frac{d_i}{d_e^2}[\boldsymbol{P}_{e0}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}_0\\&+(\boldsymbol{P}_{e0}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}_0)^{\mathrm{T}}].\end{aligned}\tag{A6}$$

再设

$$\boldsymbol{b}=\nabla\Psi\times\boldsymbol{e}_y+b_y(x,z,t)\boldsymbol{e}_y,\tag{A7}$$

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi\times\boldsymbol{e}_y+u_y(x,z,t)\boldsymbol{e}_y,\tag{A8}$$

并对扰动量前的算符做变换

$$\begin{aligned}&\partial/\partial t\to-\mathrm{i}\omega,\\&\nabla\to\mathrm{i}(k_x,0,k_z),\\&\nabla^2\to-k^2=-(k_x^2+k_z^2).\end{aligned}$$

方程(A4)—(A6)可变为扰动变量 Ψ，b_y，ϕ，u_y 的线性方程组

$$\mathrm{i}k_x\left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right)\Psi+k_z\omega\phi=\mathrm{i}\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_x,\tag{A9}$$

$$k_xB_{0x}b_y+\omega u_y=\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_y,\tag{A10}$$

$$\left[\mathrm{i}k_z\left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right)-k^2B_{0x}\right]\Psi-k_x\omega\phi=\mathrm{i}\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_z,\tag{A11}$$

$$\omega(1+k^2d_e^2)b_y+k_xB_{0x}u_y+k^2d_i\omega\phi=0,\tag{A12}$$

$$\omega(1+k^2d_e^2)\Psi+\left(k_xB_{0x}-\mathrm{i}\frac{k_xk_z}{k^2}\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right)\phi+d_i\omega u_y=0,\tag{A13}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_x=&-\frac{1}{\omega}\left\{\beta_ep_{e0}(z)k_xk_z\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\right.\\&\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}(u_y-k^2d_i\Psi)\\&+\left(-k_x^2\left(\mathrm{i}\beta_e\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}+2k_z\beta_ep_{e0}(z)\right)\right.\\&+\beta_ep_{e0}(z)k_z(k_x^2-k_z^2)\\&\left.\left.\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right)(\phi-d_ib_y)\right\},\end{aligned}\tag{A14}$$

$$\begin{aligned}\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_y=&\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega}\left\{\left(k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}+k_z^2\right)\right.\\&\times(u_y-k^2d_i\Psi)+k_x(k_x^2-k_z^2)\\&\left.\times\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}(\phi-d_ib_y)\right\},\end{aligned}\tag{A15}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\beta_e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})_z=&-\frac{1}{\omega}\left\{\beta_ep_{e0}(z)\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\right.\\&\times\left(k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}+2k_z^2\right)\\&\times(u_y-k^2d_i\Psi)+\left(-k_xk_z\left(-\mathrm{i}\beta_e\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}\right.\right.\\&\left.+2\beta_ep_{e0}(z)k_z\right)+\beta_ep_{e0}(z)k_x(k_x^2-k_z^2)\\&\left.\left.\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right)(\phi-d_ib_y)\right\}.\end{aligned}\tag{A16}$$

将(A14)和(A16)式分别代入(A9)和(A11)式不难得到

$$\left\{\omega^2-\beta_e p_{e0}(z)\left(\frac{k_x^2}{k_z}\frac{\mathrm{i}}{p_{e0}(z)}\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}+2k_x^2-(k_x^2-k_z^2)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right)\right\}\phi$$
$$+\beta_e p_{e0}(z)k_x\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}u_y$$
$$+\left\{\mathrm{i}\omega\frac{k_x}{k_z}\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}-d_i\beta_e p_{e0}(z)k_xk^2\times\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}\Psi$$
$$+d_i\beta_e p_{e0}(z)\left\{\frac{k_x^2}{k_z}\frac{\mathrm{i}}{p_{e0}(z)}\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}+2k_x^2-(k_x^2-k_z^2)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}b_y=0, \tag{A17}$$

$$k_x\left\{\omega^2+\beta_e p_{e0}(z)\left(k_z\frac{\mathrm{i}}{p_{e0}(z)}\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}-2k_z^2-(k_x^2-k_z^2)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right)\right\}\phi$$
$$-\beta_e p_{e0}(z)\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left\{2k_z^2+k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}u_y$$
$$+\left\{\omega\left(k^2B_{0x}-\mathrm{i}k_z\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right)+d_i\beta_e p_{e0}(z)k^2\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\times\left\{2k_z^2+k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}\right\}\Psi$$
$$-d_i\beta_e p_{e0}(z)k_x\left\{k_z\frac{\mathrm{i}}{p_{e0}(z)}\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}-2k_z^2-(k_x^2-k_z^2)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}b_y=0. \tag{A18}$$

用 k_z^2 乘以(A17)式、用 k_x 乘以(A18)式,并将两式相加可得

$$A\phi+Bu_y+C\Psi+Db_y=0, \tag{A19}$$

其中

$$A\equiv\left\{k^2\omega^2-\beta_e p_{e0}(z)\left(4k_x^2k_z^2+(k_x^2-k_z^2)^2\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right)\right\},$$

$$B\equiv-\beta_e p_{e0}(z)k_x\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left\{2k_z^2+(k_x^2-k_z^2)\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\},$$

$$C\equiv\left\{\omega(k^2k_xB_{0x})+d_i\beta_e p_{e0}(z)k_xk^2\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\times\left\{2k_z^2+(k_x^2-k_z^2)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}\right\},$$

$$D\equiv d_i\beta_e p_{e0}(z)\left\{4k_x^2k_z^2+(k_x^2-k_z^2)^2\times\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}.$$

同样,将(A15)式代入(A10)式可得

$$E\phi+Fu_y+G\Psi+Hb_y=0, \tag{A20}$$

其中

$$E\equiv-\beta_e p_{e0}(z)k_x(k_x^2-k_z^2)\times\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1},$$

$$F\equiv\left(\omega^2-\beta_e p_{e0}(z)\left\{k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}+k_z^2\right\}\right),$$

$$G\equiv d_i\beta_e p_{e0}(z)k^2\left\{k_x^2\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}+k_z^2\right\},$$

$$H\equiv k_x\left\{\omega B_{0x}+d_i\beta_e p_{e0}(z)(k_x^2-k_z^2)\times\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)\left[1-\left(\frac{d_iB_{0x}}{d_e^2\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}.$$

于是,(A19),(A20),(A12)和(A13)式是扰动变量 ϕ,u_y,Ψ,b_y 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D\\ E & F & G & H\\ k^2d_i\omega & k_xB_{0x} & 0 & \omega(1+k^2d_e^2)\\ \left(k_xB_{0x}-\mathrm{i}\frac{k_xk_z}{k^2}\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right) & d_i\omega & \omega(1+k^2d_e^2) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ u_y\\ \Psi\\ b_y\end{pmatrix}=0, \tag{A21}$$

因而色散关系为

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D\\ E & F & G & H\\ k^2d_i\omega & k_xB_{0x} & 0 & \omega(1+k^2d_e^2)\\ \left(k_xB_{0x}-\mathrm{i}\frac{k_xk_z}{k^2}\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right) & d_i\omega & \omega(1+k^2d_e^2) & 0\end{vmatrix}=0. \tag{A22}$$

可见,色散关系一般是较为复杂的.下面讨论两种特殊情况.

在电流片中心区($|z|\approx0$),我们有

$$B_{0x}\approx0,$$
$$\partial B_{0x}/\partial z\approx1,$$
$$p_{e0}(0)\approx1,$$
$$A=k^2\omega^2-\beta_ek^4,$$
$$B=0,$$
$$C=0,$$
$$D=k^4d_i\beta_e,$$
$$E=0,$$
$$F\equiv\omega^2-\beta_ek^2,$$
$$G\equiv d_i\beta_ek^4,$$
$$H=0.$$

色散关系(A22)式简化为

$$\begin{vmatrix} (\omega^2-k^2\beta_e) & 0 & 0 & \beta_ed_ik^2\\ 0 & (\omega^2-k^2\beta_e) & \beta_ed_ik^4 & 0\\ k^2d_i & 0 & 0 & (1+k^2d_e^2)\\ -\mathrm{i}k_xk_z/k^2 & d_i & (1+k^2d_e^2) & 0\end{vmatrix}=0, \tag{A23}$$

即有

$$(1+k^2d_e^2)^2(\omega^2-k^2\beta_e)^2-2\beta_e d_i^2k^4\times(1+k^2d_e^2)(\omega^2-k^2\beta_e)+(\beta_e d_i^2k^4)^2=0. \tag{A24}$$

于是可得

$$\omega^2=\beta_e k^2\left(1+\frac{k^2d_i^2}{1+k^2d_e^2}\right). \tag{A25}$$

当 $\beta_e^*\equiv\beta_e p_{e0}(z)=\mu_0 p_{e0}(z)/B_0^2=0$ 或 $B_{0x}(z)=\tanh(z)=\sqrt{2\beta_e}=\mathrm{const}$ 时,我们有

$$\begin{aligned}\partial B_{0x}/\partial z&=0,\\ A&=k^2\omega^2,\\ B&=0,\\ C&=\omega k^2k_xB_{0x},\\ D&=0,\\ E&=0,\\ F&=\omega^2,\\ G&=0,\\ H&\equiv k_x\omega B_{0x}.\end{aligned}$$

色散关系(A22)式简化为

$$\begin{vmatrix}\omega & 0 & k_xB_{0x} & 0\\ 0 & \omega & 0 & k_xB_{0x}\\ k^2d_i\omega & k_xB_{0x} & 0 & \omega(1+k^2d_e^2)\\ k_xB_{0x} & d_i\omega & \omega(1+k^2d_e^2) & 0\end{vmatrix}=0, \tag{A26}$$

即有

$$(1+k^2d_e^2)^2\omega^4-(k_xB_{0x})^2\times(2+2k^2d_e^2+k^2d_i^2)\omega^2+(k_xB_{0x})^4=0. \tag{A27}$$

于是可得

$$\omega^2=\frac{(k_xB_{0x})^2}{(1+k^2d_e^2)^2}\{(1+k^2d_e^2+k^2d_i^2/2)\pm kd_i\sqrt{1+k^2d_e^2+k^2d_i^2/4}\}. \tag{A28}$$

附录 B 模型 B 色散关系的推导

对方程(20)进行类似于附录 A 中的线性化和算符变换后可得到扰动量的线性方程组

$$\omega(1+k^2d_e^2)k_z\Psi=\left[-\mathrm{i}\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}+B_{0x}k_z-d_id_e^2\times\left(k_z\frac{\partial^2B_{0x}}{\partial z^2}-\mathrm{i}\frac{\partial^3B_{0x}}{\partial z^3}\right)\right]k_xb_y+\beta_e[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_x, \tag{B1}$$

$$\omega(1+k^2d_e^2)b_y=k_x\left(B_{0x}k^2+\frac{\partial^2B_{0x}}{\partial z^2}\right)\Psi-\mathrm{i}\beta_e[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_y, \tag{B2}$$

$$\omega(1+k^2d_e^2)k_x\Psi=\left(B_{0x}-d_id_e^2\frac{\partial^2B_{0x}}{\partial z^2}\right)k_x^2b_y-\beta_e[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_z, \tag{B3}$$

再对方程(20)也进行类似的处理后可得

$$p_{xx}=\frac{k_x}{\omega}\left(-\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}+2\mathrm{i}p_{e0}(z)k_z\right)b_y,$$

$$p_{yy}=\frac{1}{\omega}\left(-k_x\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}b_y+2\mathrm{i}\frac{B_{0x}p_{e0}(z)}{\omega d_e^2}k_zk^2\Psi\right),$$

$$p_{zz}=\frac{1}{\omega}\left[-k_x\left(\frac{\partial p_{e0}(z)}{\partial z}+2\mathrm{i}p_{e0}(z)k_z\right)b_y-2\mathrm{i}\frac{B_{0x}p_{e0}(z)}{\omega d_e^2}k_zk^2\Psi\right],$$

$$p_{xy}=\frac{-\omega p_{e0}(z)k_xk^2\Psi+B_{0x}p_{e0}(z)d_e^{-2}(k_z^2-k_x^2)b_y}{(\omega^2-B_{0x}d_e^{-4})}=p_{yx},$$

$$p_{xz}=\frac{\mathrm{i}\omega p_{e0}(z)}{(\omega^2-B_{0x}d_e^{-4})}\left[(k_z^2-k_x^2)b_y-\frac{B_{0x}}{\omega d_e^2}k_xk^2\Psi\right]=p_{zx},$$

$$p_{yz}=-\frac{p_{e0}(z)}{\omega}k_zk^2\Psi=p_{zy}.$$

这样便有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_x&=-k_z(k_xp_{xy}+k_zp_{zy})\\&=\frac{p_{e0}(z)k_z}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left[k^2\left(k_x^2+k_z^2\left(1-\frac{B_{0x}^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right)\Psi-\frac{B_{0x}k_x}{\omega d_e^2}(k_z^2-k_x^2)b_y\right],\end{aligned} \tag{B4}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_y&=k_z(k_xp_{xx}+k_zp_{zx})-k_x(k_xp_{xz}+k_zp_{zz})\\&=\frac{\mathrm{i}p_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left[\left(k^4-4\frac{B_{0x}^2k_x^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)b_y-\frac{B_{0x}k_x}{\omega d_e^2}k^2\left(k^2-2\frac{B_{0x}^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\Psi\right],\end{aligned} \tag{B5}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_z&=k_x(k_xp_{xy}+k_zp_{zy})\\&=-\frac{k_x}{k_z}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_x.\end{aligned} \tag{B6}$$

由(B1),(B3)和(B6)式可得

$$\omega(1+k^2d_e^2)\Psi=\left(B_{0x}-d_id_e^2\frac{\partial^2B_{0x}}{\partial z^2}\right)k_xb_y+\frac{\beta_e}{k_z}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})]_x. \tag{B7}$$

于是由(B4),(B5),(B2)和(B7)式并忽略含 $\partial^2B_{0x}/\partial z^2$ 项后可得 Ψ 和 b_y 的线性方程组

$$B_{0x}k_xk^2\left[1-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left(k^2-2\frac{B_{0x}^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]\Psi-\left[\omega(1+k^2d_e^2)-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left(k^4-4\frac{B_{0x}^2k_x^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]b_y=0, \tag{B8}$$

$$\left[\omega(1+k^2d_e^2)-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}k^2\left(k_x^2+k_z^2\left(1-\frac{B_{0x}^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right)\right]\Psi-B_{0x}k_x\left[1-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}(k_z^2-k_x^2)\right]b_y=0. \tag{B9}$$

色散方程为

$$(B_{0x}k_x)^2k^2\left[1-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left(k^2-2\frac{B_{0x}^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]\times\left[1-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega^2d_e^2(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}(k_z^2-k_x^2)\right]-\left[\omega(1+k^2d_e^2)-\frac{\beta_ep_{e0}(z)}{\omega(1-B_{0x}^2/\omega^2d_e^4)}\left(k^4-4\frac{B_{0x}^2k_x^2k_z^2}{\omega^2d_e^4}\right)\right]$$

$$\times \left[\omega(1 + k^2 d_e^2) - \frac{\beta_e p_{e0}(z)}{\omega(1 - B_{0x}^2/\omega^2 d_e^4)} \left(k^4 - \frac{k^2 k_z^2 B_{0x}^2}{\omega^2 d_e^4} \right) \right] = 0. \tag{B10}$$

可见,一般情况下色散关系(B10)式也是比较复杂的.下面讨论两种特殊情况.

在电流片中心区($|z| \approx 0$),$B_{0x} \approx 0$,$p_{e0}(0) \approx 1$,色散方程(B10)简化为

$$\omega^2 = \frac{\beta_e k^4}{(1 + k^2 d_e^2)}. \tag{B11}$$

当 $\beta_e^* \equiv \beta_e p_{e0}(z) = 0$ 或 $B_{0x} = \tanh(z/a) = \sqrt{2\beta_e} = \mathrm{const}$ 时,色散方程(B10)简化为

$$\omega^2 = \frac{B_{0x}^2 k_x^2 k^2}{(1 + k^2 d_e^2)^2}. \tag{B12}$$

[1] Drake J F, Lee Y C 1977 *Phys. Fluids* **20** 134
[2] Drake J F, Kleva R G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1468
[3] Drake J F, Kleva R G, Mandt M E 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 1251
[4] Drake J F 1995 *Physics of the Magnetopayse* Song P, Sonnerup B U O, Thomsen M F ed (Washington: American Geophysical Union) p155
[5] Drake J F, Biskamp D, Zeiler A 1997 *Geophys. Res. Lett.* **24** 2921
[6] Biskamp D 1997 *Advanced Topics on Astrophysical and Space Plasmas* Pino E M de G D, Peratt A L, Tanco G A M *et al* ed (Belgium: Kluwer Academic Publishers) p165
[7] Biskamp D, Schwarz E, Drake J F 1997 *Phys. Plasmas* **4** 1002
[8] Ma Z W, Bhattacharjee A 1996 *Geophys. Res. Lett.* **23** 1673
[9] Ma Z W, Bhattacharjee A 1998 *Geophys. Res. Lett.* **25** 3277
[10] Zhou G C, Cai C L, Cao J B *et al* 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 461
[11] Cai C L, Zhou G C, Cao J B *et al* 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 856
[12] Wang X G, Bhattacharjee A, Ma Z W 2000 *J. Geophys. Res.* **105** 27633
[13] Ma Z W, Bhattacharjee A 2001 *J. Geophys. Res.* **106** 3773
[14] Deng X H, Matsumoto H 2001 *Nature* **410** 557
[15] Drake J F 2001 *Nature* **410** 525
[16] Oieroset M, Phan T D, Fujimoto M *et al* 2001 *Nature* **412** 414
[17] Cao J B, Ma Z W, Lu L *et al* 2002 *Chin. J. Geophys.* **45** 625
[18] Zhou G C, Cai C L, Reme H *et al* 2003 *Chin. J. Space Sci.* **23** 25(in Chinese)[周国成、蔡春林、Reme H 等 2003 空间科学学报 **23** 25]
[19] Gartenhaus S 1964 *Elements of Plasma Physics* (Orlando: Holt, Rinehart and Winston)
[20] Hesse M, Birn J 1992 *J. Geophys. Res.* **97** 3965
[21] Hesse M, Winske D, Kuznetsova M 1995 *J. Geophys. Res.* **100** 21815
[22] Kuznetsova M M, Hesse M, Winske D 1998 *J. Geophys. Res.* **103** 199
[23] Kingsep A S, Chukbar K V, Yan'kov V V 1990 *Rev. Plasma Phys.* (Vol. 16) Kadomtsev B B ed (New York: Consultants Bureau) p243
[24] Gordeev A V, Kingsep A S, Rudakov L I 1994 *Phys. Rep.* **243** 215

Low-frequency waves in collisionless plasma current sheet*

Zhou Guo-Cheng Cao Jin-Bin Wang De-Ju Cai Chun-Lin

(*Center for Space Science and Applied Research*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)

(Received 9 September 2003; revised manuscript received 4 November 2003)

Abstract

Linear dispersion properties and waves of collisionless plasma current sheet at small scales are discussed, using 2.5-dimensional, collisionless and incompressible magnetohydrodynamic (MHD) models with the full electron pressure tensor. General dispersion relations are very complex. Two special cases, i.e., the central region of current sheet and the electron $\beta_e^* = 0$, are analytically studied here. The main results are as follows. (1) In the ion-inertial region ($kd_i > 1$), there are fast magnetosonic-kinetic Alfven waves and obliquely Alfven-whistler waves, and the electron magnetohydrodynamic (EMHD) model is a precise MHD model. In the long wavelength region ($kd_i < 1$), there are Alfven waves and ion acoustic waves, and the ideal MHD model is valid. (2) When electron $\beta_e^* = 0$, the results drop off some modes, e.g., the fast magnetosonic-kinetic Alfven wave and ion acoustic wave. This case is not exactly valid for the current sheet plasma. (3) At central region of current sheet, results from both of physical models have fast magnetosonic-kinetic Alfven waves.

Keywords: current sheet, magnetohydrodynamics, electron pressure tensor, dispersion relation

PACC: 5235B, 9430D, 9430E, 9530Q

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40174042, 40074043) and the National Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 40025413).