

# 三量子位 Heisenberg XX 链中杂质对纠缠的影响

张 涛<sup>1)</sup> 惠小强<sup>2)</sup> 岳瑞宏<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 西北大学现代物理研究所, 西安 710069)

<sup>2)</sup> 西安邮电学院应用数理系, 西安 710061)

(2003 年 10 月 22 日收到, 2003 年 11 月 26 日收到修改稿)

研究了有杂质时三量子位 Heisenberg XX 链中正常格点之间的热纠缠情况, 给出了 Concurrence 的解析表达式. 进一步的讨论发现, 杂质对正常格点的热纠缠有着重要的影响, 甚至能够改变纠缠在反铁磁区的特性. 理论表明, 可以通过调节温度和杂质参数来控制纠缠.

关键词: Heisenberg XX 链, 热纠缠, 杂质格点

PACC: 7510J, 0365

## 1. 引 言

在 1935 年爱因斯坦等 EPR 佯谬的提出时, 物理学家已注意到量子态的纠缠特性. 随着量子信息论的发展和量子计算机的提出, 量子纠缠已作为一种重要的资源应用于量子计算、量子信息和量子通讯中<sup>[1-3]</sup>. 利用纠缠可以实现超密集编码<sup>[4, 5]</sup>和量子隐形传输<sup>[6]</sup>等经典方法难以实现的行为, 具有天然保密、超高速、超大容量的特点<sup>[7]</sup>, 是实现量子计算机硬件的重要物理量<sup>[8, 9]</sup>. 所以, 对量子纠缠的操纵和控制就显得尤为重要.

许多文章中研究了纯态热纠缠<sup>[10]</sup>和 Heisenberg XX 链热纠缠的情况: 两体 Heisenberg XXX<sup>[11, 12]</sup>, XX<sup>[13]</sup>, XXZ 模型<sup>[14]</sup>, 三体对热纠缠<sup>[15-17]</sup>, 有杂质时的对热纠缠<sup>[16-18]</sup>. 在文献<sup>[18]</sup>中, 详细地讨论了杂质格点与正常格点之间的对热纠缠, 而并未研究在杂质存在时正常格点之间的对热纠缠的情况. 本文将研究杂质对正常格点之间对热纠缠的影响, 并与两体和三体纯态加以比较, 根据杂质参数  $J_1$  和热力学温度  $T$  对 Concurrence 的影响, 提出了一种控制纠缠的方法.

热平衡时态的密度矩阵

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{H}{kT}\right)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^7 \exp\left(\frac{E_i}{kT}\right) |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (1)$$

式中  $Z = \text{tr}\left[\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)\right]$  为配分函数,  $\rho(T)$  与热力学温度有关, 所以称相关纠缠为热纠缠. Concurrence 定义为

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (2)$$

式中  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为密度算子

$$\hat{\rho}_{23} = \rho_{23}(\sigma_2^y \otimes \sigma_3^y) \rho_{23}^*(\sigma_2^y \otimes \sigma_3^y) \quad (3)$$

按降序排列的本征值的算术平方根,  $\hat{\rho}_{23}$  中的下标表示格点 2, 3.

## 2. Concurrence 的计算

$S = 1/2$  时 Heisenberg XX 链的哈密顿量为

$$H_{xx} = \sum_{n=1}^N \mathcal{K} (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y). \quad (4)$$

周期性边界条件:  $S_{N+1} = S_1$ .  $N = 3$  时系统哈密顿量的本征值为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} E_0 &= E_7 = 0, \\ E_1 &= E_4 = \frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2}, \\ E_2 &= E_5 = \frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2}, \\ E_3 &= E_6 = -J. \end{aligned} \quad (5)$$

令格点 1 为杂质,  $J_1$  为杂质格点与正常格点近邻相

\* E-mail: tzhang505@eyou.com

相互作用,  $J$  为正常格点之间近邻相互作用, 相应的本征态为

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= |000\rangle, \\ \Psi_1 &= \frac{C_1}{A_1}|001\rangle + \frac{B_1}{A_1}|010\rangle + \frac{B_1}{A_1}|100\rangle, \\ \Psi_2 &= \frac{C_2}{A_2}|001\rangle + \frac{B_2}{A_2}|010\rangle + \frac{B_2}{A_2}|100\rangle, \\ \Psi_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}|010\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|100\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= \frac{C_1}{A_1}|110\rangle + \frac{B_1}{A_1}|101\rangle + \frac{B_1}{A_1}|011\rangle, \\ \Psi_5 &= \frac{C_2}{A_2}|110\rangle + \frac{B_2}{A_2}|101\rangle + \frac{B_2}{A_2}|011\rangle, \\ \Psi_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2}|101\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|011\rangle, \\ \Psi_7 &= |111\rangle,\end{aligned}\quad (6)$$

式中  $A_i, B_i, C_i (i=1, 2)$  为

$$\begin{aligned}A_1 &= \sqrt{\mathcal{X} J^2 + 2J_1^2 + J\sqrt{J^2 + 8J_1^2}} + (3J_1J + J_1\sqrt{J^2 + 8J_1^2}), \\ B_1 &= J^2 + 2J_1^2 + J\sqrt{J^2 + 8J_1^2}, \\ C_1 &= 3J_1J + J_1\sqrt{J^2 + 8J_1^2}, \\ A_2 &= \sqrt{\mathcal{X} J^2 + 2J_1^2 - J\sqrt{J^2 + 8J_1^2}} + (3J_1J - J_1\sqrt{J^2 + 8J_1^2}), \\ B_2 &= J^2 + 2J_1^2 - J\sqrt{J^2 + 8J_1^2}, \\ C_2 &= 3J_1J - J_1\sqrt{J^2 + 8J_1^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

令  $k=1$ , 分别写出配分函数和密度矩阵如下:

$$\begin{aligned}Z &= 2 + 2\exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \\ &+ 2\exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) + 2\exp\left(\frac{J}{T}\right),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \frac{1}{Z} \left[ (|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| + |\Psi_7\rangle\langle\Psi_7|) \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) (|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \\ &+ |\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|) + \exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \\ &\times (|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_5\rangle\langle\Psi_5|) + \exp\left(\frac{J}{T}\right) \\ &\left. \times (|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| + |\Psi_6\rangle\langle\Psi_6|) \right].\end{aligned}\quad (9)$$

正常格点间的约化密度矩阵  $\rho_{23} = \text{tr}_1[\rho(T)]$ , 用  $\rho_{23}^{xy}$  表示  $\text{tr}_1(|\Psi_x\rangle\langle\Psi_x| + |\Psi_y\rangle\langle\Psi_y|)$  则

$$\begin{aligned}\rho_{23}^{07} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho_{23}^{14} &= \frac{1}{A_1^2} \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B_1^2 & 2B_1^2 & 0 \\ 0 & 2B_1^2 & 2B_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{23}^{25} &= \frac{1}{A_2^2} \begin{pmatrix} C_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B_2^2 & 2B_2^2 & 0 \\ 0 & 2B_2^2 & 2B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2^2 \end{pmatrix}, \\ \rho_{23}^{36} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (10)$$

将(10)式代入(9)式得

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \frac{1}{Z} \left[ \rho_{23}^{07} + \exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \rho_{23}^{14} \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \rho_{23}^{25} + \exp\left(\frac{J}{T}\right) \rho_{23}^{36} \left. \right] \\ &= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & y & 0 \\ 0 & y & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned}v &= 1 + \frac{C_1^2}{A_1^2} \exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \\ &+ \frac{C_2^2}{A_2^2} \exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right), \\ w &= \exp\left(\frac{J}{T}\right) + \frac{2B_1^2}{A_1^2} \exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2B_2^2}{A_2^2} \exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right), \\
 y = & -\exp\left(\frac{J}{T}\right) + \frac{2B_1^2}{A_1^2} \exp\left(-\frac{J + \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right) \\
 & + \frac{2B_2^2}{A_2^2} \exp\left(-\frac{J - \sqrt{J^2 + 8J_1^2}}{2T}\right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

由(3)式得

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{w + y}{Z}, \\
 \lambda_2 &= \frac{w - y}{Z}, \quad (13) \\
 \lambda_3 &= \lambda_4 = \frac{v}{Z}.
 \end{aligned}$$

代入(2)式算得正常格点之间的 Concurrence

$$C = \max\left\{ \frac{2B_1^2 - C_1^2}{A_1^2} \Delta^{-(1-\sqrt{1+8\Gamma^2})} + \frac{2B_2^2 - C_2^2}{A_2^2} \Delta^{-(1+\sqrt{1+8\Gamma^2})} - \Delta^2 - 1 \right\} \rho. \quad (15)$$

纠缠与  $T$  和  $J_1$  ( $J$  一定) 的值有关. 当  $T$  一定时 (令  $J = -1$ ), 可以画出纠缠随  $J_1$  的变化图 (见图 1、图 2 和图 3). 从图中可看出, 纠缠随  $|J_1|$  的增大而减小, 在一定的  $|J_1|$  附近, 纠缠有一突变, 甚至不存在 (图 1), 这一突变随温度的升高而变宽 ( $|J_1|$  的取值范围) 随着温度的降低而消失 (图 3).  $J_1 \rightarrow \infty$  时,  $C \rightarrow 0$ , 纠缠不存在;  $J_1 \rightarrow 0$  时, 纠缠达到最大值 1. 当  $T \rightarrow 0$  时 (15) 式简化为

$$C = \max\left\{ \frac{\chi(1 + 2\Gamma^2 + \sqrt{1 + 8\Gamma^2})^2 - (3\Gamma + \Gamma\sqrt{1 + 8\Gamma^2})^2}{\chi(1 + 2\Gamma^2 + \sqrt{1 + 8\Gamma^2})^2 + (3\Gamma + \Gamma\sqrt{1 + 8\Gamma^2})^2} \rho \right\}.$$

$$C = \max\left\{ \frac{2}{Z} (|y| - v) \rho \right\}. \quad (14)$$

### 3. 讨 论

由(12)–(14)式可以看出, Concurrence 与  $J, J_1, T$  的值有关, 下面我们分类进行讨论. 为了便于说明, 定义

$$\begin{aligned}
 \Delta &\equiv \exp\left(\frac{J}{2T}\right), \\
 \Gamma &\equiv \frac{J_1}{|J|}.
 \end{aligned}$$

(1) 当  $J < 0$  (铁磁区) 时, 即  $0 < \Delta < 1$ . 此时  $y > 0$  (14) 式可写成

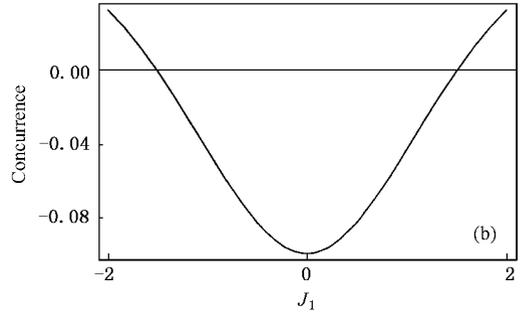
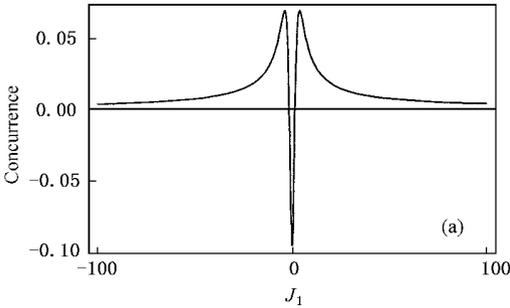


图 1  $J = -1, T = 1.4$  时 Concurrence 随  $J_1$  的变化 (a)  $-100 \leq J_1 \leq 100$  (b)  $-2 \leq J_1 \leq 2$

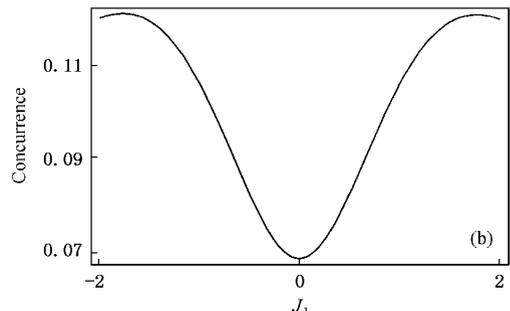
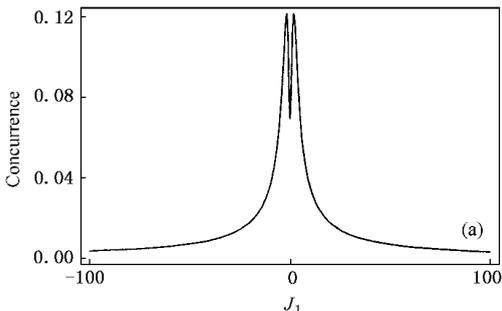


图 2  $J = -1, T = 1$  时 Concurrence 随  $J_1$  的变化 (a)  $-100 \leq J_1 \leq 100$  (b)  $-2 \leq J_1 \leq 2$

当  $J_1 \rightarrow \infty$  时,  $C \rightarrow 0$ , 纠缠不存在, 在  $|J_1| \rightarrow 0$  时, 纠缠达到最大  $C = 1$ , 在  $J_1 = \pm J$  时,  $C = 1/3$  (见图 4). 当  $J_1$  一定时, 纠缠随着温度的增大而减小,  $T \rightarrow 0$  时纠缠达到最大值 (图 5),  $J_1$  越小纠缠就越大. 纠缠存在的临界温度随  $J_1$  的增大而减小.

(2) 当  $J > \alpha$  (反铁磁区) 时, 此时  $y$  的正负随  $T$  和  $J_1$  ( $J$  一定) 而变化 (表 1).

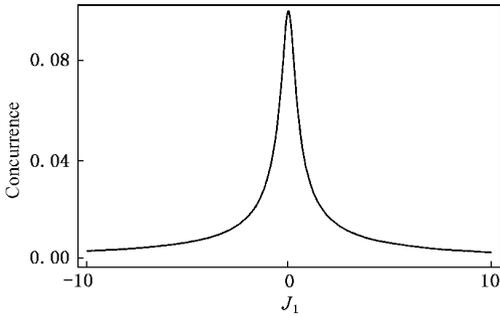


图 3  $J = -1, T = 0.1$  时 Concurrence 随  $J_1$  的变化

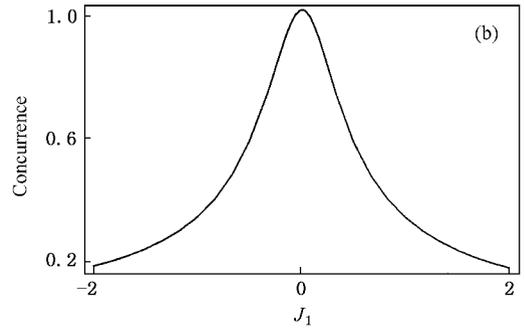
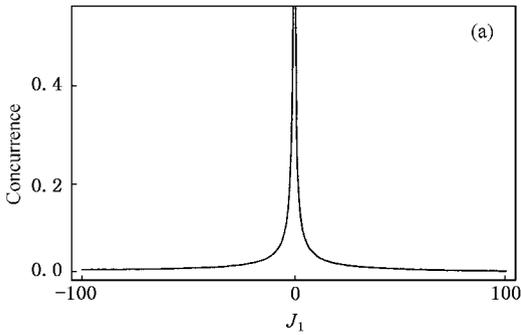


图 4  $J = -1, T \rightarrow 0$  时 Concurrence 随  $J_1$  的变化 (a)  $-100 \leq J_1 \leq 100$  (b)  $-2 \leq J_1 \leq 2$

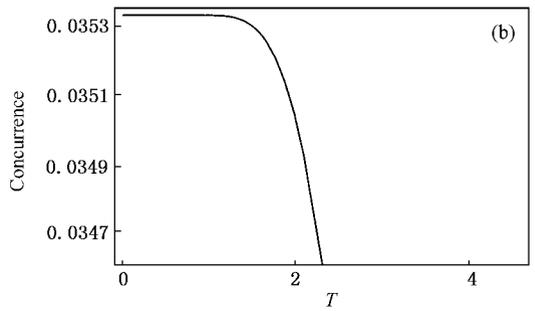
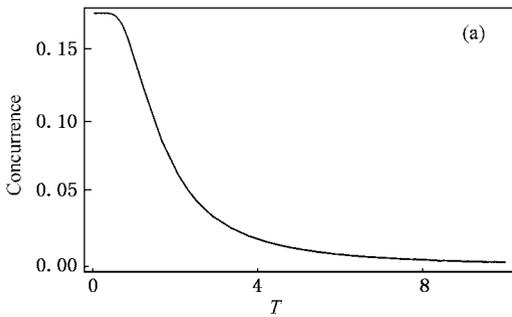


图 5  $J = -1$  时 Concurrence 随  $T$  的变化 (a)  $J_1 = 2$  (b)  $J_1 = 10$

表 1  $y$  与  $T$  和  $J_1$  的关系 (取  $J = 1, J_{1c}$  为纠缠存在的最大值)

$T$ 值	0.05	0.09	0.7	Concurrence $C$
$y > 0$	$ J_1  > 1.0408J$	$ J_1  > 1.0753J$	$ J_1  > 1.5039J$	0
$y < 0$	$ J_1  < 1.0408J$	$ J_1  < 1.0753J$	$ J_1  < 1.5039J$	随 $J_1$ 和 $T$ 变化
$J_{1c}$	$\pm J$	$\pm J$	$\pm 0.8415J$	

当  $y > 0$  时,  $C$  的表达式为 (15) 式; 当  $y < 0$  时 (14) 式变为

$$C = \max \left\{ \frac{-\Delta^{-(1+\sqrt{1+8T^2})} - \Delta^{-(1-\sqrt{1+8T^2})} + \Delta^2 - 1}{1 + \Delta^{-(1+\sqrt{1+8T^2})} + \Delta^{-(1-\sqrt{1+8T^2})} + \Delta^2}, 0 \right\}. \quad (16)$$

由表 1 可以看出,  $y$  的阈值随温度的升高而增大. 当  $y > 0$  时,  $C = 0$ , 不存在纠缠; 当  $y < 0$  时,

Concurrence 随  $J_1$  的变化如图 6(a) 所示. 有限温度时, 纠缠随  $|J_1|$  的增大而减小, 其极大值随着温度

降低而增大,  $J_1$  的取值范围扩大, 并且最大纠缠的区域变宽,  $J_1 = 0$  时纠缠极大, 此时等效于二位链.  $J_1$  一定时, 如图 6(b) 所示, 当  $J_1 = 0.8, T > 0.7567$  时纠缠不存在,  $T < 0.7567$  时纠缠随温度的

降低而增大, 临界温度  $T_c$  随  $J_1$  的减小而达到最大值 1.1346. 在  $T \rightarrow 0$  的情况下, 若  $J_1 \gg J, C = 0$ , 纠缠不存在, 若  $J_1 \ll J, C = 1$ , 纠缠最大,  $J_1 = \pm J$  时,  $C = 0$ .

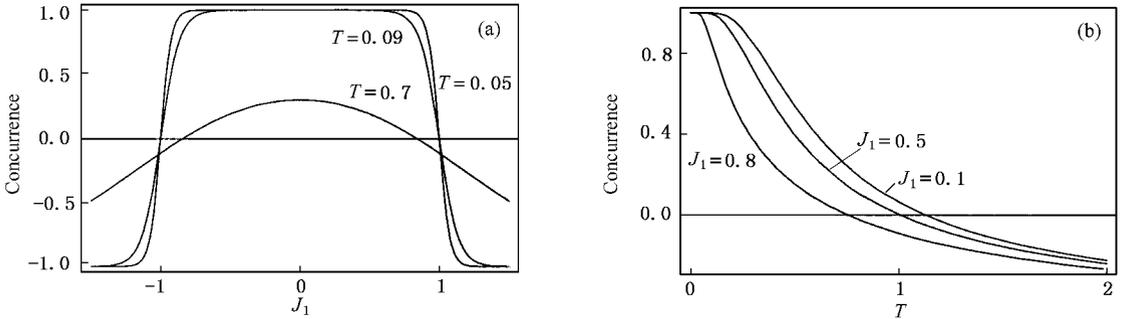


图 6  $J = 1$  时 Concurrence 随  $J_1$  (a) 和  $T$  (b) 变化

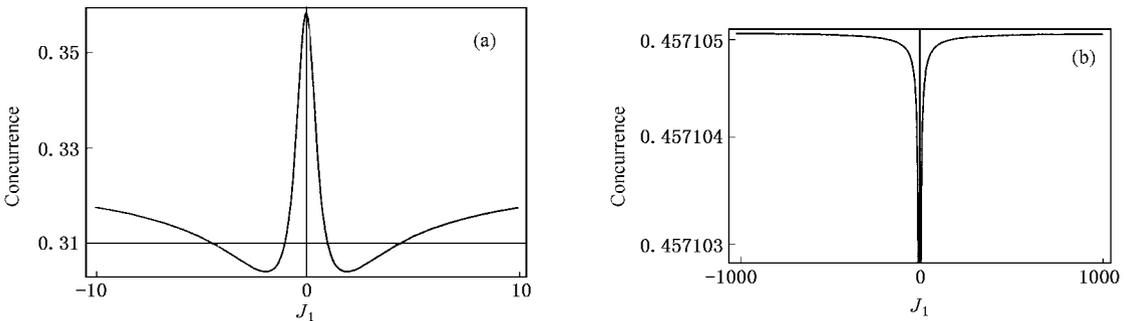


图 7  $J = \pm k (k = 1)$  时 Concurrence 随  $J_1$  的变化 (a)  $T = 0.5$  (b)  $T = 0.1$

进一步研究表明:  $N = 4$  时, 在铁磁和反铁磁区, 杂质对正常格点对纠缠的影响完全相同 (纠缠的表达式相同, 可能由系统对称性产生), 见图 7. 在  $T = 0$  附近也存在振荡,  $J_1 \gg J$  时, 纠缠达到一稳定值. 此稳定值随  $T$  的降低而增大, 当  $T \rightarrow 0$ , 最大值为 0.457107, 临界温度  $T_c = 1.4281$ , 要比  $N = 3$  时的临界温度高.

### 4. 结 论

由上述讨论可以看出: 杂质的存在, 不仅使纠缠在铁磁区有特殊的变化, 而且在反铁磁区有纠缠 (纯态不存在纠缠). 当  $T \rightarrow 0$  时, 若  $J_1 \gg J, C = 0$ , 即杂

质使正常格点之间的纠缠消失. 若  $J_1 \ll J, C = 1$ , 系统类似两体情形,  $J_1 = J$  时, 即为正常的三体情形.

当  $T$  为有限时, 热纠缠与  $T$  和  $J_1$  有关 ( $J$  一定). 在铁磁区, 正常格点之间的纠缠随  $T$  和  $J_1$  而变化,  $T$  和  $J_1$  减小时纠缠增大. 在反铁磁区纠缠存在时, 纠缠极大值随温度的增大而减小, 临界温度也减小. 临界温度随  $J_1$  的减小而增大, 达到一极值 1.1346. 就系统内杂质而言,  $T$  为一确定量时, 可以通过改变温度  $T$  来改变  $\Delta$  值, 从而实现了对正常格点纠缠的控制. 或在一定的温度下, 调节杂质参数  $J_1$  来控制纠缠.

[ 1 ] Liu Y, Yao C M, Guo G C 2001 *Chin. Phys.* **10** 1001  
 [ 2 ] Zheng Y Z, Gu Y J, Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 537  
 [ 3 ] Cai X H 2003 *Chin. Phys.* **12** 1066  
 [ 4 ] Mattle K *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4656  
 [ 5 ] Calsamiglia J, Lutkenhaus N 2001 *Appl. Phys.* **B 72** 67  
 [ 6 ] Kim Y H, Kulik S P, Shih Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1370

- [ 7 ] Zhang Y D ,Wu S J ,Hou G *et al* 2002 *Quantum Information—Physics Theory and Certain Development* ( Wuhan : Huazhong Normal University Publishing House ) in Chinese [ 张永德、吴盛俊、侯广等 2002 量子信息论——物理原理和某些进展( 武汉 : 华中师范大学出版社 ) ]
- [ 8 ] Hao S R ,Hou B Y ,Xi X Q *et al* 2002 *Chin . Phys .* **11** 109
- [ 9 ] Chen L B 2002 *Chin . Phys .* **11** 881
- [ 10 ] Shi M J ,Du J F ,Zhu D P 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 825 ( in Chinese ) [ 石名俊、杜江峰、朱栋培 2000 物理学报 **49** 825 ]
- [ 11 ] Amesen M C ,Bose S ,Vedral V 2001 *Phys . Rev . Lett .* **87** 17901
- [ 12 ] Nielsen M A 1998 quant-ph 0011036
- [ 13 ] Wang X G 2001 *Phys . Rev . A* **64** 12313
- [ 14 ] Wang X G 2001 *Phys . Lett . A* **281** 101
- [ 15 ] O 'Connor E M ,Wootters W K 2001 *Phys . Rev . A* **63** 52302
- [ 16 ] Wang X G ,Molmer K 2002 *Eur . Phys . J . D* **18** 385
- [ 17 ] Wang X G ,Fu H C ,Solomon A I 2001 *J . Phys . A* **34** 11307
- [ 18 ] Xi X Q ,Hao S R ,Chen W X *et al* 2002 *Phys . Lett . A* **297** 291

## The effect of impurity on the entanglement between the normal lattice in three-qubit Heisenberg $XX$ chain

Zhang Tao<sup>1)</sup> Xi Xiao-Qiang<sup>2)</sup> Yue Rui-Hong<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>*Xi Institute of Modern Physics ,Northwest University ,Xi'an 710069 ,China*

<sup>2)</sup>*Xi'an Institute of Posts and Telecommunications ,Xi'an 710061 ,China*

( Received 22 October 2003 ; revised manuscript received 26 November 2003 )

### Abstract

In this paper ,we study the effect of impurity on the thermal entanglement between the normal lattice in three-qubit Heisenberg  $XX$  chain ,and give the analytical expression of the concurrence .According to the discussion of our result ,we find that the impurity parameter has a great effect on the pairwise thermal entanglement ,it even can change the characters of the entanglement to some degree .

**Keywords :** Heisenberg  $XX$  chain , thermal entanglement , impurity lattice

**PACC :** 7510J , 0365