第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2821-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.9,September,2004

一类非线性方程的 compacton 解及其移动 compacton 解*

殷久利 田立新

(江苏大学非线性科学研究中心,镇江 212013)

(2003 年 10 月 20 日收到;2004 年 1 月 9 日收到修改稿)

研究一类非线性方程,即广义 Camassa-Holm 方程 C(n):

$$u_t + ku_x + \beta_1 u_{xxt} + \beta_2(u^{n+1})_x + \beta_3 u_x(u^n)_{xx} + \beta_4 u(u^n)_{xxx} = 0.$$

通过四种拟设得到丰富的精确解,特别是当 $k\neq0$ 时得到了 compacton 解,当 $k=0$ 时得到了移动 compacton 解.最后利用线性化的方法得到了其他形式的广义 Camassa-Holm 方程的 compacton 解.

关键词:广义 Camassa-Holm 方程,compacton 解,移动 compacton 解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

孤波解的研究[1—20]是孤子理论的重要组成部分.近来,发现了两类新型孤子解:尖峰孤子解和 compacton 孤子解. Camassa,Holm[1]发现新型浅水波方程具有尖峰孤子(peakon)解;Rosenau 和 Hyman 等人[7]在考虑广义 KdV 方程的非线性色散项的作用时发现的 compacton 解.

compacton 解是在不可积系统里获得的孤子解,它具有比孤子更强的局部性,它在空间参量 x 的有限区间外为 0. 同时 compacton 解具有许多孤子的性质[7,8]:在碰撞后波形几乎保持不变,这种碰撞是弹性的,没有能量损失. compacton 解的研究引起了越来越多的关注[7—16]:Rosenau 和 Hyman 等人[7]研究了广义 KdV 方程 K(m,n),得到了具有类似孤子性质的 Compacton 解. Yan[16]研究了广义 Boussinesq 方程 B(m,n):$u_{tt} - u_{xx} - a(u^n)_{xx} + (u^m)_{xxxx} = 0$ 的 compacton 解及其孤子解.

Camassa 和 Holm[1]利用 Hamiltonian 方法得到一类完全可积的非线性阻尼的新型浅水波方程 Camassa-Holm 方程

$$\begin{aligned} &u_t + ku_x - u_{xxt} + 3uu_x \\ &= 2u_xu_{xx} + uu_{xxx}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 u 为流速.该文章具有奇特的尖峰孤子解[1].关于方程(1)的研究见文献[1—6].

进一步,为了研究这类新型浅水波方程的广义形式是否具有 compacton 解,引进一类非线性方程,即广义 Camassa-Holm 方程 C(n):

$$\begin{aligned} &u_t + ku_x + \beta_1 u_{xxt} + \beta_2(u^{n+1})_x \\ &+ \beta_3 u_x(u^n)_{xx} + \beta_4 u(u^n)_{xxx} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $k,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为任意常数,若取 $\beta_1=-1,\beta_2=\frac{3}{2},\beta_3=-2,\beta_4=-1,n=1$ 时,(2)式为 Camassa-Holm 方程(1).通常,方程(2)是不可积的,但选择适当的 n 以及系数,能够得到强局部性的 compacton 解.该研究对于揭示 Camassa-Holm 方程的非线性影响以及广义 Camassa-Holm 方程在适当的非线性下 compacton 解的形成极有意义.

本文得到丰富的解,当 $k\neq0$,$n>0$ 时得到了 compacton 解,当 $k=0$,$n<0$ 时得到了移动 compacton 解;得到了 $n>0$ 时的一些新解 利用线性化的方法得到了其他形式的广义 Camassa-Holm 方程的 compacton 解.

* 国家自然科学基金(批准号:10071033)江苏省自然科学基金(批准号:BK2002003)资助的课题.

2. 广义 Camassa-Holm 方程 C(n)的 compacton 解及其精确解

首先令 $\xi = x - Dt$,则 $u(x,t) = u(\xi) = u(x - Dt)$,$D$ 是速度. 方程(2)转化为

$$(k - D)u_{\xi} - \beta_1 D u_{3\xi} + \beta_2 (u^{n+1})_{\xi} + \beta_3 u_{\xi}(u^n)_{2\xi} + \beta_4 u (u^n)_{3\xi} = 0. \tag{3}$$

介绍四种形式的拟设解:

拟设 1:

$$u = A\cos^{\delta}(B\xi), \tag{4}$$

拟设 2:

$$u = A\sin^{\delta}(B\xi), \tag{5}$$

拟设 3:

$$u = A\cosh^{\delta}(B\xi), \tag{6}$$

拟设 4:

$$u = A\sinh^{\delta}(B\xi). \tag{7}$$

2.1. $k \neq 0$ 时方程(2)的精确解

把拟设 1 代入方程(3)得到

$$\begin{aligned}
&(D - k)AB\delta\cos^{\delta-1}B\xi \\
&+ \beta_1 DAB^3\delta(\delta - 1)(\delta - 2)\cos^{\delta-3}B\xi \\
&- \beta_1 DAB^3\delta^3\cos^{\delta-1}B\xi \\
&- \beta_2 A^{n+1}B(n + 1)\delta\cos^{(n+1)\delta-1}B\xi \\
&- \beta_3 A^n B^3 n\delta^2(n\delta - 1)\cos^{(n+1)\delta-3}B\xi \\
&+ \beta_3 A^{n+1}B^3 n^2\delta^3\cos^{(n+1)\delta-1}B\xi \\
&- \beta_4 A^{n+1}B^3 n\delta(n\delta - 1)(n\delta - 2)\cos^{(n+1)\delta-3}B\xi \\
&+ \beta_4 A^{n+1}B^3 n^3\delta^3\cos^{(n+1)\delta-1}B\xi = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

令$(\delta - 1)(\delta - 2) = 0$,同类项系数为 0 后得到方程组

$$\begin{aligned}
&\delta - 1 = (n + 1)\delta - 3, \\
&- \beta_2 A^{n+1}B(n + 1)\delta + \beta_3 A^{n+1}B^3 n^2\delta^3 \\
&+ \beta_4 A^{n+1}B^3 n^3\delta^3 = 0, \\
&(D - k)AB\delta - \beta_1 DAB^3\delta^3 - \beta_3 A^{n+1}B^3 n\delta^2(n\delta - 1) \\
&- \beta_4 A^{p+1}B^3 n\delta(n\delta - 1)(n\delta - 2) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

进一步可以得到

$$n = \frac{2}{\delta},\ B^2 = \frac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4},$$

$$A^n = \frac{(2\beta_3 n^2 + 2\beta_4 n^3)(D - k) - 2\beta_1\beta_2(n + 1)D}{\beta_2\beta_3(n^2 + n^3)}. \tag{10}$$

从而得到 C(n)方程的 compacton 解为

$$u = \begin{cases} A\cos^{2/n}\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi, & \left|\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \left|\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right| > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

其中 A 满足(10)式,见图 1(a)(取 $\beta_1 = 2$,$\beta_2 = -3$,$\beta_3 = -2$,$\beta_4 = -1$,$n = 2$,$k = 2$)和它的平面图 1(b)(取 $t = 0$).

把拟设 2 代入方程(3),同样得到 C(n)方程的 compacton 解

$$u = \begin{cases} A\sin^{2/n}\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi, & \left|\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right| \leqslant \pi, \\ 0, & \left|\sqrt{\dfrac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right| > \pi, \end{cases} \tag{12}$$

其中 A 满足(10)式,如图 2(a)(取 $\beta_1 = 2$,$\beta_2 = -3$,$\beta_3 = -2$,$\beta_4 = -1$,$n = 2$,$k = 2$)和它的平面图 2(b)(取 $t = 0$).

通过图像可以发现拟设 1 的解为单峰 compacton 解,而拟设 2 的解为双峰 compacton 解.

把拟设 3 代入方程(3)中得到 C(n)方程的解

$$u = \left\{\frac{(2\beta_3 n^2 + 2\beta_4 n^3)(D - k) + 2\beta_1\beta_2(n + 1)D}{\beta_2\beta_3(n^2 + n^3)} \times \cosh^2\left(\sqrt{-\frac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right)\right\}^{1/n}. \tag{13}$$

把拟设 4 代入方程(3),得到 C(n)方程的解

$$u = \left\{-\frac{(2\beta_3 n^2 + 2\beta_4 n^3)(D - k) + 2\beta_1\beta_2(n + 1)D}{\beta_2\beta_3(n^2 + n^3)} \times \sinh^2\left(\sqrt{-\frac{\beta_2(n + 1)}{4\beta_3 + 4n\beta_4}}\xi\right)\right\}^{1/n}. \tag{14}$$

由于令$(\delta - 1)(\delta - 2) = 0$以及从(10)式中 $m - 1 = n = p = \dfrac{2}{\delta}$,所以当 $k \neq 0$ 时只有两种形式的广义 Camassa-Holm 方程具有 compacton 解,即方程 C(1)和方程 C(2). 更有意义的是方程 C(2)还具有 compact-kink 解,形式如下:

$$u = \begin{cases} A_1\sin\left(\sqrt{\dfrac{3\beta_2}{4\beta_3 + 8\beta_4}}\xi\right), & \left|\sqrt{\dfrac{3\beta_2}{4\beta_3 + 8\beta_4}}\xi\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -A_1, & \sqrt{\dfrac{3\beta_2}{4\beta_3 + 8\beta_4}}\xi < -\dfrac{\pi}{2}, \\ A_1, & \sqrt{\dfrac{3\beta_2}{4\beta_3 + 8\beta_4}}\xi > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $A_1=\sqrt{\dfrac{(4\beta_3+8\beta_4)(D-k)-3\beta_1\beta_2 D}{6\beta_2\beta_3}}$，这是 compact-kink 解，见图 3(a)（取 $\beta_1=-1$，$\beta_2=3/2$，$\beta_3=2$，$\beta_4=1$，$k=-1$）和它的平面图 3(b)（取 $t=0$）.

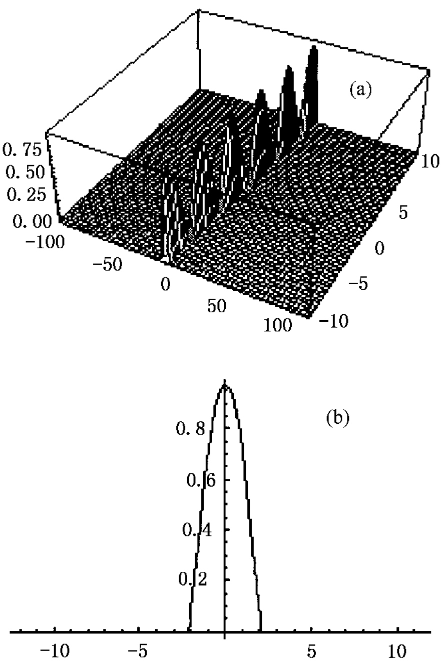

图 1　(a)单峰 compacton 解；(b)平面图

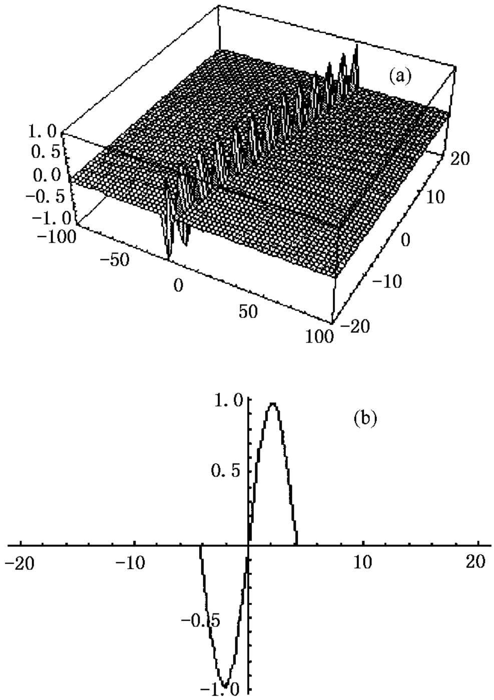

图 2　(a)双峰 compacton 解；(b)平面图

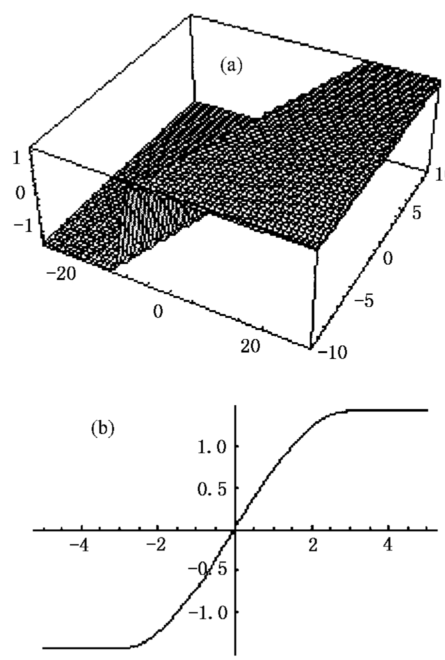

图 3　(a) compact-kink 解；(b) 平面图

2.2. $k=0$ 时方程(2)的精确解

把拟设 1 代入方程(3)，利用(8)式得到另一个方程组

$$
\begin{aligned}
&\delta-3=(n+1)\delta-1,\\
&DAB\delta-\beta_1 DAB^3\delta^3=0,\\
&-\beta_3 A^{n+1}B^3 n\delta^2(n\delta-1)\\
&-\beta_4 A^{n+1}B^3 n\delta(n\delta-1)(n\delta-2)=0,\\
&\beta_1 DAB^3\delta(\delta-1)(\delta-2)-\beta_2 A^{n+1}B(n+1)\delta\\
&+\beta_3 A^{n+1}B^3 n^2\delta^3+\beta_4 A^{n+1}B^3 n^3\delta^3=0.
\end{aligned}\tag{16}
$$

从(16)式得到

$$
n=-\frac{2}{\delta},\quad B^2=\frac{n^2}{4\beta_1},\quad \beta_4=\frac{\beta_3}{-2n},
$$

$$
A^n=\frac{\beta_1(n+1)(n+2)D}{2\beta_1\beta_2(n+1)-\beta_3 n^2},\tag{17}
$$

它的解为

$$
u=A\cos^{-2/n}\left(\sqrt{\frac{n^2}{4\beta_1}}\,\xi\right),\tag{18}
$$

其中 A 满足(17)式.

要获得类似 compacton 解，则要求 $n<0$，从而令方程(3)具有如下形式的解：

$$
u=\begin{cases}A\cos^{-2/n}\left(\sqrt{\dfrac{n^2}{4\beta_1}}\,\xi\right), & \left|\sqrt{\dfrac{n^2}{4\beta_1}}\,\xi\right|\leqslant\theta,\\ c, & \left|\sqrt{\dfrac{n^2}{4\beta_1}}\,\xi\right|>\theta,\end{cases}\tag{19}
$$

其中 $0<\theta<\pi/2$，$c=A\cos^{-2/n}\theta>0$，A 满足(10)式.它的图像见图 4(a)（取 $\beta_1=1$，$\beta_2=3/2$，$\beta_3=2$，$n=-1/2$，$\theta=\pi/3$，）和它的平面图 4(b)（取 $t=0$）.和 compacton 解的图像比较可以发现(19)式的图像偏离了 x 轴，从而得到了移动 compacton 解.

把拟设 2 代入方程(3)，同样可以得到

$$u=\begin{cases}A\sin^{-2/n}\left(\sqrt{\dfrac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right), & \theta<\left|\sqrt{\dfrac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right|\leqslant\pi-\theta,\\ c, & \text{其他},\end{cases}\tag{20}$$

其中 $0<\theta<\pi/2$，$c=A\sin^{-2/n}\theta>0$，A 满足(10)式.当 $n<0$ 得到了移动 compacton 解.它的图像见图 5(a)（取 $\beta_1=1$，$\beta_2=3/2$，$\beta_3=2$，$n=-1/2$，$\theta=\pi/3$）和它的平面图 5(b)（取 $t=0$）.

把拟设 3 代入方程(3)，得到

$$u=\left\{\frac{2\beta_1\beta_2(n+1)-\beta_3n^2}{\beta_1(n+1)(n+2)D}\cosh^2\left(\sqrt{-\frac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right)\right\}^{-1/n},\tag{21}$$

当 $n>0$，(21)式为钟形孤子解.形如

$$u=\left\{\frac{\beta_1(n+1)(n+2)D}{2\beta_1\beta_2(n+1)-\beta_3n^2}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{-\frac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right)\right\}^{1/n}.\tag{22}$$

把拟设 4 代入方程(3)，得到

$$u=\left\{-\frac{2\beta_1\beta_2(n+1)-\beta_3n^2}{\beta_1(n+1)(n+2)D}\sinh^2\left(\sqrt{-\frac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right)\right\}^{-1/n},\tag{23}$$

当 $n>0$，(23)式为带奇异点的孤子解，形如

$$u=\left\{-\frac{\beta_1(n+1)(n+2)D}{2\beta_1\beta_2(n+1)-\beta_3n^2}\operatorname{csch}^2\left(\sqrt{-\frac{n^2}{4\beta_1}}\xi\right)\right\}^{1/n}.\tag{24}$$

在第一种情况下（$k\neq0$），n 只能取 1 和 2，即只有两种形式的广义 Camassa-Holm 方程 可以考虑解的情况.而在第二种情况下（$k=0$），n 可取任意实数，即我们得到了更多形式的广义 Camassa-Holm 方程都可以考虑解的情况.

3. 广义 Camassa-Holm 方程 C(n)的一些新解

当 $k\neq0$ 时仅得到两种形式的广义 Camassa-Holm 方程：C(1)，C(2).通过组合两种不同的解，可以得到广义 Camassa-Holm 方程的 C(1)和 C(2)一些新解.

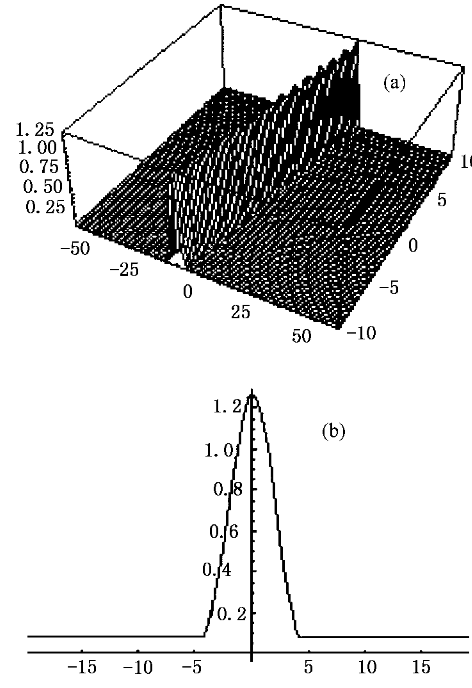

图 4 (a)移动单峰 compacton 解；(b) 平面图

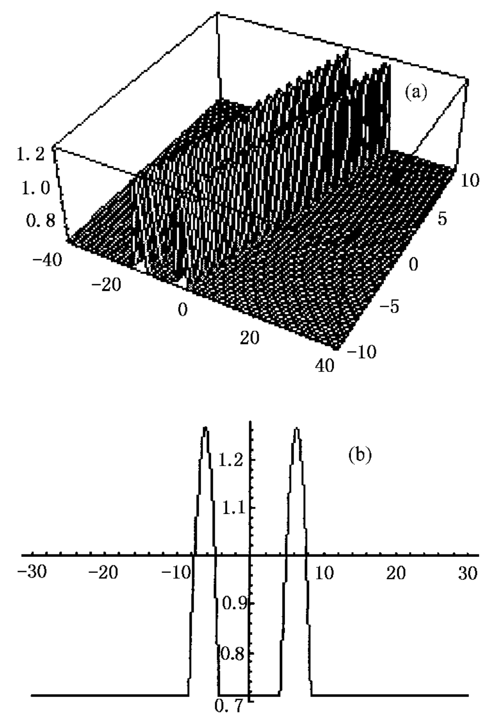

图 5 (a)移动双峰 compacton 解；(b)平面图

首先考虑方程 C(1)：

$$\begin{aligned}&u_t+ku_x+\beta_1u_{xxt}+\beta_2(u^2)_x\\&+\beta_3u_xu_{xx}+\beta_4uu_{xxx}=0,\end{aligned}\tag{25}$$

假设方程 C(1)具有如下形式的解：

$$U=\frac{(\beta_3+\beta_4)(D-k)-2\beta_1\beta_2D}{\beta_2\beta_3}\times\left[a\cos^2\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{2(\beta_3+\beta_4)}}\xi\right)+b\sin^2\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{2(\beta_3+\beta_4)}}\xi\right)\right].\tag{26}$$

把(26)式代入(25)式，得到当 $a=b$ 或者 $a+b=1$ 时(26)式是方程 C(1)的解.

或者假设方程 C(1)具有如下形式的解：

$$U=a\frac{(\beta_3+\beta_4)(D-k)+2\beta_1\beta_2D}{\beta_2\beta_3}\times\cosh^2\left(\sqrt{-\frac{\beta_2}{2(\beta_3+\beta_4)}}\xi\right)+b\frac{(\beta_3+\beta_4)(D-k)+2\beta_1\beta_2D}{\beta_2\beta_3}\times\sinh^2\left(\sqrt{-\frac{\beta_2}{2(\beta_3+\beta_4)}}\xi\right),\tag{27}$$

把(27)式代入(25)式，得到当 $a+b=0$ 或者 $b-a=1$ 时,(27)式是方程 C(1) 的解.

考虑方程 C(2)：

$$u_t+ku_x+\beta_1u_{xxt}+\beta_2(u^3)_x+\beta_3u_x(u^2)_{xx}+\beta_4u(u^2)_{xxx}=0,\tag{28}$$

假设方程 C(2)具有如下形式的解：

$$U=\sqrt{\frac{(4\beta_3+8\beta_4)(D-k)-3\beta_1\beta_2D}{6\beta_2\beta_3}}\times\left[a\cos\left(\sqrt{\frac{3\beta_2}{4\beta_3+8\beta_4}}\xi\right)+b\sin\left(\sqrt{\frac{3\beta_2}{4\beta_3+8\beta_4}}\xi\right)\right].\tag{29}$$

把(29)式代入(28)式，得到当 $a^2+b^2=1$ 时,(29)式是方程 C(2)的解.

4. 其他形式的广义 Camassa-Holm 方程的 compacton 解

形式 1

$$u_t+ku_x+\beta_2(u^{n+1})_x+\beta_3(u(u^n)_{xx})_x=0,\tag{30}$$

(30)式即为取(2)式中 $\beta_1=0,\beta_3=\beta_4$，(30)式为近似广义 KdV 方程,用拟设的方法可以得到 compacton 解,这里介绍线性化的方法来求得它的 compacton 解. 令 $\xi=x-Dt$，(30)式转化为

$$(k-D)u_\xi+\beta_2(u^{n+1})_\xi+\beta_3(u(u^n)_{\xi\xi})_\xi=0.\tag{31}$$

积分(31)一次,并令积分常数为 0 得到

$$(k-D)u+\beta_2(u^{n+1})+\beta_3u(u^n)_{\xi\xi}=0.\tag{32}$$

令 $u^n=v$,可以得到一个线性方程

$$(k-D)+\beta_2v+\beta_3v_{\xi\xi}=0.\tag{33}$$

容易知道(33)式的解由它的特征值决定,即 $\beta_2+\beta_3\lambda^2=0$.

若 $\beta_2\beta_3>0$,则 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\mathrm{i}$,这是一对纯虚根. 从而得到(33)式的解为

$$v=a\left(\cos\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\xi+\mathrm{i}\sin\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\xi\right)-\frac{k-D}{\beta_2}\tag{34}$$

或

$$v=a\left(\cos\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\xi-\mathrm{i}\sin\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\xi\right)-\frac{k-D}{\beta_2},\tag{35}$$

其中 a 是任意常数,利用(34)和(35)式得到

$$v=a\cos\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\xi-\frac{k-D}{\beta_2}.\quad 令\ a=-\frac{k-D}{\beta_2},$$

则 $v=\frac{2(D-k)}{\beta_2}\cos^2\sqrt{\frac{\beta_2}{4\beta_3}}\xi$,从而得到(30)式的 compacton 解

$$v=\sqrt[n]{v}=\begin{cases}\left\{\frac{2(D-k)}{\beta_2}\cos^2\sqrt{\frac{\beta_2}{4\beta_3}}\xi\right\}^{1/2}, & \left|\sqrt{\frac{\beta_2}{4\beta_3}}\xi\right|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \left|\sqrt{\frac{\beta_2}{4\beta_3}}\xi\right|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{36}$$

形式 2

$$(u^n)_t+ku_x+\beta_1(u^n)_{xxt}+\beta_2(u^{n+1})_x+\beta_3u_x(u^n)_{xx}+\beta_4u(u^n)_{xxx}=0,\tag{37}$$

取 $n=1$，(37)式为 Camassa-Holm 方程(1)，(37) 也可以表达为

$$(\beta_1\partial_t+\beta_3u_x+\beta_4u\partial_x)\left((u^n)_{xx}+\frac{u^n}{\beta_1}+\frac{k}{\beta_3}\right)=0,\tag{38}$$

其中

$$\beta_2=\frac{\beta_4n+\beta_3}{(n+1)\beta_1},\ 令(u^n)_{xx}+\frac{u^n}{\beta_1}+\frac{k}{\beta_3}=0.\tag{39}$$

令 $u^n=v$,可以得到一个线性方程

$$k+(\beta_2-D)v+(\beta_3-\beta_1D)v_{\xi\xi}=0.\tag{40}$$

利用相同的方法可以得到(37)式的 compacton 解(其中 $\beta_1>0$)

$$u=\begin{cases}\left\{-\dfrac{2\beta_1}{\beta_3}\cos^2\sqrt{\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right\}^{1/n}, & \left|\sqrt{\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \left|\sqrt{\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{41}$$

形式 3

$$(u^{n+1})_t+ku_x+\beta_1(u(u^n)_{xx})_t$$
$$+\beta_2(u^{n+1})_x+\beta_3(u(u^n)_{xx})_x=0,\tag{42}$$

令 $\xi=x-Dt$，积分(42)一次,并令积分常数为 0 得到

$$-Du^{n+1}+ku-\beta_1Du(u^n)_{\xi\xi}+\beta_2u^{n+1}$$
$$+\beta_3u(u^n)_{\xi\xi}=0.\tag{43}$$

令 $u^n=v$,可以得到一个线性方程

$$k+(\beta_2-D)v+(\beta_3-\beta_1D)v_{\xi\xi}=0.\tag{44}$$

利用相同的方法可以得到(42)式的 compacton 解(其中要求 $\beta_1\beta_2=\beta_3$，$\beta_1<0$)

$$u=\begin{cases}\left\{\dfrac{2k}{D-\beta_2}\cos^2\sqrt{-\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right\}^{1/n}, & \left|\sqrt{-\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \left|\sqrt{-\dfrac{1}{4\beta_1}}\xi\right|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{45}$$

形式 4

$$u_t+\beta_1u_{xxt}+\beta_2(u^{n+1})_x=0,\tag{46}$$

(46)即取方程(2)中 $k=0$，$\beta_3=\beta_4=0$，这是广义 BBM 方程.

利用拟设的方法可以得到(46)的 compacton 解(其中要求 $-1<n<0$)

$$u=\begin{cases}\left\{\dfrac{2\beta_2}{(2-n)D}\cos^2\left(\dfrac{n}{2\sqrt{\beta_1}}\xi\right)\right\}^{1/n}, & \left|\dfrac{n}{2\beta_1}\xi\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \left|\dfrac{n}{2\sqrt{\beta_1}}\xi\right|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{47}$$

---

[1] Camassa R and Holm D 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **71** 1661

[2] Michael Fisher. Jevemy Sshiff 1999 *Phys*. *Lett*. A **259** 371

[3] Clarkson P A，Mansfiel E L，Priestley T J 1997 *J*. *Math*. *Phys*. **25** 195

[4] Kraenkel R A，Senthilvelsn M，Zenchu A I 2000 *Phys*. *Lett*. A **41** 3160

[5] Fred Cooper，Harvey Shepard 1994 *Phys*. *Lett*. A **194** 246

[6] Tian L X，Xu G and Liu Z R 2002 *Applied Mathematics and Mechanics* **123** 557P

[7] Rosenau，Hyman M 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **70** 564

[8] Rosenau P 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **73** 1737

[9] Rosenau P 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. A **230** 305

[10] Rosenau P 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. A **275** 193

[11] Dinda P T and Remoissent M 1999 *Phys*. *Rev*. E **60** 6218

[12] Rosneau P and Levy D 1999 *Phys*. *Rev*. *Lett*. A **252** 297

[13] Dey B 1998 *Phys*. *Rev*. E **57** 4733

[14] Wazwaz A M 2002 *Chaos*，*Solitons and Fractals* **13** 161

[15] Wazwaz A M 2002 *Chaos*，*Solitons and Fractals* **13** 1053

[16] Yan Z Y and Bluman G 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **149** 11

[17] Li C H 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1409 (in Chinese)[李朝红 1998 物理学报 **47** 1409]

[18] Zhang J F 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1416 (in Chinese)[张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[19] Yan Z Y，Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1(in Chinese)[闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[20] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵等 1998 物理学报 **47** 353]

Compacton solutions and floating compacton solutions of one type of nonlinear equations*

Yin Jiu-Li　Tian Li-Xin

(*Nonlinear Scientific Research Center of Jiangsu University*, *Zhenjiang*　212013, *China*)

(Received 20 October 2003; revised manuscript received 9 January 2004)

Abstract

Study one type of nonlinear equations, namely generalized Camassa-Holm equation $C(n)$:

$$u_t + ku_x + \beta_1 u_{xxt} + \beta_2 (u^{n+1})_x + \beta_3 u_x (u^n)_{xx} + \beta_4 u (u^n)_{xxx} = 0.$$

Obtain abundant exact solutions by four ansasz, particularly when $k \neq 0$, we obtain compacton solutions; while when $k = 0$, we obtain floating compacton solutions. At last, we also study other forms of fully nonlinear generalized Camassa-Holm equation, and their compacton solutions are governed by nonlinear equations.

Keywords: generalized Camassa-Holm equation, compacton, floating compacton

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10071033), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2002003).