第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2831-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.9, September, 2004

大N近似下玻色-爱因斯坦凝聚体中单个涡旋态的解*

徐 岩[1)2)] 贾多杰[2)3)] 李希国[2)] 左 维[2)] 李发伸[1)]

[1)](兰州大学磁学与磁性材料教育部重点实验室，兰州 730000)

[2)](中国科学院近代物理研究所，兰州 730000)

[3)](西北师范大学理论物理研究所，兰州 730030)

(2003 年 11 月 13 日收到；2003 年 12 月 30 日收到修改稿)

给出了大 N 近似下轴对称、扁椭球状玻色-爱因斯坦凝聚体在轴对称各向异性谐振子势阱中单个涡旋态的一个近似解析波函数，并利用能量泛函变分的方法确定了待定参数 C 与凝聚体总粒子数 N 和凝聚体形状因子 λ 的关系. C 随 N(或 λ)的变化非常缓慢，在 N 和 λ 很大时，C 趋于稳定值 0.321646.

关键词：玻色-爱因斯坦凝聚，GP 泛函，涡旋态

PACC：0365，0570

1. 引 言

自从 1995 年在实验室获得中性原子的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)[1—3]以来，关于 BEC 基态和激发态性质的研究引起了理论和实验工作者的广泛关注. 对于囚禁的稀薄玻色气体的涡旋性质，迄今为止的研究工作主要是在平均场理论的基础上，利用数值模拟方法[4—8]求解自洽的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程[9,10]，并考察其稳态行为和动力学描述. 对于 GP(即非线性 Schrödinger) 方程，除了个别精确解外[11—13]，一般难以求解. 就我们所知，还没有人给出 BEC 涡旋解析波函数的具体形式. Lundh[14]，Sinha[15]等人给出了单个涡旋激发的临界频率的近似公式，

$$\Omega_c \approx \frac{5\hbar^2}{2mR_\perp^2}\ln\left(\frac{0.671R_\perp}{\xi}\right), \tag{1}$$

其中包括一个数值因子 0.671. 事实上，要给出涡旋的精确解析函数是非常困难的[16]. 本文借鉴了第 II 类超导体中研究涡旋核结构的方法[17]，在 Thomas-Fermi 近似(TFA)的基础上引入了调制函数 $\tanh(Cr/\xi)$，给出了粒子数很大情况(大 N 近似)下轴对称、扁椭球状的 BEC 单个涡旋激发态的解析波函数，并利用能量泛函变分的方法确定了试探解中的参数 C，在粒子数 N 和 BEC 形状因子 λ 很大时，C 趋于稳定值 0.321646. 该调制函数 $\tanh(Cr/\xi)$ 在描述第 II 类超导体中的磁通涡旋线(核半经为 nm 量级)时并不理想，它在涡旋核心处的陡度依然不够. 然而，对于稀薄 BEC 气体，涡旋核半经要大得多(μm 量级)，且实验上可以直接观测[6,18]，因此我们采用 $\tanh(Cr/\xi)$ 近似.

2. 大 N 近似下单个涡旋态的解

我们研究处于旋转的各向异性轴对称谐振子势阱中的扁椭球状玻色-爱因斯坦凝聚体，取 BEC 中心为原点，扁椭球纵剖面椭圆短轴(BEC 的旋转对称轴，长为 R_z)方向为 z 轴、长轴(长为 $R_\perp$)方向为 y 轴，建立坐标系. 则谐振子势可表示为

$$V_{\mathrm{tr}}(r,z) = \frac{1}{2}m(\omega_\perp^2 r^2 + \omega_z^2 z^2). \tag{2}$$

零温下 BEC 的稳态行为可用如下自洽的 Gross-Pitaevskii(GP) 平均场能量泛函

$$E[\psi] = \int \mathrm{d}V\left(\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 + V_{\mathrm{tr}}|\psi|^2 + \frac{\hbar^2\kappa^2}{2mr^2}|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4\right) \tag{3}$$

来描述，其中 ψ 为凝聚体的波函数(即 BEC 序参量)，$g = 4\pi\hbar a/m$ 为低温下凝聚体原子间的相互作用强度，a 为 s 波散射长度. 式中第一项为 BEC 动

* 中国科学院'百人计划'基金资助的课题.

能(E_p),第二项为谐振子囚禁势能(E_{ho}),第三项为离心能(E_{ce}),第四项为非线性能(E_{no}),即相互作用平均场能.仿照第Ⅱ类超导体中处理涡旋的方法[17],取如下形式的归一化的单个涡旋态尝试波函数

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\Xi}}\phi_{TF}(r,z)\sqrt{\tanh(Cr/\xi)}\,e^{i\kappa\varphi}, \tag{4}$$

其中 C 是无量纲的待定参数,ξ 为凝聚体的恢复长度,φ 为 r 与 x 轴的夹角(方位角),κ 为涡旋的环绕数;

$$\phi_{TF}(r,z) = \sqrt{[\mu - m(\omega_\perp^2 r^2 + \omega_z^2 z^2)/2]/g} = \sqrt{n_0}(1 - r^2/R_\perp^2 - z^2/R_z^2)$$

为 TFA 下 BEC 的基态波函数,$n_0 = \mu/g = (8\pi a\xi^2)^{-1}$为 TFA 下无涡旋 BEC 的中心密度.$\mu = m\omega_\perp^2 R_\perp^2/2 = m\omega_z^2 R_z^2/2$ 为化学势.Ξ 为归一化常数,由归一化条件

$$\int|\psi|^2 dV = \frac{1}{\Xi}\int|\phi_{TF}|^2\tanh\left(\frac{Cr}{\xi}\right)dV = 1 \tag{5}$$

给出.计算可得

$$\Xi = \frac{8\pi n_0 R_z R_\perp^2}{3x^2}B_{131}(x), \tag{6}$$

其中 $x \equiv CR_\perp/\xi$,函数 $B_{mnl}(x)$定义为

$$B_{mnl}(x) = \int_0^x dy\, y^m(1 - y^2/x^2)^{n/2}\tanh^l(y), \tag{7}$$

其中 m, n, l 为整数.

将尝试波函数(4)式代入能量泛函(3)式,得到各项单粒子平均能量如下:

$$E_p = \frac{\hbar^2\pi n_0 R_z}{m\Xi}\left\{\frac{1}{3}\left[B_{13,-1}(x) - 2B_{131}(x) + B_{133}(x)\right] - 2\left[\frac{x}{3} - \frac{A_{22}(x)}{x^2}\right]\right\}, \tag{8}$$

$$E_{ho} = \frac{4\pi\mu n_0 R_z R_\perp^2}{\Xi x^2}\left[\frac{1}{3}B_{131}(x) - \frac{1}{5}B_{151}(x) + \frac{1}{3x^2}B_{331}(x)\right], \tag{9}$$

$$E_{ce} = \frac{4\pi\hbar^2\kappa^2 n_0 R_z}{3m\Xi}B_{-1,31}(x), \tag{10}$$

$$E_{no} = \frac{2\pi N\mu n_0 R_z R_\perp^2}{\Xi^2 x^2}\left[\frac{1}{3}B_{132}(x) + \frac{1}{5}B_{152}(x) - \frac{1}{3x^2}B_{332}(x)\right], \tag{11}$$

其中函数 $A_{ml}(x) = B_{m0l}(x)$,可由(7)式令指数 $n = 0$ 计算.因此,BEC 中的单粒子平均总能(E)为,

$$\frac{E}{4\pi n_0 R_z R_\perp^2} = \frac{\mu}{\Xi}(\lambda_N F_1(x) + F_2(x)), \tag{12}$$

其中

$$F_1(x) = \left\{\frac{1}{3}\left[B_{13,-1}(x) - 2B_{131}(x) + B_{133}(x)\right] - 2\left[\frac{x}{3} - \frac{A_{22}(x)}{x^2}\right] + \frac{4\kappa^2}{3}B_{-1,31}(x)\right\}/2, \tag{13}$$

$$F_2(x) = \left\{\left[\frac{1}{3}B_{131}(x) - \frac{1}{5}B_{151}(x) + \frac{1}{3x^2}B_{331}(x)\right] + \frac{N}{2\Xi}\left[\frac{1}{3}B_{132}(x) + \frac{1}{5}B_{152}(x) - \frac{1}{3x^2}B_{332}(x)\right]\right\}/2x^2, \tag{14}$$

$$\lambda_N = \frac{\hbar^2}{2mR_\perp^2\mu} = \left(\frac{\xi}{R_\perp}\right)^2. \tag{15}$$

有了能量泛函(12)式,就可以通过能量泛函对 x 变分使能量取极小值确定参数 C 和归一化参数 Ξ,从而得到凝聚体波函数的具体形式.对(12)式变分得

$$[\lambda_N F'_1(x) + F'_2(x)]\Xi = [\lambda_N F_1(x) + F_2(x)]\Xi', \tag{16}$$

显然,(16)式是一个超越方程,需要数值求解.

3. 参数 C 及涡旋的恢复长度 ξ 与 λ 和 N 的关系

定义轴对称 BEC 的形状因子 $\lambda = R_\perp/R_z = \omega_z/\omega_\perp = a_\perp^2/a_z^2$,其中 $a_\perp$, a_z 分别是长轴和短轴方向的谐振子长度,他们与谐振子的平均长度 a_{ho}的关系为 $a_{ho} = \sqrt[3]{a_\perp^2 a_z}$.于是 $a_\perp = \sqrt[6]{\lambda}\,a_{ho}$, $R_\perp = a_\perp(15\lambda Na/a_\perp)^{1/5}$,再利用(15)式及 μ 的表达式可以得到 $\lambda_N = (a_\perp/R_\perp)^4 = (\xi/R_\perp)^2$,即

$$\frac{\xi}{R_\perp} = \left(\frac{a_\perp}{15\lambda Na}\right)^{2/5}. \tag{17}$$

对低温下凝聚了的^{87}Rb 原子,取典型的参数 $a_{ho} = 1\mu$m, $a = 5.77$nm,当 $N = 10^6$, $\lambda = 1$ 时,$\xi/R = 0.0106$.利用上述参数,数值求解方程(16),得到参数 C 与 λ 和 N 的关系如表 1.由表 1 可以看出,参数 C 随 λ(或 N)的增大而非常缓慢地减小,当 λ 和 N 很大时,$C\to 0.321646$,为一个常数.有了参数 C,解析波函数的具体形式就由(4)式完整给出.

表 1　参数 C 与 λ 和 N 的关系

λ \ N	5×10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
1		0.321846	0.321773	0.321683	0.321653	0.321647
5	0.321845	0.321827	0.321710	0.321661	0.321648	0.321646
10	0.321832	0.321795	0.321692	0.321656	0.321648	0.321646
20	0.321802	0.321762	0.321678	0.321653	0.321647	0.321646
50	0.321758	0.321725	0.321666	0.321650	0.321646	0.321646
10^2	0.321730	0.321703	0.321660	0.321649	0.321646	0.321646
10^3	0.321673	0.321663	0.321649	0.321646	0.321646	0.321646

4. 结　论

本文给出了大 N 近似下轴对称、扁椭球状 BEC 中单个涡旋态的一个近似的解析波函数，并利用能量泛函变分的方法确定了待定系数 C 与凝聚体总粒子数 N 和 BEC 形状因子 λ 的关系，在粒子数 N 和 BEC 形状因子 λ 很大时，C 稳定在 0.321646，近似为一常数. 本文的方法仅对球状和轴对称扁椭球状 BEC 中的单个涡旋适用，对长轴为旋转对称轴的椭球状 BEC，数值计算表明能量泛函无法取得极小值，这意味着在该情况下产生的涡旋态不稳定，文献[19]的数值模拟结果显示此时的涡旋在两端会出现扭曲或分叉. 对于 λ 很大的平板状 BEC[20]（算法较本文简单），采用我们的方法所得到的临界频率比(1)式的结果要稍大一些，但是比实验上所观测到的临界频率依然偏小，这是因为我们所计算的是稳定的 BEC 涡旋产生所需的热力学临界频率，而产生热力学上稳定的涡旋需要很长的时间.

[1] Anderson M H *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Bradley C C，Sacker C A，Tollett J J and Hulet R G 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 1687

[3] Davis K B *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3696

[4] Feder D L，Svidzinsky A A，Feter A L and Clark C W 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **86** 564

[5] Rokhsar D 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **79** 2164

[6] Feter A L and Svidzinsky A A 2001 *J*. *Phys*. *Cond*. *Mat*. **13** R 135

[7] Baym G and Pethick C J 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 6

[8] Dalfovo F and Stringari S 1996 *Phys*. *Rev*. A **53** R2477

[9] Pitaevskii L P，Eksp Zh 1961 *Theor*. *Phys*. **40** 646［1972 *Sov*. *Phys*. *JETP* **13** 451］

[10] Gross E P 1961 *Nuovo Cim*. **20** 454
Gross E P 1963 *J*. *Math*. *Phys*. **4** 195

[11] Chen S R and Chen X J 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 882（in Chinese）［陈世荣、陈向军 1999 物理学报 **48** 882］

[12] Yan K Z and Tan W H 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1185（in Chinese）［闫珂柱、谭维翰 1999 物理学报 **48** 1185］

[13] Liu W M，Wu B and Niu Q 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **84** 2294

[14] Lundh E，Pethick C J and Smith H 1997 *Phys*. *Rev*. A **55** 2126

[15] Sinha S 1997 *Phys*. *Rev*. A **55** 4325

[16] Lifshitz E M and Pitaevskii L P 1980 *Statistical Physics*（Pergamon，Oxford，）part II

[17] Sonier J E，Brewer J H and Kiefl R F 2000 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **72** 706

[18] Abo-Shaeer J R，Raman C，Vogels J M and Ketterle W 2001 *Sciences* **292** 476

[19] Aftalion A and Danaila I *Cond-mat*/0303416

[20] Jia D J and Xu Y *Submitted to Phys*. *Rev*. A.

A novel solution to singly quantized vortex in big N Bose-Einstein condensate*

Xu Yan[1)2)] Jia Duo-Jie[2)3)] Li Xi-Guo[2)] Zuo Wei[2)] Li Fa-Shen[1)]

[1)] (*Key Laboratory for Magnetism and Magnetic Materials of the Ministry of Education*, *Lanzhou University*, *Lanzhou* 730000, *China*)

[2)] (*Institute of Modern Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Lanzhou* 730000, *China*)

[3)] (*Institute of Theoretical Physics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730030, *China*)

(Received 13 November 2003; revised manuscript received 30 December 2003)

Abstract

An approximate analytical wave function is presented for an oblate ellipsoidal big N Bose-Einstein condensate (BEC) in axi-symmetric harmonic traps. The relationship between the undetermined parameter C and the total particle number N, the aspect ratio λ of the BEC is obtained by varying the energy functional. The parameter C varies extremely slowly versus N (or λ), and it becomes a fixed value 0.321646 when both N and λ are very large.

Keywords: Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii (GP) functional, vortex state

PACC: 0365, 0570

* Project supported by the "hundred Talents Project" of the Chinese Academy of Sciences.