

三维光晶格中玻色凝聚气体基态波函数 及干涉演化*

徐志君¹⁾ 程 成¹⁾ 杨欢管²⁾ 武 强¹⁾ 熊宏伟¹⁾

¹⁾ 浙江工业大学应用物理系 杭州 310014)

²⁾ 杭州师范学院 杭州 310012)

(2003 年 7 月 3 日收到 2003 年 12 月 14 日收到修改稿)

基于 Gross-Pitaevskii 方程,运用有效化学势概念,研究了囚禁在组合势(由磁阱和三维光晶格组成)中玻色凝聚气体在三维光晶格中的分布规律,并由此得到玻色凝聚气体的归一化基态波函数.在取消组合势和仅取消光晶格而保留磁阱的两种情况下,运用传播子方法求解出玻色凝聚气体密度分布的解析表达式.取消组合势后,理论计算所得到的玻色凝聚气体聚随时间的演化规律与 Greiner 等的实验结果相一致.仅取消光晶格而保留磁阱时,研究表明玻色凝聚气体的干涉模式呈现周期性的振荡行为.此外,在磁阱为各向异性的情况下,对玻色凝聚气体的演化规律进行了讨论.

关键词:玻色凝聚气体,磁阱,光晶格,干涉模式

PACC: 0375, 3280P, 4250

1. 引 言

自 1995 年实现玻色-爱因斯坦凝聚以来^[1-3],对这一物质新态的实验和理论研究有了很大进展^[4-24].最近,囚禁在由磁阱(magnetic trap)和光晶格(optical lattice potential)构成的组合势中的玻色凝聚气体,为研究这一物质新态的许多重要性质(如物质波的干涉、从超流态到绝缘态的量子相变等)提供了很好的理论和实验研究途径^[25-33].

实验上,用三束相互正交并来回反射的激光束形成具有空间周期性的三维光晶格^[27].囚禁在由这种光晶格和磁阱构成的组合势中的玻色气体,在冷却到临界温度以下时,将形成许多子凝聚体.类似于光栅衍射,当组合势或仅光晶格被突然取消时各子凝聚体将膨胀,从而形成衍射图像.对一维光晶格, Pedri 等^[25]已观察到子凝聚体相干形成的三个清晰的干涉主极大, Greiner 等^[26-28]在二维光晶格以及三维光晶格中实现了物质波的干涉,并分别观测到了 9 个和 27 个明晰的干涉主极大.这些实验证实了玻色凝聚气体的相位相干性以及从超流态到绝缘态的

量子相变等理论^[27]. Adhikari 等^[29]基于 Gross-Pitaevskii (G-P)方程直接进行数值计算,获得玻色凝聚气体在三维光晶格中的干涉图样.我们则用传播子方法^[30-32]研究这一问题,求解出了玻色凝聚气体波函数随时间演化的解析表达式.在一维光晶格中,理论结果与实验相一致,并且在仅取消光晶格而保留磁阱的条件下,理论预测也被随后的实验所证实^[33].本文把传播子方法进一步运用于三维光晶格中的玻色凝聚气体波函数的计算,并分别讨论在取消组合势和仅取消光晶格而保留磁阱的条件下物质波干涉演化的规律.

2. 玻色凝聚气体在三维光晶格中的非均匀分布

由于磁阱的束缚,光晶格中玻色凝聚气体原子数分布是不均匀的.对一维光晶格,用有效化学势的方法得到光晶格中原子数分布的规律^[25].本节则直接从 G-P 方程出发,运用有效化学势概念研究了三维光晶格中玻色凝聚气体原子数分布的规律.

俘陷在三维组合势中的玻色凝聚气体,满足的

* 国家自然科学基金(批准号:10205011)资助的课题.

G-P 方程为^[34]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + V_{\text{latt}} + g |\Psi|^2 \right] \Psi, \quad (1)$$

其中 ω_x , ω_y 和 ω_z 分别表示 x , y 和 z 方向的角频率, g 为耦合常数, V_{latt} 为三维光晶格势能, 其表达式为^[27]

$$V_{\text{latt}} = U_0 [\sin^2(qx) + \sin^2(qy) + \sin^2(qz)] \quad (2)$$

其中 $q = 2\pi/\lambda$ 为激光波矢, U_0 为光晶格的深度, 其大小随产生光晶格的激光束的强度增加而增加, 实验上可方便地进行调节. 这里 λ 为激光束的波长, 光晶格的空间周期 $d = \lambda/2$ 可视为两相邻光晶格的间距.

设 σ_x , σ_y 和 σ_z 为子凝聚体在 x , y 和 z 方向的宽度. 实验上, 光晶格的深度 U_0 可达 $22E_r$ ^[27] ($E_r = \hbar^2 q^2/2m$ 为原子反冲能). 由于子凝聚体的宽度 σ_j ($j = x, y, z$) 随光晶格的深度 U_0 增加而减少, 因此相邻子凝聚体的叠加可以忽略, 各子凝聚体可认为是完全相干的, 其化学势 μ 相同. 此时, 组合势中玻色凝聚气体的基态波函数 Ψ 可表示为

$$\Psi = \sum_k \phi_k(x, y, z) \exp(-i\mu t/\hbar), \quad (3)$$

其中 k ($k = \{k_x, k_y, k_z\}$) 表示沿 x , y 和 z 方向的第 k 个光晶格子. 将基态波函数 Ψ 代入(1)式, 得到第 k 个子凝聚体基态波函数 ϕ_k 满足的方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + V_{\text{latt}} + g |\phi_k|^2 \right] \phi_k = \mu \phi_k. \quad (4)$$

对(4)式进行坐标变换 $x - k_x d \rightarrow x$, $y - k_y d \rightarrow y$, $z - k_z d \rightarrow z$, 并将第 k 个光晶格近似地用谐振势能^[27]表示, 则有

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m(\omega_x^2(x + k_x d)^2 + \omega_y^2(y + k_y d)^2 + \omega_z^2(z + k_z d)^2) + \frac{1}{2} m\tilde{\omega}^2(x^2 + y^2 + z^2) + g |\phi_k|^2 \right] \phi_k = \mu \phi_k \quad (5)$$

其中 $\tilde{\omega} = q\sqrt{2U_0/m}$ 为光晶格的角频率. 当光晶格的深度 $U_0 = 10E_r$ 时, 对于⁸⁷Rb 原子, $\tilde{\omega} \approx 1.25 \times 10^5$ Hz, 而磁阱角频率 ω_j ($j = x, y, z$) 的实验值为 150—1500 Hz^[27], 因此有 $\tilde{\omega} \gg \omega_j$. 此时方程(5)可近似为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m\tilde{\omega}^2(x^2 + y^2 + z^2) \right] \phi_k = \mu \phi_k,$$

$$+ g |\phi_k|^2 \phi_k = \mu \phi_k, \quad (6)$$

其中

$$\mu_k = \mu - \frac{1}{2} md^2(\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2)$$

定义为有效化学势, 其值与光晶格子 k 有关. 设

$$\mu = \frac{1}{2} md^2(\omega_x^2 k_{mx}^2 + \omega_y^2 k_{my}^2 + \omega_z^2 k_{mz}^2) = \frac{1}{2} md^2 \omega_{\text{ho}}^2 k_m^2,$$

其中 $\omega_{\text{ho}} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ 为磁阱谐振角频率的几何平均值, 则有效化学势为

$$\mu_k = \frac{1}{2} md^2[\omega_{\text{ho}}^2 k_m^2 - (\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2)]. \quad (7)$$

根据有效化学势和粒子数的关系 $\mu_k \propto N_k^{5/2}$, 可得位于第 k 个光晶格子中的原子数 N_k 与位于中心光晶格子 ($k_x = k_y = k_z = 0$) 中的原子数 N_0 之比为

$$\frac{N_k}{N_0} = \left(1 - \frac{\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2}{\omega_{\text{ho}}^2 k_m^2} \right)^{5/2}. \quad (8)$$

(8)式表明玻色凝聚气体的原子数分布是非均匀的, 它不仅与磁阱的性质(如各向同性的球对称磁阱 ($\omega_x = \omega_y = \omega_z$), 各向异性的“碟形”(disk-shaped, $\omega_x = \omega_y \ll \omega_z$) 或“雪茄形”(cigar-shaped, $\omega_x = \omega_z \gg \omega_y$) 磁阱等有关, 还与光晶格的特征有关. 因此, 组合势中各子凝聚体的有效化学势也不再相同.

(8)式中的 k_m 值由求和方程 $\sum_k N_k = N$ 来确定, 其中的 N 和 N_k 分别表示总原子数和第 k 个光晶格子中的原子数, 求和号带“'”表示对 k 求和要满足

$$\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2 \leq \omega_{\text{ho}}^2 k_m^2$$

这一限制条件. 联立(6)(7)(8)式, 并运用 Pedri 等^[25]在研究一维光晶格中玻色凝聚气体的方法, 求得

$$k_m = \left(\frac{192Na}{\tilde{a}_{\text{ho}} \pi^2 \omega_{\text{ho}}^5 d^5} \right)^{1/8} \left(\frac{\hbar \tilde{\omega}}{m} \right)^{5/16}, \quad (9)$$

式中的 a 为 s 波散射波长, $\tilde{a}_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\tilde{\omega}}$ 为光晶格的谐振长度. 而决定 x , y 和 z 方向光晶格子数的 k_{mx} , k_{my} 和 k_{mz} 值, 则由椭圆方程

$$\frac{k_{mx}^2}{\left(\frac{\omega_{\text{ho}} k_m}{\omega_x} \right)^2} + \frac{k_{my}^2}{\left(\frac{\omega_{\text{ho}} k_m}{\omega_y} \right)^2} + \frac{k_{mz}^2}{\left(\frac{\omega_{\text{ho}} k_m}{\omega_z} \right)^2} = 1 \quad (10)$$

确定. 显然, 由光晶格形成的子凝聚体数目为 $4\pi k_m^3/3$.

完全相干的各子凝聚体处于超流态, 由于量子

隧道效应,原子可以从一个光晶格子运动到另一个光晶格子,所以上述讨论各光晶格子中的原子数应视为平均原子数.

3. 原子基态波函数及其演化规律

3.1. 玻色凝聚气体的初态归一化波函数

子凝聚体宽度主要由光晶格的深度 U_0 即光晶格的角频率 $\tilde{\omega}$ 决定,由于 $\tilde{\omega} \gg \omega_j$, 则有 $\sigma_x \approx \sigma_y \approx \sigma_z \approx \sigma$. 在此条件下,子凝聚气体在坐标空间的密度分布可近似看作高斯分布. 则组合势中玻色凝聚气体的初态 ($t=0$) 归一化波函数为

$$\Psi(\mathbf{r}, t=0) = A_n \sum_k' \left(1 - \frac{\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2}{\omega_{ho}^2 k_m^2} \right)^{5/4} \times \exp\left[-\left((x - k_x d)^2 / 2\sigma^2 + (y - k_y d)^2 / 2\sigma^2 + (z - k_z d)^2 / 2\sigma^2 \right) \right], \quad (11)$$

其中归一化常数 $A_n = 8(\sqrt{5}\sigma^{3/2}\pi^{7/4}k_m^{3/2})$. (11) 式中的因子 $\left[1 - (\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2) / (\omega_{ho}^2 k_m^2) \right]^{5/4}$ 反映了玻色凝聚气体的平均原子数在组合势中的非均匀分布.

3.2. 取消组合势后基态波函数随时间的演化

根据文献 [27] 采用的实验参数,计算表明子凝聚体的基态能 $\hbar\tilde{\omega}/2$ 比有效化学势 μ_k 大得多. 此时,非相互作用模型是一个很好的近似. 在一维情况下,这种近似已被实验所证实^[25]. 因此,在取消组合势后可以忽略原子间的相互作用,并运用传播子方法求得任意时刻 t 玻色凝聚气体的基态波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t) = A_n \sum_k' \Psi_k(\mathbf{r}, t)$, 其解释表达式为^[35]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t=0) \Psi(\mathbf{r}_1, t=0) d\mathbf{r}_1, \quad (12)$$

其中

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t=0) = \prod_{j=x,y,z} K_j(r_j, t; r_{1j}, t=0)$$

为传播子.

在取消组合势后的自由空间,传播子第 j ($j = x, y, z$) 个分量为

$$K_j(r_j, t; r_{1j}, t=0) = \left(\frac{2\pi i \hbar t}{m} \right)^{-1/2} \exp\left(\frac{i m (r_j - r_{1j})^2}{2 \hbar t} \right). \quad (13)$$

代入(12)式并积分得

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A_n \sum_k' \left(1 - \frac{\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2}{\omega_{ho}^2 k_m^2} \right)^{5/4} \times \prod_{j=x,y,z} \theta_j(r_j, t), \quad (14)$$

其中

$$\theta_j(r_j, t) = \left(\frac{1}{1 + i\gamma} \right)^{1/2} \exp\left[\frac{(i\gamma - 1)(r_j - k_j d)^2}{2\sigma^2(1 + \gamma^2)} \right],$$

而 $\gamma = \hbar t / m\sigma^2$ 为无量纲参数.

3.3. 仅取消光晶格而保留磁阱时基态波函数随时间的演化

当磁阱保留时,玻色凝聚气体随时间的演化要在三维谐振子势中求解. 其传播子第 j ($j = x, y, z$) 个分量为

$$K_j(r_j, t; r_{1j}, t=0) = \left[\frac{m\omega_j}{2\pi i \hbar \sin\omega_j t} \right]^{1/2} \times \exp\left[\frac{i m \omega_j}{2 \hbar \sin\omega_j t} \left[(r_j^2 + r_{1j}^2) \cos\omega_j t - 2r_j r_{1j} \right] \right]. \quad (15)$$

代入(12)式并积分得

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A_n \sum_k' \left(1 - \frac{\omega_x^2 k_x^2 + \omega_y^2 k_y^2 + \omega_z^2 k_z^2}{\omega_{ho}^2 k_m^2} \right)^{5/4} \times \prod_{j=x,y,z} \Theta_j(r_j, t), \quad (16)$$

其中

$$\Theta_j(r_j, t) = \sqrt{\frac{1}{\sin\omega_j t (\tan\omega_j t + i\beta_j)}} \times \exp\left[-\frac{(k_j^2 d^2 + r_j^2) \cos\omega_j t - 2dk_j r_j + ir_j^2 \sin\omega_j t \times 1/\beta_j}{2\sigma^2 (\cos\omega_j t + i\beta_j \sin\omega_j t)} \right]. \quad (17)$$

(17) 式中的 $\beta_j = \hbar / m\omega_j \sigma^2$ 为无量纲参数.

由方程(17)可知,仅取消光晶格后的基态波函数是周期函数,周期为 $2\pi/\omega_j$, 则密度分布 $n(\mathbf{r}, t)$ 的周期 $T_j = \pi/\omega_j$. 对各向异性磁阱,在 x, y 和 z 方向的周期不同. 对各向同性球对称磁阱,当 $t_m = (2m-1)\pi/2\omega_x$ (m 为正整数) 时,在 $\mathbf{r}=0$ 处密度达到最大值,其大小为

$$|\Psi(\mathbf{r}=0, t_m)|^2 = \frac{A_n^2}{\beta_x \beta_y \beta_z} \left(\frac{20\pi^{3/2} k_m^3 \Gamma(1/4)}{231 \Gamma(3/4)} \right)^2, \quad (18)$$

其中

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

可见,仅取消光晶格后,由于磁阱的束缚,玻色凝聚

气体的干涉模式呈现出周期性的振荡行为.

4. 物质波干涉及干涉边峰的运动方程

取消组合势或仅取消光晶格后,各子凝聚体将膨胀而导致相干叠加,出现干涉现象.在求得任意时刻的波函数(14)和(16)式后,便可得到物质波干涉结果,亦即原子数密度分布

$$n(\mathbf{r}, t) = N \int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}. \quad (19)$$

为进一步讨论物质波干涉随时间的演化规律,我们在动量空间研究玻色凝聚气体的密度分布.由于光晶格在空间分布的周期性,通过傅里叶变换可求得动量空间基态波函数 $\Psi_0(p_x, p_y, p_z)$,即

$$\Psi_0(p_x, p_y, p_z) = \phi_0(p_x, p_y, p_z) \times \frac{\text{sin}[(2k_{mx} + 1)p_x d/2\hbar]}{\text{sin}p_x d/2\hbar} \times \frac{\text{sin}[(2k_{my} + 1)p_y d/2\hbar]}{\text{sin}p_y d/2\hbar} \times \frac{\text{sin}[(2k_{mz} + 1)p_z d/2\hbar]}{\text{sin}p_z d/2\hbar} \quad (20)$$

其中 $\phi_0(p_x, p_y, p_z) \sim \exp[-(p_x^2\sigma^2 + p_y^2\sigma^2 + p_z^2\sigma^2)/2\hbar^2]$.由此可知,动量分布在 $p_j = \frac{2\pi n_j \hbar}{d}$ 处具有峰值 (n_j 为整数),其宽度近似为 $\Delta p_j \approx \pi \hbar (2k_{mj} + 1)d$.

对 n_j 不为零的动量峰,在坐标空间将出现相应的干涉边峰.当组合势或仅光晶格被取消后,边峰的初速度可用经典近似表示为 $v_j = p_j/m$.由此可求得边峰中心在坐标空间的运动方程.

取消组合势后,干涉边峰在坐标空间作匀速运动,即

$$\mathbf{r}_b = \frac{2\pi n_x \hbar t}{md} \mathbf{e}_x + \frac{2\pi n_y \hbar t}{md} \mathbf{e}_y + \frac{2\pi n_z \hbar t}{md} \mathbf{e}_z. \quad (21)$$

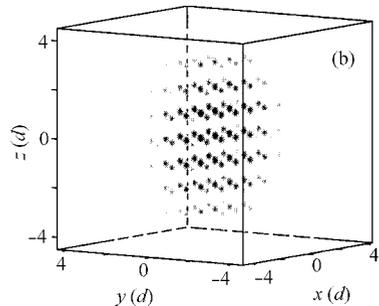
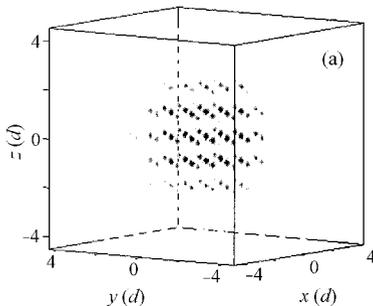


图1 组合势中玻色凝聚气体密度分布($t=0$) (a)球对称磁阱 (b)碟形磁阱

仅取消光晶格,磁阱仍保留,边峰中心作谐振运动,即

$$\mathbf{r}_m = \frac{2\pi n_x \hbar}{m\omega_x d} \text{sin}(\omega_x t) \mathbf{e}_x + \frac{2\pi n_y \hbar}{m\omega_y d} \text{sin}(\omega_y t) \mathbf{e}_y + \frac{2\pi n_z \hbar}{m\omega_z d} \text{sin}(\omega_z t) \mathbf{e}_z. \quad (22)$$

可见,当磁阱保留时,干涉边峰出现周期性的谐振运动.另外,从动量空间的密度分布 $n(p_x, p_y, p_z) = |\phi_0(p_x, p_y, p_z)|^2$,还可直接获得边峰原子数 ($n_j \neq 0$)与中心峰 ($n_j = 0$)原子数的比值,即

$$P_n = \exp[-4\pi^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\sigma^2/d^2]. \quad (23)$$

此式是选择实验参数以便能清晰地观测到干涉边峰的重要依据之一.

我们用文献[27]的实验参数,根据方程(14),(16)和(18)可方便地得到玻色凝聚气体随时间演化的干涉图样.其参数为:激光波长 $\lambda = 852 \text{ nm}$,光晶格深度 $U_0 = 10E_r$,玻色凝聚体包含 $N = 10^5$ 个⁸⁷Rb原子.磁阱参数分为两种情况:一为球对称磁阱, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 150 \text{ Hz}$;另一为“碟形”磁阱, $\omega_x = \omega_z = 150 \text{ Hz}$, $\omega_y = 2\omega_x$.由于各个光晶格子中处于基态的原子数比较少,各子凝聚体的宽度用 $\sigma = \sqrt{\hbar/2m\tilde{\omega}}$ 来近似.

图1为 $t=0$ 时基态波函数的密度分布,图1(a)为球对称磁阱,图1(b)为“碟形”磁阱(本文中密度均以 NA_n^2 为单位,其大小与灰度成正比;空间坐标 x, y, z 均以 d 为单位).图1清楚地显示了组合势中初态玻色凝聚体的密度分布,对“碟形”磁阱, y 方向对凝聚体的束缚比 x 和 z 方向强,凝聚体呈现“碟形”.当 $\alpha = \omega_y/\omega_x$ 取不同值时,初态凝聚体的形状和空间分布随 α 变化, α 越大,“碟形”越扁.

图2为取消组合势后,干涉图样在自由空间随

时间的演化(球对称磁阱).图2(a)~(d)分别对应 t



$= 0, 0.1\pi/\omega_x, 0.3\pi/\omega_x, 0.5\pi/\omega_x$ 时刻干涉图样在空间的分布. $t = 0$ 时由于坐标尺度关系, 看不出初态各子凝聚体的密度分布的细节. 当 $t = 0.1\pi/\omega_x$ 时 (图 2(b)) 理论上还存在 $n_j = \pm 3$ 的边峰, 但 $n_j = \pm 2$ 的峰值已很小, $n_j = \pm 3$ 显现不出. 实验上由于测量精度所限, 也难以检测到 $n_j = \pm 2, \pm 3$ 的边峰. 当 $t = 0.3\pi/\omega_x$ 和 $t = 0.5\pi/\omega_x$ 时, 图 2(c) 和图 2(d) 表明各子凝聚体膨胀相干叠加形成了 2π ($n_j = 0, \pm$

1) 个主极大, 与 Greiner 等人在实验中观测到的结果 (文献 [27] 图 1) 一致. 图 3 表示“碟形”磁阱条件下干涉图样的形成及随时间的演化. 由于磁阱各向异性 ($\omega_y = 2\omega_x = 2\omega_z$), 初始时刻凝聚体基态能量大小沿各个方向分布不同, 因此, 一旦取消组合势, 子凝聚体自身向各个方向膨胀的初速度不一样, 即沿 y 方向膨胀速度快于沿 x 和 z 方向, 因而干涉极大呈现出椭球状 (长轴为 y 轴).

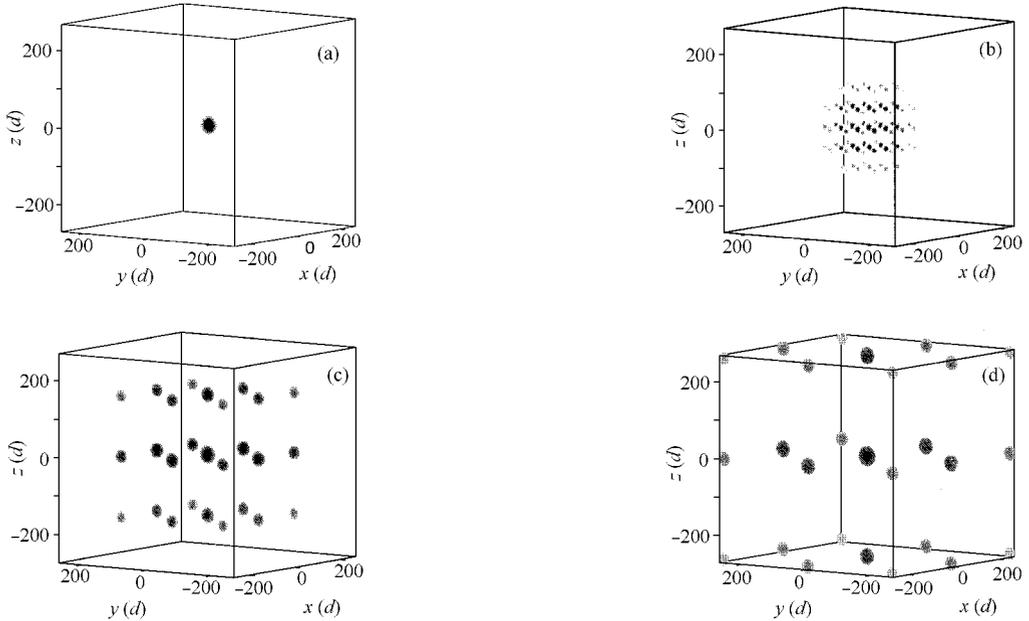


图 2 取消组合势后, 干涉边峰随时间的演化(球形磁阱) (a) $t = 0$ (b) $t = 0.1\pi/\omega_x$ (c) $t = 0.3\pi/\omega_x$ (d) $t = 0.5\pi/\omega_x$

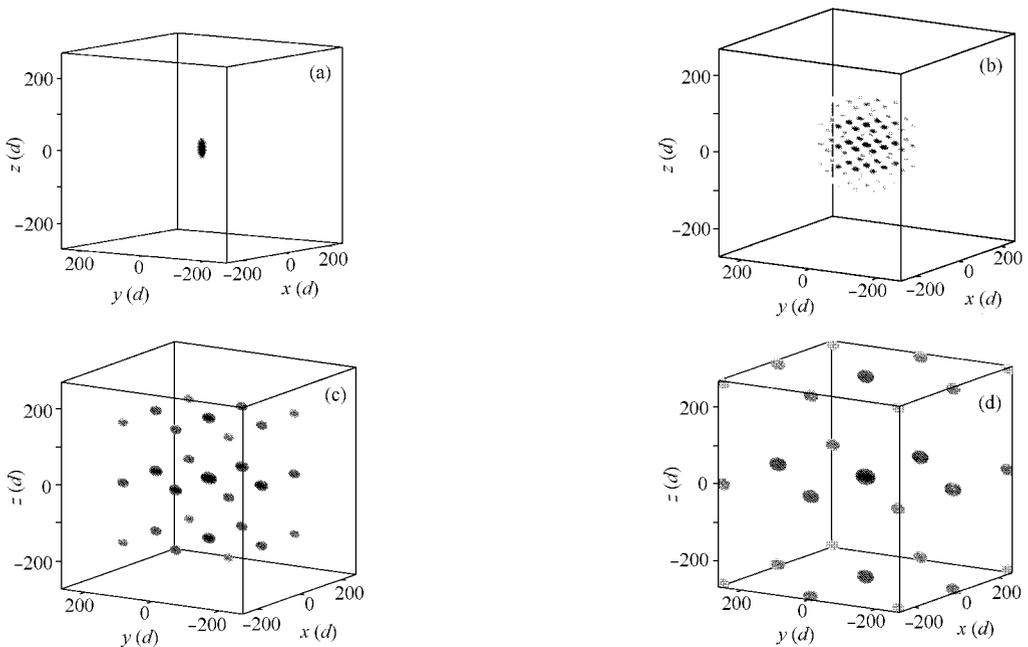


图 3 取消组合势后, 干涉边峰随时间的演化(“碟形”磁阱) (a) $t = 0$ (b) $t = 0.1\pi/\omega_x$ (c) $t = 0.3\pi/\omega_x$ (d) $t = 0.5\pi/\omega_x$

图 4 为仅取消光晶格而保留磁阱时玻色凝聚气体干涉图样随时间的演化(球对称磁阱).取消光晶格后,子凝聚体开始膨胀,相干叠加形成干涉边峰,至 $t = 0.5\pi/\omega_x$ 时干涉边峰运动到最远处,由于磁阱的限制,然后开始收缩,至 $t = \pi/\omega_x$ 时收缩到中心处,随后又开始膨胀.如果不考虑损耗,干涉边峰将出现周而复始的简谐运动,其周期为 $t = \pi/\omega_x$.图 5 为“碟形”磁阱条件下干涉边峰出现的振荡行为.当 $t = 0.1\pi/\omega_x$ 时,可见到 $n_j = \pm 1$ 和 ± 2 的边峰,但 $n_j = \pm 2$ 时峰值已很小.特别是当 $t = 0.4\pi/\omega_x$ 时,由于 $\omega_y = 2\omega_x = 2\omega_z$,干涉边峰沿各个方向运动的周期 T_j

不同,即 $T_x = T_z = 2T_y$,此时 y 方向 $n_y = \pm 2$ 的边峰又出现了.当 $t = 0.5\pi/\omega_x$ 时, x (或 z)方向的边峰到达最远处,而 y 方向的边峰收缩到中心,已完成了一个振荡.另外,由于存在磁阱,相干叠加形成的干涉边峰密度分布除了与初态凝聚气体的能量分布有关外,还要受到磁阱的束缚.在 $t = 0 \sim T_y/2$ 阶段(亦即 $t = 0 \sim 0.25\pi/\omega_x$),基态能量起主要作用,干涉边峰的形状与图 3 类似,其椭球的长轴是 y 轴;在 $t = T_y/2 \sim T_y$ 阶段(亦即 $t = 0.25\pi/\omega_x \sim 0.5\pi/\omega_x$),磁阱的束缚起主要作用,干涉边峰密度分布在 y 方向受到更强的限制,其椭圆形的长轴变为 x (或 z)轴.

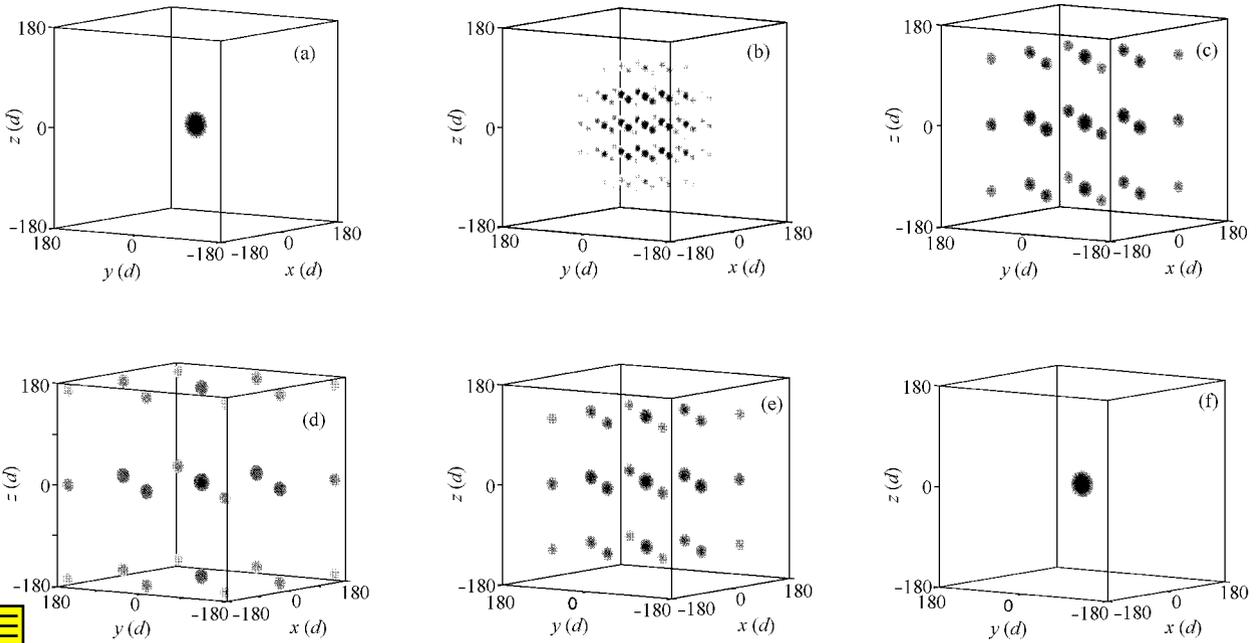
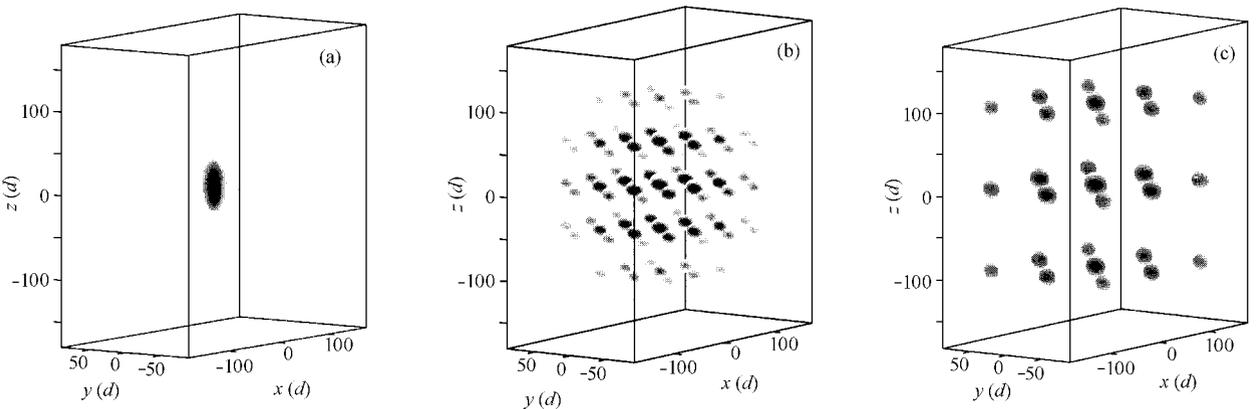


图 4 仅取消光晶格后,干涉边峰随时间演化 (a) $t = 0$ (b) $t = 0.1\pi/\omega_x$ (c) $t = 0.25\pi/\omega_x$ (d) $t = 0.5\pi/\omega_x$ (e) $t = 0.75\pi/\omega_x$ (f) $t = 1.0\pi/\omega_x$



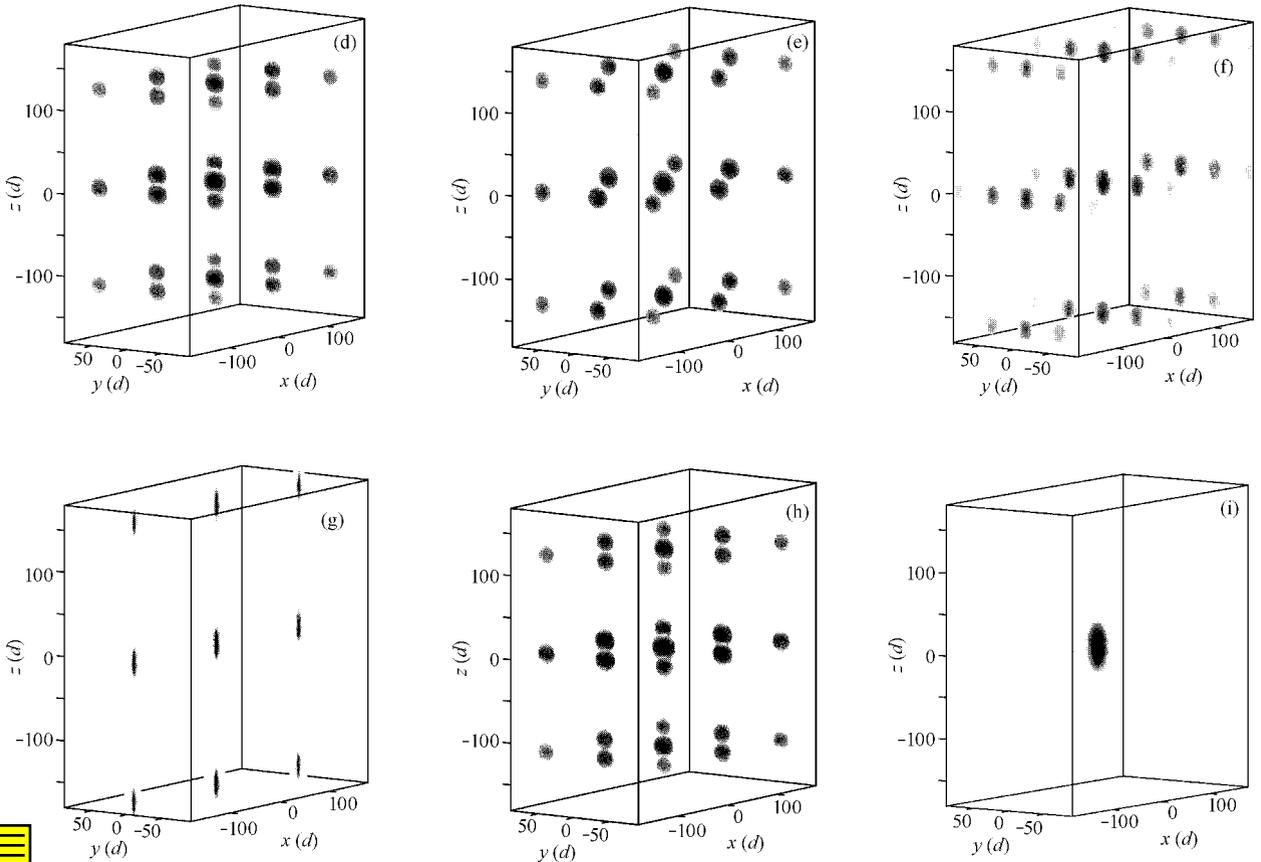


图 5 仅取消光晶格后,干涉图样随时间的演化 (a) $t=0$ (b) $t=0.1\pi/\omega_x$ (c) $t=0.2\pi/\omega_x$ (d) $t=0.25\pi/\omega_x$ (e) $t=0.3\pi/\omega_x$ (f) $t=0.4\pi/\omega_x$ (g) $t=0.5\pi/\omega_x$ (h) $t=0.75\pi/\omega_x$ (i) $t=1.0\pi/\omega_x$

5. 结果及讨论

综上所述,我们从 G-P 方程出发,研究了组合势中玻色凝聚气体在三维光晶格中的分布.在取消组合势和仅取消光晶格而保留磁阱两种情况下,用传播子方法得到玻色凝聚气体波函数的解析表达式并由此研究了玻色凝聚气体的干涉演化规律.在动量空间中讨论了玻色凝聚气体的密度分布,并得到干涉边峰的运动方程.此外还对各向同性磁阱和各向异性磁阱的干涉模式进行了讨论.特别是在仅取消光晶格而保留磁阱时物质波干涉模式出现的振荡现

象,为进一步探索干涉边峰的碰撞这一重要物理现象提供了丰富的理论和实验研究手段.在一维光晶格中,实验上已观测到两个边峰碰撞现象^[33].在三维光晶格中,实验上可通过调节 ω_x , ω_y 和 ω_z 的值实现多个干涉边峰的碰撞现象.同样,本文的理论也适合讨论在各向异性的“雪茄形”磁阱中玻色凝聚气体的干涉演化规律和碰撞现象的研究.另外需要提及的是,当光晶格的深度 U_0 值进一步增加时,各子凝聚体间的势垒升高,量子隧道效应将减弱,相位相干性消失,玻色凝聚气体也将从超流态向 Mott 绝缘态转变.此时取消光晶格将得不到干涉演化图样^[27].

[1] Anderson M H *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Davis K B *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[3] Bradley C C *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[4] Orzel C *et al* 2001 *Science* **291** 5512

[5] Wu Y *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2200

[6] Wu Y, Saldana J and Zhu Y 2003 *Phys. Rev. A* **67** 013811

[7] Wu Y, Wang X and Sun C 2002 *Phys. Rev. A* **62** 063603

[8] Wu Y *et al* 2000 *Phys. Rev. A* **61** 034604

[9] Wu Y and Yang X 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1410

[10] Liu S J *et al* 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1202

- [11] Huang G X ,Szeftel J and Shanhua Zhu 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053605
- [12] Huang G X ,Makarov V A and Velarde M G 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023604
- [13] Huang H *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2923
- [14] Liu W M ,Wu B and Niu U 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [15] Li Y Q *et al* 2003 *Europhys. Lett.* **61** 368
- [16] Li M Z and Wang Y Z 2001 *Phys. Rev. A* **64** 045601
- [17] Xiong H W *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033609
- [18] Xiong H W *et al* 2002 *J. Phys. B* **35** 2105
- [19] Xiong H W *et al* 2002 *Phys. Lett. A* **301** 203
- [20] Xiong H W *et al* 2003 *Phys. Rev. A* **67** 055601
- [21] Xiong H W *et al* 2001 *J. Phys. B* **34** 4203
- [22] Liu S J *et al* 2000 *J. Phys. B* **33** 3911
- [23] Hu Z F ,Du C G and Li S Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 708
- [24] Xie B H and Jing H 2002 *China. Phys.* **11** 115
- [25] Pedri P *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401
- [26] Greiner M *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 160405
- [27] Greiner M *et al* 2002 *Nature* **415** 39
- [28] Greiner M *et al* 2002 *Nature* **419** 51
- [29] Adhikari S K *et al* *Phys. Lett. A* **301** 229
- [30] Xiong H W *et al* 2002 *J. Phys. B* **35** 4863
- [31] Liu S J Xiong H W Xu Z J and Huang G X 2003 *J. Phys. B* **36** 2083
- [32] Xu Z J *et al* 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 611
- [33] Müller J H *et al* cond-mat/0211079
- [34] Dalfovo F *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [35] Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path integrals* (New York :McGrawHill)

The ground-state wave function and evolution of the interference pattern for a Bose-condensed gas in 3D optical lattices^{*}

Xu Zhi-Jun¹⁾ Cheng Cheng¹⁾ Yang Huan-Song²⁾ Wu Qiang¹⁾ Xiong Hong-Wei¹⁾

¹⁾*Department of Applied Physics ,Zhejiang University of Technology ,Hangzhou 310032 ,China)*

²⁾*Hangzhou Teachers College ,Hangzhou 310012 ,China)*

(Received 3 July 2003 ; revised manuscript received 14 December 2003)

Abstract

Based on the Gross-Pitaevskii equation and by using the effective chemical potential ,we study the distribution of the Bose-condensed gas in the combined potentials (magnetic trap and three-dimensional optical lattices). The normalized ground-state wave function is given from the distribution of the Bose-condensed gas. The analytical expression of the density distribution of the Bose-condensed gas is given by using the propagator method when the combined potentials and only the optical lattices are switched off ,respectively. When the combined potentials are switched off ,the theoretical results of this work agree well with the experiment by Greiner *et al*. When only the optical lattices are switched off ,it is shown that the interference pattern will oscillate in the magnetic trap. In addition ,the evolution of the interference pattern is also investigated in the case of anisotropic magnetic trap.

Keywords : Bose-condensed gas , magnetic trap , optical lattices , interference pattern

PACC : 0375 , 3280P , 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grand No. 10205011).