

基于小波变换的混沌信号相空间重构研究*

游荣义¹⁾ 陈 忠²⁾ 徐慎初²⁾ 吴伯信²⁾

¹⁾ 集美大学物理系, 厦门 361021)

²⁾ 厦门大学物理系, 厦门 361005)

(2003 年 10 月 15 日收到, 2003 年 12 月 12 日收到修改稿)

应用小波变换和非线性动力学方法研究了混沌信号在相空间中的行为, 指出混沌时间序列的小波变换实质上是在重构的相空间中, 混沌吸引子向小波滤波器向量所张的空间中的投影, 与 Packard 等人提出的相空间重构方法本质上是一致的. 实验结果表明, 混沌信号经过小波变换后, 吸引子轨迹与原有轨迹具有相似的结构, 同时, 系统的关联维数、Kolmogorov 熵等非线性不变量仍然得到保留. 这些结果表明, 利用小波变换研究混沌信号是有效的.

关键词: 小波变换, 相空间重构, 混沌信号, 脑电信号

PACC: 0545, 0540

1. 引 言

小波变换和混沌理论是当今非线性科学领域的研究热点, 将两者结合起来研究非线性问题具有其潜在的优势. 混沌信号一般采用非线性动力学方法加以研究. 常用的方法包括关联维数、最大 Lyapunov 指数、Kolmogorov 熵和 Poincare 映射等. 这些研究方法的一个重要步骤就是从一维时间序列中重构原系统的相空间. 基本上都是采用 Packard 等人提出的时间延迟法^[1, 2]. 相空间重构是利用系统过去的经历来构造系统的状态, 是混沌时间序列分析的一个普遍接受的标准做法. 经过相空间重构后, 在仅仅测量到单变量时间序列的情况下, 能有效地测量动力学系统深层次的自变量的变化. 同时, 系统的许多不变量, 如分维、Lyapunov 指数以及 Kolmogorov 熵等能得到充分保留. 但是, 在相空间重构过程中, 重构参数 (即延迟时间 τ 和嵌入维数 m) 的确定既重要又困难. 表现在重构参数的不同选择, 对测算系统的不变量带来很大的影响, 不同的参数计算出的结果差异有时会很很大. 因此, 研究人员对此进行了大量研究, 也提出种种的参数确定方法和重构方法^[3, 4]. 其中一种普遍采用确定延迟时间 τ 的方法是以信号自相关函数第一个过零点的采样点数为 τ 的取值^[4]. 可

是, 像 Lorenz 吸引子这样的系统, 任一分量的自相关函数是很难过零点的, 而脑电 (EEG, electroencephalogram) 信号的自相关函数则只需 4—8 个采样点即出现第一个过零点. 可见, 任何一种方法都有其局限性, 应根据系统的特点而定. 本文从非线性动力学系统的相空间重构的观点来阐明混沌信号的小波变换的物理本质. 指出混沌时间序列的小波变换实质上是在重构的相空间中, 混沌吸引子向小波滤波器向量所张的空间中的投影, 与 Packard 等人提出的相空间重构方法本质上是一致的. 混沌吸引子的各个不变量也是一致的. 对 Lorenz 吸引子和脑电信号的实验结果证明了这一观点是正确的.

2. 混沌信号的相空间重构

设 X 为一向量矩阵, 其每一行为相空间向量, 即有 $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$, 其中, X_i 表示系统在离散时间 i 的状态. 对长度为 L 点的时间序列 $[x_1, x_2, \dots, x_L]$, X_i 为

$$X_i = [x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}]^T, \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, τ 是延迟时间, m 是嵌入维, 且有 $N = L - (m - 1)\tau$. 研究表明, 脑电信号的延迟时间 τ 可以采用信号自相关函数第一个过零点的采样点数, 其值一般在 4—8 之间, 而嵌入维 m 取

* 福建省自然科学基金 (批准号: 0310028) 资助的课题.

4—30.对 Lorenz 吸引子,采用信号自相关函数第一个过零点的采样点数为 τ 的取值是不合适的.用 Lorenz 吸引子的任一分量来重构原吸引子时,计算结果表明,Lorenz 吸引子对重构维数 m 的选择不敏感,但对延迟时间 τ 的选择则很敏感, m 的取值可以在 5—30 之间变化,而 τ 的选择并不像有些文献所介绍的那么简单.它还依赖于用 Runge-Kutta 法求解 Lorenz 方程组时所采用的计算步长和初始值.一般来说,计算步长越小, τ 的取值应越大,反之越小.如对 Lorenz-1 系统,计算步长为 0.001 时, τ 可取 50—100 之间的值.计算步长为 0.01 时, τ 可取 2—20 之间的值.为了说明 Lorenz 吸引子对重构参数 τ 和 m 的不同敏感性,表 1 给出 Lorenz-1 的关联维数计算结果.随着参数 τ 的变化(表 1 中的列),关联维数值变化波动较大,而随着参数 m 的变化(表 1 中的行),关联维数值变化则较平稳.计算最大 Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵等特征量也得出相同的结果.

表 1 Lorenz-1 关联维数在不同重构参数下的计算结果

	$m=6$	$m=8$	$m=10$	$m=12$	$m=14$	$m=16$	$m=18$	$m=20$
$\tau=6$	2.048	2.051	2.053	2.056	2.058	2.054	2.051	2.046
$\tau=8$	2.036	2.038	2.034	2.035	2.038	2.036	2.032	2.028
$\tau=10$	2.014	2.027	2.008	2.004	1.996	1.985	1.976	1.968
$\tau=12$	1.884	1.864	1.858	1.847	1.832	1.812	1.784	1.776
$\tau=14$	1.743	1.701	1.696	1.703	1.682	1.644	1.636	1.631
$\tau=16$	1.689	1.662	1.654	1.648	1.618	1.587	1.562	1.536

3. 混沌信号的小波变换

对于离散混沌信号 $[x_1, x_2, \dots, x_N]$,采用离散二进小波变换,则尺度为 j 时的平滑逼近信号和细节信号分别为^[5,6]

$$s_k^j = \sum_n h(n-2k)x_n^{j-1}, \quad (2)$$

$$d_k^j = \sum_n g(n-2k)x_n^{j-1}, \quad (3)$$

其中 h 为低通滤波器系数, g 为带通滤波器系数, $k=1, 2, \dots, N$.可以表示为向量形式

$$\begin{aligned} S^j &= H \times X^{j-1}, \\ D^j &= G \times X^{j-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中滤波器向量为

$$H = [h_{-M} h_{-(M-1)} \dots h_{-1} h_0 h_1 \dots h_{(M-1)} h_M],$$

$$G = [g_{-M} g_{-(M-1)} \dots g_{-1} g_0 g_1 \dots g_{(M-1)} g_M].$$

由于在计算(2)(3)式时,尺度为 j 时的平滑逼近信号和细节信号是由尺度为 $j-1$ 时的信号按间隔 $\tau_j = 2^{j-1}$ 进行抽取后再与滤波器系数相乘的.所以(4)式写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} s_1^j \\ s_2^j \\ s_3^j \\ \vdots \\ s_N^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{j-1} & x_{1+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{1+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ x_2^{j-1} & x_{2+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{2+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ x_3^{j-1} & x_{3+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{3+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^{j-1} & x_{N+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{N+(m-1)\tau_j}^{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} d_1^j \\ d_2^j \\ d_3^j \\ \vdots \\ d_N^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{j-1} & x_{1+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{1+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ x_2^{j-1} & x_{2+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{2+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ x_3^{j-1} & x_{3+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{3+(m-1)\tau_j}^{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^{j-1} & x_{N+\tau_j}^{j-1} & \dots & x_{N+(m-1)\tau_j}^{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $j=1, 2, \dots, J$ 为各阶小波变换的尺度.由(5),(6)式右边 $N \times m$ 矩阵的第 i 个向量为

$$X_i^{j-1} = [x_i^{j-1} \quad x_{i+\tau_j}^{j-1} \quad \dots \quad x_{i+(m-1)\tau_j}^{j-1}] \quad (7)$$

和(1)式比较可以看出(7)式表示的每一个向量就是原始信号在相空间重构的结果,只是延迟时间 τ_j 是变化的,随尺度 j 而变.而嵌入维数 m 由小波滤波器的长度确定,即 $m=2M+1$.只要系统的分形维不大于 M ,则重构维 m 是满足 Takens 定理的^[2].如果系统的分形维大于 M ,则为了满足嵌入定理,必须增加小波滤波器的长度.一般可有两条途径:其一,可以在滤波器向量的两端增加有限个零而不影响小波变换的效果.其二,选择合适的小波,如三次 B 样条小波, Daubechies 小波等.同时,由(5)(6)式可以看出,每一尺度的平滑信号和细节信号是由重构信号向滤波器向量投影的结果.这样,平滑信号向量和细节信号向量的每一分量(即 s 矩阵和 d 矩阵的每一元素)成为重构向量(7)各分量的线性组合.但线性组合不会改变系统原有的动力学特征,因为系统作线性变换后,其拓扑结构是等价的,实验结果也表明了这点.

4. 实验结果

4.1. Lorenz 系统的相图

为便于比较,首先考察 Lorenz 吸引子的行为.本

文以 Lorenz-1 为例,采用四阶 Runge-Kutta 法计算,计算步长为 0.001, X, Y, Z 各分量采样点数为 40000, 取中间的 30000 个采样点. 以其中一个分量为横坐标, 另一分量为纵坐标, 所画出的二维吸引子图像, 见图 1.

现对每一个分量按(1)式进行相空间重构, 取 $m = 6, \tau = 100$, 则每一分量均得到 6 维的重构信号. 任取每一分量的相邻的二维信号画出二维的相图, 如图 2. 研究表明, Lorenz 吸引子对重构维 m 的选择很不敏感, 即在有限范围内改变 m 的值, 其相图基本没什么变化. 但对延迟时间 τ 的选择相对比较敏感. 当 τ 大于 150 或小于 20 时, 相图形状开始发生畸变.

对 Lorenz-1 的各分量分别按(2)(3)式进行离散小波变换, 可以获得多个尺度的平滑信号和细节信号. 这些信号其实是原始信号在相空间重构后, 按尺度由小到大依次向滤波器向量 H 和 G 投影的结果. 将 Lorenz-1 各分量的小波变换结果, 以向量 H 为横轴, 向量 G 为纵轴画出的二维图像即为各分量在重构的相空间中的相图. 图 3 中的 $WX-WZ$ 子图是采用二次 B 样条小波对 Lorenz-1 的各分量进行变换后, 得到六个尺度的平滑信号和细节信号, 取各分量在尺度 $j = 2-4$ 上的相图(尺度 $j = 5-6$ 未画出, 但结果一样). 和图 2 比较, 图 3 中各子图相对图 2 各子图的形状基本是一致的, 只是方位发生一定角度的偏转, 但这不影响吸引子特征的保留.

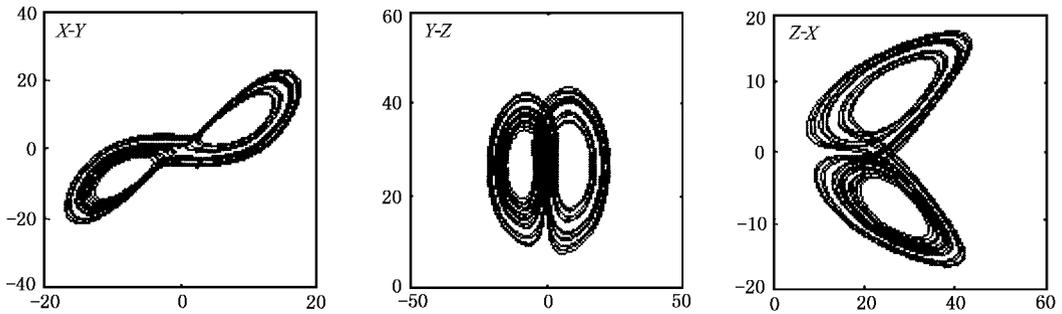


图 1 Lorenz-1 系统的二维图像(横、纵坐标 相对幅值, 无单位)

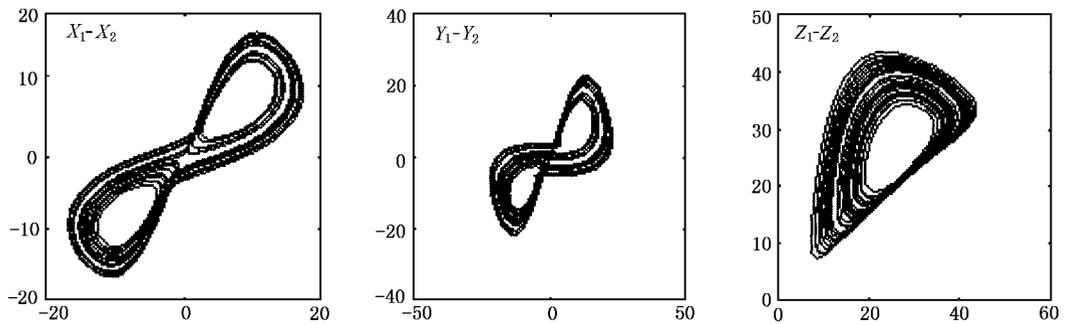


图 2 Lorenz-1 系统各分量的二维相图(横、纵坐标 相对幅值, 无单位)

4.2. EEG 信号的相图

本文采用的脑电样本来源于德国波恩大学医学中心. 样本包括若干癫痫患者和健康志愿者实测的脑电时间序列共 300 余例. 每一序列采样频率为 173.61Hz, 截取时间长度为 23.6s, 共 4096 个采样数据点. 数据采集方式为十六导程按国际 10-20 系统. 健康实验者采用头皮电极, 而癫痫患者采用皮下电极. 图 4 是其中典型的原始脑电波形图 (a) 为正常

人的脑电 (b) 为癫痫患者的脑电.

对每一原始 EEG 按(1)式进行相空间重构, 取 $m = 4-30, \tau = 4-8$, 则每一原始 EEG 均得到 m 维的重构信号, 任取相邻维的信号可画出其相图. 图 5 是图 4(a) 子图信号在 $m = 10$ 和 $\tau = 4$ 重构条件下得到的相图. 图 6 则是采用三次 B 样条小波对相同信号进行变换后, 得到八个尺度的平滑信号和细节信号, 取其中尺度 $j = 2-4$ 上的相图. 值得一提的是, 我们发现, 直接用相邻两维的重构 EEG 信号所画出

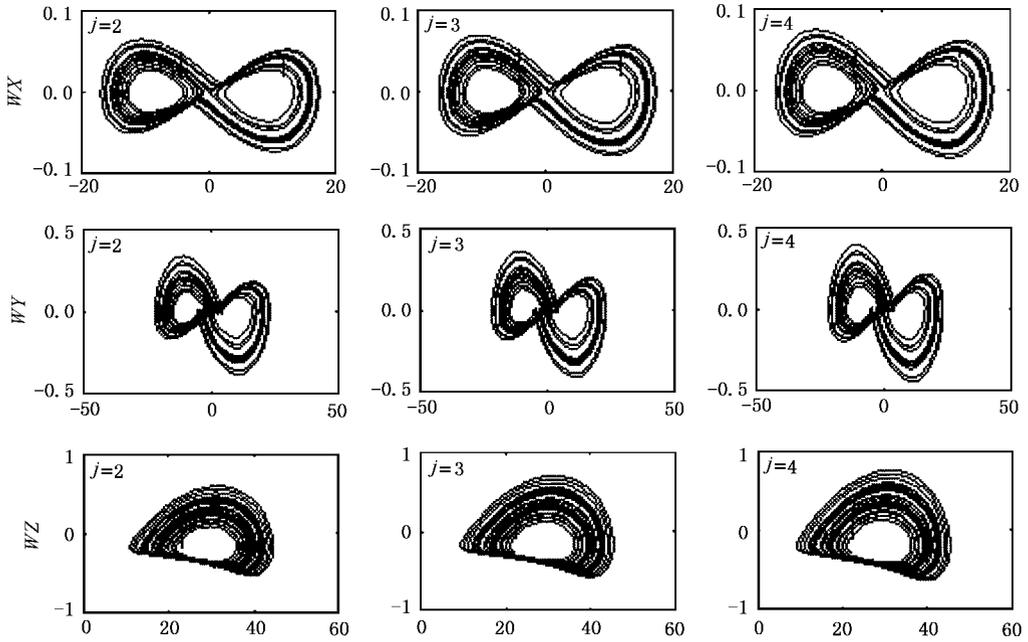


图3 Lorenz-1 系统各分量小波变换后在尺度 $j = 2-4$ 上的相图(横、纵坐标: 相对幅值, 无单位)

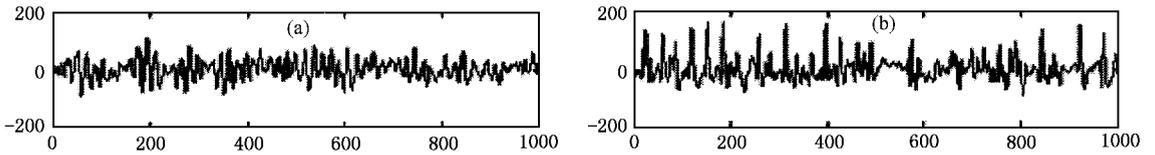


图4 (a)为健康人的 EEG, (b)为癫痫患者的 EEG(纵坐标: 微伏, 横坐标: 序号)

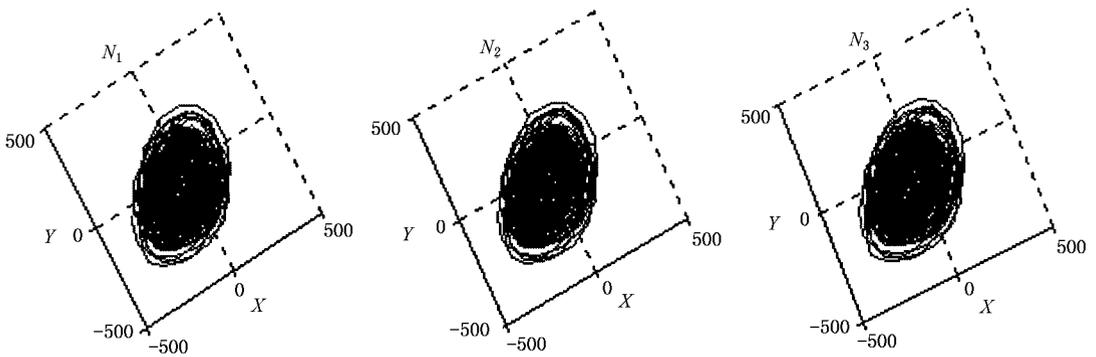


图5 健康 EEG 的相图(三维图经过旋转后截取的二维图像)(横、纵坐标: 相对幅值, 无单位)

的相图有时很难找到和经过小波变换后的相图有什么相似之处. 但用相邻的三维重构 EEG 信号画出三维相图后, 再经过一定角度的旋转并取其某一横截面得到的二维相图才发现和经过小波变换后的相图是相似的. 分析其原因发现: 采用时间延迟法重构得到的各维信号是非正交的. 但经过小波多尺度变换

后得到的平滑信号(属于低频带)和细节信号(属于高频带)则必定是正交的(因为频带不交叠), 分别对应于滤波器向量 H 和 G . 这就导致了在两种空间中的相图存在一定的偏转问题. 参见图 2 与图 3、图 5 与图 6、图 7 与图 8. 进一步研究表明, EEG 信号对重构维 m 和延迟时间 τ 的选择都很敏感. 必须正确选

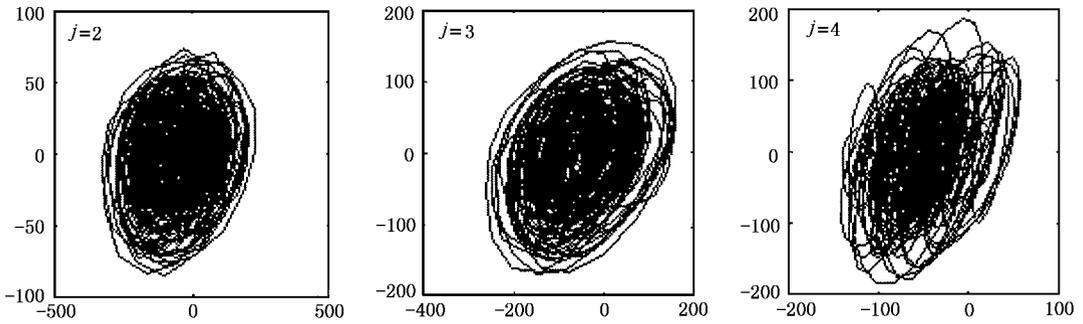


图 6 健康 EEG 小波变换后在尺度 $j=2-4$ 上的相图(横、纵坐标 相对幅值,无单位)

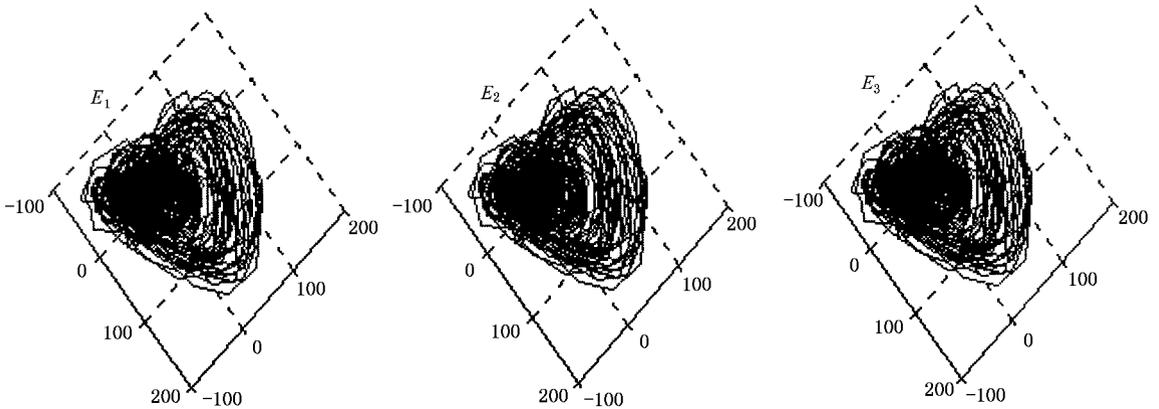


图 7 癫痫 EEG 的相图(三维图经过旋转后截取的二维图像,横、纵坐标 相对幅值,无单位)

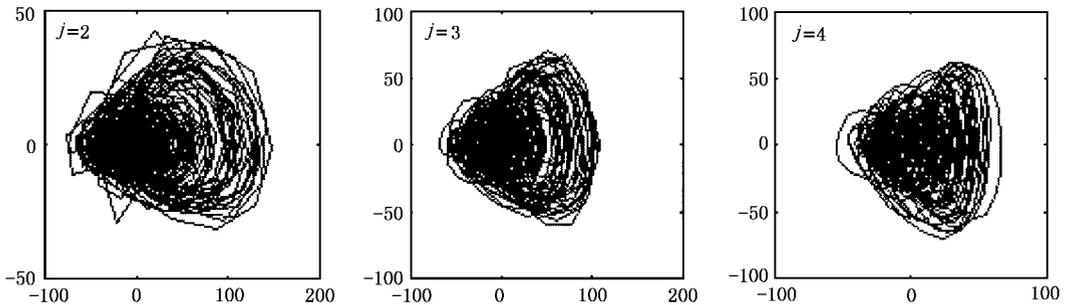


图 8 癫痫 EEG 小波变换后在尺度 $j=2-4$ 上的相图(横、纵坐标 相对幅值,无单位)

择这两个重构参数才能得到满意的结果.图 7 和图 8 是图 4(b)的癫痫 EEG 按图 5 和图 6 相同方法处理的结果.

顺便指出,虽然图 3、图 6 和图 8 所画出的在小波尺度 $j=2-4$ 上的相图具有很好的相似性,但信号作小波变换时,尺度的大小对这种相似性存在一定的影响.研究表明,尺度不宜取得过大,取 6—8 为佳.这是因为尺度过大,信号的高频分量将逐渐丢失,其结果表现在相图开始出现畸变.

4.3. 关联维和 Kolmogorov 熵

为考察小波变换对混沌信号非线性不变量的影响,对 300 余例实测脑电和 Lorenz-1 系统的关联维数和二阶 Kolmogorov 熵进行了计算^[7,8].脑电信号计算点数为 1000,延迟时间 $\tau=5$,Lorenz-1 系统用 Runge-Kutta 法求解,计算步长为 0.01,取 x 分量的 20000 点计算,延迟时间 $\tau=2$.则三种信号的关联维的计算结果如图 9,而二阶 Kolmogorov 熵的计算结果

如图 10. 由图可见, 对健康脑电、癫痫脑电和 Lorenz 系统经过小波变换后, 非线性不变量几乎保持不变.

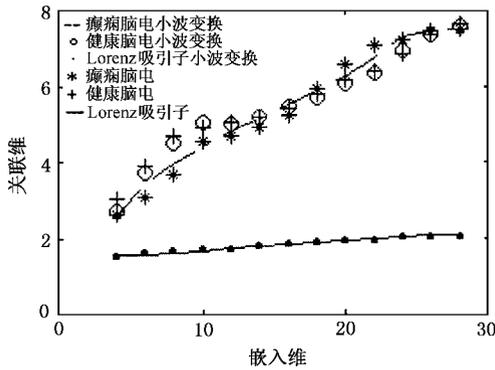


图 9 三种信号小波变换前后的关联维

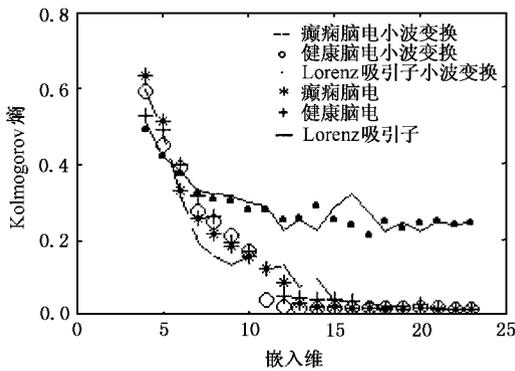


图 10 三种信号小波变换前后的 Kolmogorov 熵

5. 结 论

混沌时间序列的离散小波变换, 是混沌吸引子向小波滤波器向量所张的空间中的投影, 其物理本质与 Packard 等人提出的时间延迟相空间重构方法本质上是一致的. 混沌信号经过离散小波变换后, 用其离散平滑信号或离散细节信号所作的相图和利用时间延迟重构法所作的相图相比具有相似的结构, 并且混沌信号的各种非线性不变量也几乎得到保留. 这些结果表明, 利用小波变换研究混沌信号是有效的.

再者, 利用延迟时间相空间重构, 并在重构空间中求解信号特征参数是目前研究混沌信号的常用方法, 但由于重构参数的确定都带有随意性, 还缺乏理论依据^[9-11]. 重构参数选择不当会给原始信号带来人为的附加噪声, 因而常常很难求得稳定的结果. 采用小波变换的优点是能把多尺度变换的结果结合起来作分析观察, 对全面了解信号的特征更为有利. 同时, 小波变换是去噪的有力工具. 这是因为在不同尺度下作小波变换其实质是用不同中心频率的带通滤波器对信号滤波. 这进一步说明, 利用小波变换研究混沌信号具有明显的优势.

- [1] Packard N H et al 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 712
- [2] Takens F 1981 *In Lecture notes in mathematics*, Vol. 898 *Dynamical systems and turbulence* (Berlin: Springer) p366
- [3] Yang S Q and Jia C Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2452 (in Chinese) [杨绍清、贾传荧 2002 *物理学报* **51** 2452]
- [4] Yang Z J and Zhao G Z 1998 *Acta Biophysica. Sin.* **14** 257 (in Chinese) [杨志家、赵光宙 1998 *生物物理学报* **14** 257]
- [5] Yang F S 1999 *Engineering Analysis and Application of Wavelet Transform* (Beijing: Science Press) p58 (in Chinese) [杨福生 1999 *小波变换的工程分析和应用* (北京: 科学出版社)]
- [6] Mallat S and Hwang W L 1992 *IEEE Trans. On Information Theory* **38** 617
- [7] Wang A L and Yang C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2719 (in Chinese) [王安良、杨春信 2002 *物理学报* **51** 2719]
- [8] Grassberger P and Procaccia I 1983 *Physica D* **9** 189
- [9] You R Y and Xu S C 2003 *Acta Biophysica. Sin.* **19** 147 (in Chinese) [游荣义、徐慎初 2003 *生物物理学报* **19** 147]
- [10] Liu H F et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1186 (in Chinese) [刘海峰等 2002 *物理学报* **51** 1186]
- [11] Iasemidis L D and Sackellares J C 1996 *The Neuroscientist* **2** 118

Study on phase-space reconstruction of chaotic signal based on wavelet transform *

You Rong-Yi¹⁾ Chen Zhong²⁾ Xu Shen-Chu²⁾ Wu Bo-Xi²⁾

¹⁾(*Department of Physics , Jimei University , Xiamen 361021 , China*)

²⁾(*Department of Physics , Xiamen University , Xiamen 361005 , China*)

(Received 15 October 2003 ; revised manuscript received 12 December 2003)

Abstract

Using the methods of the wavelet transform and the nonlinear dynamics , the behavior of chaotic signals in phase space is studied. It is indicated that , in phase space reconstruction , the wavelet transform of chaotic time series is essentially a projection of strange attractor on the axis of the space that filter vectors opened , which in correspondance with the method of phase space reconstruction proposed by Packard et al. The experimental results show that , after doing wavelet transform , the architecture of attractor trajectory is similar to the original one , and the nonlinear invariants such as correlation dimension and Kolmogorov entropy are reserved. These results show that wavelet transform is effective for studying chaotic signal.

Keywords : wavelet transform , phasespace reconstruction , chaotic signal , electroencephalogram(EEG)

PACC : 0545 , 0540

* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province , China(Grant No. C0310028).