

非局域克尔介质中空间光孤子的相互作用*

谢逸群 郭 旗†

(华南师范大学信息光电子科技学院传输光学实验室, 广州 510631)

(2003 年 8 月 29 日收到, 2004 年 1 月 16 日收到修改稿)

研究了强非局域克尔介质中光束的演化规律, 通过相位分析得到了空间孤子相互作用所满足的非局域非线性薛定谔方程的简化近似模型, 并获得了双光束传输的解析解. 结果表明在传输过程中相互作用的高斯光束的相位取决于它们的输入总功率. 以振幅一强一弱共同传输的高斯光束为例进行了具体研究, 得到了强光和弱光的解析式. 相位分析显示弱光在相当短的传输距离之内能产生大的相移, 可以通过对强光能量的调控来实现对弱光的相位调制.

关键词: 非局域克尔介质, 空间光孤子, 孤子相互作用, 相位调制

PACC: 4265S

1. 引 言

自从 Snyder 和 Mitchell 提出强非局域非线性均匀介质中空间孤子传输的线性模型之后^[1], 引发了新一轮研究空间光孤子的热潮. 近年来关于非局域非线性介质中空间光孤子的问题在理论上和实验上都展开了广泛的研究^[1-6], 非局域空间光孤子的传输满足非局域非线性薛定谔方程, 方程中的非线性项取决于介质对光场的响应. 非局域克尔介质对光场的响应所激发出的非线性折射率可表示为^[7]:

$$\Delta n(I) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') I(x', z) dx'. \quad \rho \text{ 是介质常数}$$

($\rho > 0$ 表示聚焦介质, $\rho < 0$ 表示散焦介质), 其中 I 是介质中的光强, R 是介质的响应函数, x 是横向空间坐标, z 是光束的传输轴. 根据介质响应强度的强弱可以把介质分为四类^[7]: 局域, 弱非局域, 一般非局域, 强非局域. Snyder 和 Mitchell 对强非局域均匀介质中空间孤子的传输问题作出了杰出的研究, 结果表明^[1], 在强非局域介质中传播的光束会激发出具有抛物型折射率的对称波导, 由此提出了孤子传输的线性模型, 并对光束传输过程中束宽的演变进行了详细研究, 但是他们的工作对传输过程中光束的相位问题却完全没有涉及.

本文在此基础上对强非局域克尔介质中空间光

孤子的相互作用理论进行了细致的研究, 推导并简化了相互作用的光束所满足的传输方程, 得到了双光束的高斯解. 对相互作用的一强一弱高斯光束的传输进行了具体研究, 结果表明双光束在传输过程中的相位取决于两光束的输入总功率, 由此可实现强光对弱光的相位调制.

2. 非局域克尔介质中光束的演化

在平面非局域克尔介质中, 光束的传输满足非局域非线性薛定谔方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \rho \psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x', z) \times |\psi(x', z)|^2 dx' = 0, \quad (1)$$

其中 $\psi(x, z)$ 是旁轴光束, $\mu = 1/2k$, $\rho = k\eta$ 是介质常数 ($\eta > 0$, $\eta < 0$ 分别表示聚焦或散焦介质).

对于强非局域介质有^[8] $a_m/a > 1$, 其中 a_m 为介质响应函数的特征响应长度, a 为光束的束宽. 光束传输满足方程^[8]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \psi + \rho R_0 P_0 \psi - \frac{1}{2} \rho \gamma \psi \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x', z)|^2 x'^2 dx' = 0, \quad (2)$$

其中 $R_0 = R(x')|_{x'=0}$, $\gamma = -R''(x')|_{x'=0}$, P_0 是光束的输入功率. 因为该方程决定的光束能量守恒, 所

* 广东省自然科学基金团队项目(批准号 20003061), 广东省自然科学基金(批准号 011455, 031516)资助的课题.

† E-mail: guoq@scnu.edu.cn

以 $P_0 = P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x', z)|^2 dx'$. 方程(2)有如下解^[8]:

$$\psi(x, z) = \frac{\sqrt{P_0} \exp[i\theta(z)]}{[\sqrt{\pi}a(z)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a(z)} + i\alpha(z)x^2\right], \quad (3)$$

其中 $a(z)$, $\alpha(z)$, $\theta(z)$ 分别为光束束宽、波前曲率和相位,

$$a^2 = a_0^2 [\cos^2(\beta z) + \Gamma \sin^2(\beta z)], \quad (4a)$$

$$c = \frac{\beta(\Gamma - 1)a_0^2 \sin(2\beta z)}{8\mu a^2}, \quad (4b)$$

$$\theta = -\frac{1}{2} \arctan[\sqrt{\Gamma} \tan(\beta z)] + R_0 \rho P_0 z + \frac{1}{16} \rho \gamma P_0 a_0^2 \times \left[-\chi(\Gamma + 1) + \frac{(\Gamma - 1) \sin(2\beta z)}{\beta} \right], \quad (4c)$$

a_0 为光束的初始束宽, $\beta = (\gamma \eta P_0)^{1/2}$, $\Gamma = P_c / P_0$, $P_c = 1/\chi a_0^4 k^2 \eta$ 是光束的临界功率. 方程(2)中最后一项对光束束宽的演化没有影响^[8].

分析可知, θ 中的第二项和最后一项分别来自于微积分方程(2)中第四项和最后一项. 对于任意响应函数 $\gamma = -R''_0 \sim R_0/a_m^2$, 于是 θ 中的第二项和最后一项比为 $v(a_m/a_0)^2$, 其中 $v = 16\beta z [\chi(1 + \Gamma)\beta z - (\Gamma - 1)\sin(2\beta z)]$, 可化为

$$v = \frac{8}{(1 + \Gamma) + (1 - \Gamma) \text{sinc}(2\beta z/\pi)}, \quad (5)$$

其中函数 $\text{sinc}(2\beta z/\pi)$ 的取值范围为 -0.22 至 1 . 如前文所示, 得到解(3)的前提是 $a_m/a > 1$, 则由(4a)式可得 $(a_m/a_{\max})^2 = (a_m/a_0 \sqrt{\Gamma})^2 > 1$, 即有 $0 < \Gamma < (a_m/a_0)^2$. 对于强非局域克尔介质, 若 $a_m/a_0 \geq 10$, 当输入功率大于或等于临界功率时, $0 < \Gamma \leq 1$, $A \leq v < 10$, 比值 $v(a_m/a_0)^2 > 10^2$; 当输入功率小于临界功率时, $1 < \Gamma < (a_m/a_0)^2$, 可得 $v(a_m/a_0)^2$ 的取值范围为 10 至 400 . 若 $a_m \gg a_0$, 即介质具有超强的非局域性, 则不管输入功率如何两项的比值都会很大. 可见, 在强非局域克尔介质中, 方程(2)第四项对相位的贡献远大于最后一项的贡献.

3. 高斯光束的相互作用

3.1. 相互作用高斯光束的传输方程及其解析解

在平面非局域克尔介质中, 具有相同频率总功率为 P_0 的双高斯光束的传输同样满足传输方程

(2). 依据上文的分析, 强非局域克尔介质中, 方程(2)最后一项对光束相位的贡献很小, 而且对光束束宽的演化没有贡献, 故可将其略掉而得到光束传输的新模型

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \psi + \rho R_0 P_0 \psi = 0, \quad (6)$$

这种形式是我们熟知的, 它是旁轴光束在具有抛物型折射率介质中传输所满足的方程. 可见新模型的物理本质是入射光在非局域克尔介质中激发了对称的抛物型折射率 $n^2 = n_0^2 + \rho R_0 P_0 - 1/2 \rho \gamma P_0 x^2$.

为使上述方程便于求解, 对之进行变换, 令

$$\psi(x, z) = \varphi(x, z) \exp(iz), \quad (7)$$

将其代入方程(6), 得

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \varphi + \rho R_0 P_0 \varphi - f \varphi = 0, \quad (8)$$

令(8)式波函数 φ 的常数项为零, 得

$$f = \rho R_0 P_0, \quad (9)$$

于是方程(6)就变换成 Snyder-Mitchell 线性模型^[1]

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \varphi = 0. \quad (10)$$

可见, 经过(7)式的变换之后, 方程(6)的解的结构更为清晰: 它只是比方程(10)的解多了一个依赖于输入总功率和介质长度的相位因子 $\exp(iz)$, 因此 Snyder 和 Mitchell 由方程(10)所得到的关于光束束宽演变的结论同样适用于方程(6). 同时, 正是由于该因子的存在使我们能够得到由方程(6)所不能得出的关于光束相互作用的新结论.

文献[1]已经对方程(10)求解, 但由于篇幅所限没有求解的详细过程, 仅给出了光束束宽的解析式. 此外, 文献[1]对于方程(10)解中的重要系数: 归一化因子 A (见下文), 仅求得了孤子情况的表示式. 基于此, 本文采取不同于文献[1]的试探解构造方式对方程(10)重新求解, 并解得了一般情况下的归一化因子 A .

方程(10)是一线性微分方程, 若 $\varphi_+(x, z)$ 和 $\varphi_-(x, z)$ 分别为该方程的解, 则它们的线性叠加也满足此方程. 根据以上分析, 可设方程(10)的试探解为 $\varphi(x, z) = \varphi_+(x, z) \pm \varphi_-(x, z)$, 其中 ' \pm ' 表示两束光的输入相位差为零或 180° , $\varphi_+(x, z)$ 和 $\varphi_-(x, z)$ 分别为

$$\varphi_{\pm}(x, z) = \frac{\sqrt{AP_0} \exp[i\theta'(z)]}{[\sqrt{\pi}a(z)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{[x + x_0(z)]^2}{2a(z)}\right\}$$

$$+ i\alpha(z) [x + x_0(z)] \} \exp[-iu(z)x + i\Phi'(z)], \quad (11a)$$

$$\varphi_-(x, z) = \frac{\sqrt{AP_0} \exp[i\theta'(z)]}{[\sqrt{\pi} \alpha(z)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{[x - x_0(z)]^2}{2\alpha(z)} + i\alpha(z) [x - x_0(z)] \right\} \exp[iu(z)x + i\Phi'(z)], \quad (11b)$$

其中^[11] $x_0(z) = m \cos(\beta z)$, $\beta = (\gamma\gamma P_0)^{1/2}$, $u(z) = -km\beta \sin(\beta z)$, $\Phi'(z) = (1/4)k_0^2 m^2 \sin(2\beta z)$, m 是入射点光束中心和传输轴之间的距离. A 为归一化常数使得两束光的总功率为 P_0 , 满足方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_+(x, z) \pm \varphi_-(x, z)|^2 dx = P_0. \quad (12)$$

把试探解代入方程(10), 提取 x 的零阶项可得到关于 $\theta'(z)$ 的方程

$$\frac{d\theta'}{dz} + \frac{\mu}{a^2} = 0. \quad (13a)$$

然后取 x^2 系数的实部和虚部可分别得到 $a(z)$ 和 $\alpha(z)$ 的方程

$$\frac{da}{dz} - 4\mu\alpha = 0, \quad (13b)$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{\mu}{a^4} + 4\mu\alpha^2 + \frac{1}{2}\rho\gamma P_0 = 0. \quad (13c)$$

对以上三方程求解可得

$$a^2 = a_0^2 [\cos^2(\beta z) + \Gamma \sin^2(\beta z)], \quad (14)$$

$$c = \frac{\beta(\Gamma - 1)a_0^2 \sin(\beta z)}{8\mu a^2}, \quad (15)$$

$$\theta' = -\frac{1}{2} \arctan[\sqrt{\Gamma} \tan(\beta z)]. \quad (16)$$

把 a, β 和 c 代入(11)式, 再把所得结果代入方程(12)可得到归一化常数

$$A = 2^{-1}(1 \pm e^{-m^2/a_0^2})^{-1}. \quad (17)$$

以上公式中的符号 Γ, β 的表示式与第二节相同. 把(14)–(17)各式替换到试探解(11)就可得到方程(10)的解. 由变换(7)易得

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \psi_+(x, z) \pm \psi_-(x, z) \\ &= \varphi_+(x, z) \exp(iz) \pm \varphi_-(x, z) \exp(iz). \end{aligned} \quad (18)$$

把(10)式的解代入上式就可得到满足新模型(6)的两光束的解析式 $\psi_+(x, z)$ 和 $\psi_-(x, z)$.

由(14)至(17)式可知, 每个光束的束宽 a 、波前曲率 c 、相位 θ' 和中心轨迹 x_0 的演化仅依赖于两光束的输入总功率 P_0 、各自的传输距离 z 以及输入时的中心距离 $2m$, 相互之间对演化没有影响, 因此每个光束都是独立于另一光束演化. 则对于孤子光束, 在每次碰撞之后波形依然保持不变继续按照自身的演化规律传输, 即具有碰撞不变性. 图1给出了相互作用两孤子光束碰撞前后的光强等高线图^[1], 该图直观地显示了孤子光束的碰撞不变性.

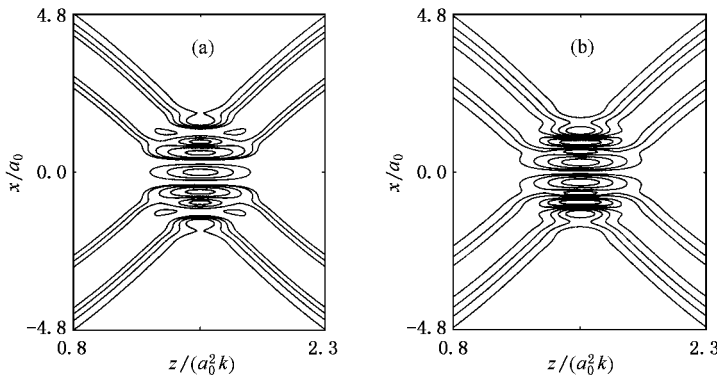


图1 相互作用孤子光束光强等高线图(x 是横向坐标, z 是传输距离. 相互作用区域 $x: -4.8a_0 \rightarrow 4.8a_0$, $z: 0.8a_0^2 k \rightarrow 2.3a_0^2 k$. 两光束初始中心间距 $m = 5a_0$, 两光束的初始相位差分别为 (a) 和 (b))

根据上式, 光束在输入处 $z = 0$, 得

$$\psi_{\pm}(x, 0) = \frac{\sqrt{AP_0}}{[\sqrt{\pi} a_0]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x \pm m)^2}{2a_0^2}\right] \quad (19)$$

光束在临界条件下 $P_0 = P_c$, 得孤子解

$$\psi_{\pm}(x, z) = \frac{\sqrt{AP_c} \exp(i\phi)}{[\sqrt{\pi} a_0]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x \pm x_0)^2}{2a_0^2}\right] \mp iux, \quad (20)$$

其中 $\phi = -z[2a_0^2 k] + R_0 \rho P_c z + m^2 \sin[2z/(a_0^2 k)](4a_0^2)$, $u = (-m/a_0^2) \sin[z/(a_0^2 k)]$.

3.2. 相互作用高斯光束的相位分析

以下就上文所得的光束解析式进行具体的相位分析.在平面非局域克尔介质中,让一强一弱两束高斯光(输入功率分别为 P_{0s} 和 $P_{0\delta}$)同时输入,如果强光的功率远远大于弱光的功率($P_{0s} \gg P_{0\delta}$),这时输入总功率几乎等于强光的功率($P_0 \cong P_{0s}$)此时强光的传输几乎不受弱光的影响,其中心轨迹为一条直线,强光的解析式为

$$\psi_s(x, z) = \frac{\sqrt{P_{0s}} \exp[i(\theta' + fz)]}{[\sqrt{\pi}a]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2} + icx^2\right], \quad (21)$$

依据(18)式,弱光的解析式为

$$\psi_\delta(x, z) = \frac{\sqrt{P_{0\delta}} \exp(i\Phi)}{[\sqrt{\pi}a]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x \pm x_0)^2}{2a^2}\right] \times \exp[i\alpha(x \pm x_0)^2 \mp iux], \quad (22)$$

其中 $\Phi = \theta' + fz + \Phi'$ 为弱光相位,对于一般情况有

$$\Phi = -\frac{1}{2} \arctan[\sqrt{\Gamma} \tan(\beta z)] + R_0 \rho P_{0s} z + \frac{1}{4} k \beta m^2 \sin(2\beta z), \quad (23)$$

上式第二项和第三项的比值为 $2(a_m/m)^2 / \sin(2\beta z/\pi)$,对于强非局域介质,介质响应函数的特征响应长度要大于两光束的中心距离,即 $a_m/m > 1$.用与第一节类似的相位分析方法, $|2/\sin(2\beta z/\pi)|$ 的取值为 2 至 10,对于强非局域介质,若 $a_m/m > 10$,比值 $|2(a_m/m)^2 / \sin(2\beta z/\pi)| > 200$,因此,可以忽略最后一项的贡献.对于孤子情况, $\Gamma = 1$, $\beta = 1(a_0^2 k)$,则弱光相位为

$$\Phi_1 = -\frac{z}{2a_0^2 k} + R_0 \rho P_{0s} z, \quad (24)$$

上式中第二项与第一项之比为 $2R_0(a_0^2)$,又 $\gamma \sim R_0/a_m^2$,所以两项的比值为 $2\sigma a_m^2/a_0^2$,其中 σ 是比例

系数由材料的性质决定, $|\sigma|$ 数量级为 1.对于强非局域介质,当 $a_m/a_0 > 10$ 时,则两项的比值将大于 100,所以在相位(24)中起主要作用的是第二项.有 $\Phi_1 = R_0 \rho P_{0s} z$,此时弱光的相位正比于强光的输入功率 P_{0s} ,则可以通过调节强光的输入功率来控制弱光的相位.

当弱光相移为 π 时,由以上分析可知所需的介质长度 l 为

$$l = \frac{\pi}{R_0 \rho P_{0s}}, \quad (25)$$

假设材料具有高斯型的响应函数 $R(x) = \exp(-x^2/2a_m^2)$ ($\sqrt{2\pi}a_m$),有 $\gamma = R_0/a_m^2$,把 $P_{0s} = 1(\gamma \gamma a_0^4 k^2)$ 代入上式得 $l = 2\pi^2 a_0^4 / (a_m^2 \lambda)$.若取 $a_m = 5a_0$,取 $\lambda = 0.62 \mu\text{m}$, $a_0 \approx 15\lambda^{[9]}$,可得 $l \approx 0.12 \text{mm}$.综上所述,对于共同传输的孤子光束,可以通过调节强光的输入功率来控制弱光的相位.弱光在相当短的传输距离之内能产生大的相移(大约 0.1mm 的距离即可实现 π 相移),因此本文的理论结果为全光开关的实现提供了一个可能的途径.

4. 结 论

本文研究了非局域克尔介质中高斯光束演变,对光束的相位演变进行了尤为细致地分析,通过巧妙的变换简化了光束所满足的非局域传输方程.根据所得方程求得了相互作用光束的高斯解,分析表明相互作用的高斯光束其相位决定于两光束的输入总功率和介质长度.以振幅一强一弱共同传输的高斯光束为例进行的具体相位分析显示,对于孤子情况,弱光在很短的介质长度内能产生较大的相移,其相位近似正比于强光的输入功率,因此通过调节强光的输入功率就可以对有效地控制弱光的相移.

- [1] Snyder A W and Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
 [2] Snyder A W and Kivshar Y 1997 *J. Opt. Soc. Am.* B **11** 3025
 [3] Snyder A W 2000 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **6** 1408
 [4] Mitchell D J and Snyder A W 1999 *J. Opt. Soc. Am.* B **16** 236
 [5] Granot E, Sternklar S, Isbi Y, Malomed B and Lewis A 1999 *Opt. Commun.* **166** 121
 [6] Peccianti M, Brzdekiewicz K A and Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27**

- 1460
 [7] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J and Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
 [8] Guo Q, Luo B, Yi F H, Chi S and Xie Y Q 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
 [9] Aitchison J S *et al* 1990 *Opt. Lett.* **15** 471

Interaction between optical spatial solitons in nonlocal Kerr media^{*}

Xie Yi-Qun Guo Qi[†]

(*Laboratory of Light Transmission Optics , South China Normal University , Guangzhou 510631 , China*)

(Received 29 August 2003 ; revised manuscript received 16 January 2004)

Abstract

In this paper , it is discussed that a pair of optical beams co-propagates in nonlocal Kerr media , which is governed by the nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NNLSE). A new approximate linear model to the NNLSE is presented for the strong nonlocal Kerr media with arbitrary response functions. An analytical solution in Gaussian form to the model is obtained. It is shown that the phase of each of the two beams is depended on the total input power. As a concrete example , the interaction of two beams with the intensity of one of the beams much stronger than that of the other is discussed. It is found that the phase shift of the weaker (probe) beam is very large within rather short propagating distance in the case of soliton , which can be controlled by modulating the input power of the stronger (pump) beam.

Keywords : nonlocal Kerr media , optical spatial soliton , spatial soliton interaction , phase modulation

PACC : 4265S

^{*} Project supported by the team project of Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No. 20003061) , the National Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant Nos. 011455 and 031516).

[†] E-mail : guoq@scnu.edu.cn