第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/3114-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.9, September, 2004

等离子体填充波纹波导中低频模式特性分析*

谢鸿全[1)] 刘濮鲲[2)] 李承跃[3)] 鄢 扬[3)] 刘盛纲[3)]
[1)](西南科技大学理学院,绵阳 621002)
[2)](中国科学院电子学研究所,北京 100080)
[3)](电子科技大学高能电子学研究所,成都 610054)
(2003 年 10 月 20 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

采用等离子体流体模型和线性场理论,导出了在强引导磁场下,一无限薄环形等离子体加载波纹波导中电磁波传播的色散关系.数值计算并分析了在不同的等离子体填充密度下,低频等离子体模式的色散特性和行波管的小信号增益.研究发现,低频等离子体模式可与相对论电子束发生同步互作用使高频信号放大.同时,在无限薄环形等离子体填充条件下,波纹波导中的低频等离子体模式严格满足 Floquet 定理所要求的周期性,其上截止频率不再受到等离子体频率的限制,当密度较大时,等离子体模式还可与 TM 模式发生耦合.

关键词:等离子体,波纹波导,色散关系,增益
PACC:5275,5240D

1. 引 言

波纹波导是一种重要的慢波结构,它具有很多优点:1)它能对电子注产生单色的纵向调制;2)光滑的波纹波导没有棱角,不易被腔中强电场击穿;3)全金属结构使得其热耗散能力强,因而管子的输出功率可大大提高.因此,它被广泛应用于行波管、返波管等多种高功率微波器件中[1—9].近年来的理论与实验研究表明[7—11],在高功率微波器件中充入等离子体可克服空间电荷流的限制,有效地改善电子注的传输质量.同时,还可大幅度地提高器件的输出功率和互作用效率.等离子体的这些显著特性使得等离子体微波电子学成为目前国际上十分活跃的前沿研究领域之一[12—17].在已有的文献中,等离子体大多数都是均匀填充,较少涉及环形填充情况.本文从等离子体流体模型出发,采用场匹配法,1)推导了在强引导磁场下,无限薄环形等离子体加载周期性波纹波导中电磁波传播的色散方程;2)数值计算并分析了在不同的等离子体密度下低频等离子体模式[18—20]的色散特性和行波管的小信号增益;3)研究发现,低频等离子体模式可与相对论电子束发生同步互作用并放大高频信号,其放大能力和工作频率随着等离子体密度的增大而提高.同时,在无限薄环形等离子体填充条件下,波纹波导中的低频等离子体模式严格满足 Floquet 定理所要求的周期性,其上截止频率不再受到等离子体频率的限制,当密度较大时,等离子体模式还可与 TM 模式发生耦合.

2. 物理模型

如图 1 所示,波纹波导为圆柱对称,波导壁上的波纹呈周期性变化且满足数学关系 $R(z)=R_0+h\cos(k_0z)$.式中 R_0 为波导的平均半径,h 为波纹深度,$k_0=2\pi/z_0$ 是波纹波数,Z_0 为波纹的周期长度.一束无限薄环形等离子体和相对论电子注穿过该慢波结构,它们有相同的半径 R_p.等离子体和电子注的线密度分别为 N_p 和 N_b,电子注相对于静止的等离子体的速度为 v,整个系统置于无限大纵向引导磁场中.

在小信号条件下,电子注与等离子体中的物理量及电磁场分量可以写成一直流分量与一扰动分量之和[21],即

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0+\boldsymbol{J}_1,$$
$$\rho=\rho_0+\rho_1,$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1,$$

* 国家自然科学基金(批准号:10347009)和四川省教育厅自然科学基金(批准号:2003B019)资助的课题.

$$E = E_0 + E_1,$$
$$H = H_0 + H_1, \tag{1}$$

J 为电流密度，ρ 和v 分别为电荷体密度与电子速度，下标‘0’和‘1’分别代表直流分量和扰动分量，且(1)式中各量的扰动部分远小于其本身的直流部分．由于无限大引导磁场限制了电子的横向运动，故以下分析均只考虑电子在纵向的一维运动情况．

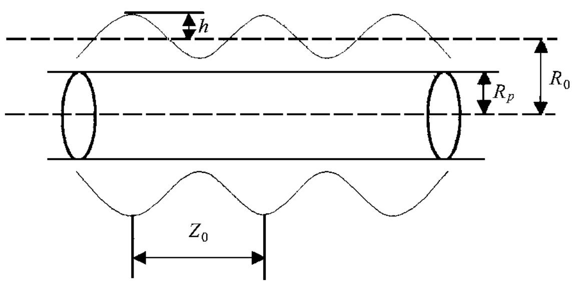

图 1　薄环形等离子体填充波纹波导结构示意图

在柱面坐标系中，取电子注延伸方向为 z 轴，将各物理量的扰动分量写成波动因子 $e^{i(k_n z - \omega t)}$ 的形式，$k_n = k_z + nk_0$ 是轴向波数．于是有

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega,$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = ik_n,$$
$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 - k_n^2. \tag{2}$$

从电子注或等离子体流体模型出发，利用连续性方程

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{3}$$

在一维电子注假定条件下，(3)式可写成

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{4}$$

取其扰动部分并利用(1)式，得

$$\rho_1 = \frac{k_n}{\omega} J_{1z}. \tag{5}$$

根据电流密度的定义

$$J_z = \rho \nu_z, \tag{6}$$

即

$$J_{0z} + J_{1z} = (\rho_0 + \rho_1)(\nu_{0z} + \nu_{1z}). \tag{7}$$

略去二级小量后得

$$J_{0z} = \rho_0 \nu_{0z}, \tag{8}$$
$$J_{1z} = \rho_0 \nu_{1z} + \rho_1 \nu_{0z}. \tag{9}$$

将(9)式代入(5)式得

$$\rho_1 = \frac{k_n \rho_0 \nu_{1z}}{\omega - k_n \nu_{0z}}. \tag{10}$$

利用电磁流体运动方程，并考虑到相对论效应

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma (v \cdot \nabla) v + v (\gamma \cdot \nabla) v = -\frac{e}{m}(E + v \times B), \tag{11}$$

式中 m 为电子的静止质量，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2/c^2}}$ 为相对论因子，c 为真空中光速．注意到直流聚焦磁场沿 z 轴方向，因此$v \times B_0 = 0$，由(11)式可得

$$\nu_{1z} = i\frac{e}{m}\frac{E_z}{(k_n \nu_{0z} - \omega)\gamma^3}. \tag{12}$$

将(12)式代入(10)式可得

$$\rho_1 = \frac{-ik_n \rho_0 e E_z}{m(\omega - k_n \nu_{0z})^2 \gamma^3}. \tag{13}$$

(13)式即为电子注或等离子体的扰动电荷体密度，对等离子体而言，由于 $\nu_{0z} = 0$，$\gamma = 1$，故(13)式可简化为

$$\rho_1 = \frac{-ik_n \rho_0 e E_z}{m\omega^2}. \tag{14}$$

3．色散方程

解麦克斯韦方程组可得到第 n 次谐波的电场分量为(略去因子 $e^{i(k_n z - \omega t)}$)

$$E_{zn} = A_n J_0(Tr) \qquad 0 \leqslant r \leqslant R_p, \tag{15}$$
$$E_{zn} = B_n J_0(Tr) + C_n N_0(Tr) \qquad R_p \leqslant r \leqslant R_0, \tag{16}$$

$$E_{rn}(r, z) = \frac{ik_n}{T^2}\frac{d}{dr}E_{zn}, \tag{17}$$

式中

$$T^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_n^2, \tag{18}$$

A_n，B_n 和 C_n 为电场的幅值系数，利用电场的匹配条件可将 B_n，C_n 两个系数用 A_n 表示出来．

在 $r = R_p$ 处，切向电场 E_{zn}连续，即

$$E_{zn}(r = R_p^-) = E_{zn}(r = R_p^+), \tag{19}$$

式中

$$R_p^{\pm} = R_p \pm 0. \tag{20}$$

在 $r = R_p$ 处，径向电场 E_r 不连续，扰动电场的泊松方程可写为

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0}. \tag{21}$$

对(21)式两边从 $r = R_p^-$ 到 $r = R_p^+$ 积分并利用切向电场 E_{zn}在$r = R_p$ 处的连续条件(19)式可得

$$E_m \Big|_{R_p^-}^{R_p^+} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 R_p}\int_{R_p^-}^{R_p^+} 2\pi r\rho_1 \mathrm{d}r. \tag{22}$$

将(13),(14)式代入(22)式并利用

$$\rho_0 = -e(n_p + n_b), \tag{23}$$

$n_p = \dfrac{N_p}{\pi(R_{p^+}^2 - R_{p^-}^2)}$和 $n_b = \dfrac{N_b}{\pi(R_{p+}^2 - R_{p^-}^2)}$分别为等离子体和电子注的体密度.可得

$$\frac{\mathrm{d}E_{zn}}{\mathrm{d}r}\Big|_{R_p^-}^{R_p^+} = (B_p + B_b)E_{zn}(R_p), \tag{24}$$

$$B_p = \frac{e^2 N_p(\omega^2/c^2 - k_n^2)}{2\pi\varepsilon_0 mR_p\omega^2}, \tag{25}$$

$$B_b = \frac{e^2 N_b(\omega^2/c^2 - k_n^2)}{2\pi\varepsilon_0 mR_p(\omega - k_n\nu)^2\gamma^3}. \tag{26}$$

将(15),(16)式分别代入(19)和(24)式并利用郎斯基关系式

$$J_\nu(x)N_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1}(x)N_\nu(x) = -\frac{2}{\pi x}, \tag{27}$$

可得

$$B_n = \left[1 - \frac{\pi R_p}{2}(B_p + B_b)N_0(TR_p)J_0(TR_p)\right]A_n, \tag{28}$$

$$C_n = \frac{\pi R_p}{2}(B_p + B_b)J_0^2(TR_p)A_n. \tag{29}$$

在波纹波导的内表面 $r = R(z)$处,切向电场为零,即

$$E_z(r = R(z)) + E_r(r = R(z))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R(z) = 0. \tag{30}$$

将(16),(17)式代入边界条件(30)式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}(k_n z - \omega t)]\\ &\times\left[1 + \mathrm{i}k_n/(\omega^2/c^2 - k_n^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]E_{zn}(R(z))\\ &= 0.\end{aligned} \tag{31}$$

在(31)式两端同乘以 $\exp(-\mathrm{i}mk_0 z)$,再从 $z = -\pi/k_0$ 到 $z = \pi/k_0$ 的一个周期内积分得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)k_0 z}\left(1 + \frac{\mathrm{i}k_n}{\omega^2/c^2 - k_n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\\ &\times[B_nJ_0(TR(z)) + C_nN_0(TR(z))]\mathrm{d}z = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

将 $J_0(TR(z))$在 R_0 点进行泰勒展开得

$$J_0(TR(z)) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{J_0^{(q)}(TR_0)}{q!}[Th\cos(k_0 z)]^q, \tag{33}$$

同理

$$N_0(TR(z)) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{N_0^{(q)}(TR_0)}{q!}[Th\cos(k_0 z)]^q. \tag{34}$$

将以上二式代入(32)式并利用关系式

$$\cos^{2s}x = \frac{1}{2^{2s-1}}\left[\sum_{j=0}^{s-1}\binom{2s}{j}\cos2(s-j)x + \frac{1}{2}\binom{2s}{s}\right], \tag{35}$$

$$\cos^{2s+1}x = \frac{1}{2^{2s}}\left[\sum_{j=0}^{s}\binom{2s+1}{j}\cos[2(s-j)+1]x\right], \tag{36}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0 & (m \neq n),\\ \pi & (m = n \neq 0),\end{cases} \tag{37}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \tag{38}$$

可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1 + (n-m)Q_n](B_nC_{mn}^J + C_nC_{mn}^N) = 0,$$
$$m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n, \tag{39}$$

$$Q_n = \frac{k_0k_n}{(\omega^2/c^2) - k_n^2}, \tag{40}$$

$$C_{mn}^J = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(Th)^{2q+|n-m|}J_0^{(2q+|n-m|)}(TR_0)}{2^{2q+|n-m|}q!(q+|n-m|)!}, \tag{41}$$

$$C_{mn}^N = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(Th)^{2q+|n-m|}N_0^{(2q+|n-m|)}(TR_0)}{2^{2q+|n-m|}q!(q+|n-m|)!}, \tag{42}$$

其中 $J_0^{(2q+|n-m|)}(TR_0)$为 $J_0(TR_0)$的第 $2q+|n-m|$阶导数.

将(28)式和(29)式代入(39)式,并写成矩阵形式

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}D_{mn}A_n = 0 \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n, \tag{43}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为一列向量,$\boldsymbol{D}$ 为一矩阵,其中的元素可表示为

$$\begin{aligned}D_{mn} =& [1 + (n-m)Q_n]\Big\{C_{mn}^J - \frac{\pi R_p}{2}(B_p + B_b)J_0(TR_p)\\ &\times[N_0(TR_p)C_{mn}^J - J_0(TR_p)C_{mn}^N]\Big\}.\end{aligned} \tag{44}$$

由(43)式可知,$\boldsymbol{A}$ 存在非零解的必要条件是系数矩阵行列式的值为零,即

$$|D| = 0. \tag{45}$$

(45)式就是我们所求的色散方程.

4. 数值计算及分析

利用(45)式,采用 9 阶矩阵,求和项数取 10,数

值计算所得到的冷腔色散曲线如图 2 所示. 计算中采用的参数为波导平均半径 $R_0 = 1.60\mathrm{cm}$，波纹深度 $h = 0.40\mathrm{cm}$，波纹周期 $z_0 = 1.05\mathrm{cm}$，等离子体薄环半径 $R_\mathrm{p} = 1.0\mathrm{cm}$，图 2(a)和(b)中等离子体线密度分别为 $N_\mathrm{p} = 4.0\times10^{11}\mathrm{cm}^{-1}$和 $1.1\times10^{12}\mathrm{cm}^{-1}$. 图 2 中给出了低频等离子体模式和 TM_{01} 模式两个周期的色散曲线，它们均严格满足 Floquet 定理所要求的周期性. 图 2 中的虚线为电子注线，电子速度 $v = 0.92c$. 由图 2(a)，(b)可知，对于低频等离子体模式而言，由于假定环形等离子体无限薄，因此它并没有受到等离子体频率的限制. 当等离子体线密度增大时，虽然 TM_{01} 模的色散曲线向上仅有微小的移动，但低频模式的色散特性变化却十分明显. 从图 2(b)可看出，低频模式的色散曲线向上大幅度移动，在频率较低处，色散曲线之间的频率间隔增大，在频率较高处，低频模式和 TM_{01} 模式相互之间发生了耦合.

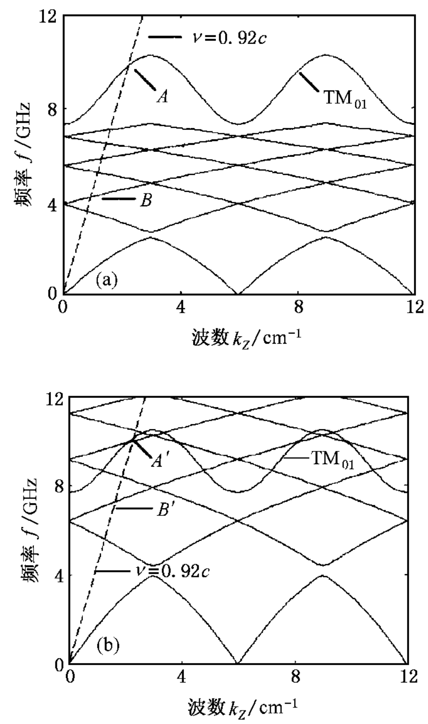

图 2　无限薄环形等离子体填充波纹波导的冷色散关系

图 3 给出了当改变等离子体的填充密度时，在图 2 所示的四个同步点处，行波管单位长度上的小信号增益随频率的变化关系. 计算中慢波结构的参数与前面冷腔所选相同，电流为 1.5kA. 由图 3 可知，低频等离子体模式也可像 TM_{01} 模式那样与相对论电子束在同步点处发生互作用并放大高频信号. 当等离子体密度增加时，其放大能力也随之增强. 当然，与 TM_{01} 模相比较而言，低频等离子体模式的放大能力较弱，但它的工作频率可以通过填充不同密度的等离子体来大范围改变，其变化的幅度比 TM_{01} 模式更加广阔.

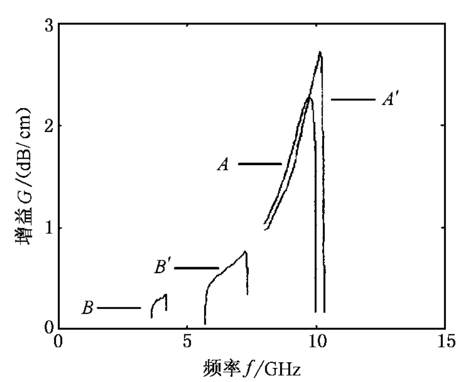

图 3　在图 2 所示的四个同步点处，行波管单位长度上的小信号增益随频率的变化关系

5. 结　　论

从建立无限薄环形等离子体填充波纹波导慢波系统的物理模型和色散方程出发，通过数值计算重点分析了低频等离子体模式的冷腔色散特性和热腔的小信号增益，并得到了一些有用的结论：1)等离子体填充波纹波导中存在着低频等离子体模式，其色散特性和 TM 模式一样均满足 Floquet 定理所要求的周期性；2)在无限薄环形填充情况下，低频模式的上截止频率不再受到等离子体振荡频率的限制，当等离子体密度较高时，低频模式还可与 TM 模式发生耦合；3)在热腔情况下，低频模式也可在同步点与相对论电子注产生同步互作用使高频信号放大，但放大能力比 TM 模式要弱；4)随着等离子体密度的增大，低频模式的工作频率和放大能能力也随之提高，实际应用中可通过填充不同密度的等离子体来改变管子的工作频率.

[1] Shiffler D, Nation J A and Wharton C B 1989 *Appl. Phys. Lett.* **54** 674

[2] Shiffler D, Nation J A and Kerslick G S 1990 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **18** 546

[3] Xie H Q, Yan Y and Liu S G 2001 *High Power Laser and Particle Beams* **13** 345(in Chinese)[谢鸿全、鄢 扬、刘盛纲 2001 强激光与粒子束 **13** 345]

[4] Xie H Q, Yan Y and Liu S G 2002 *High Power Laser and Particle Beams* **14** 111(in Chinese)[谢鸿全、鄢 扬、刘盛纲 2002 强激光与粒子束 **14** 111]

[5] Xie H Q, Yan Y and Liu S G 2003 *Journal of Electronics and Information Technology* **25** 118 (in Chinese)[谢鸿全、鄢 扬、刘盛纲 2003 电子与信息学报 **25** 118]

[6] Yang Z Q, Li D Z and Liang Z 1996 *High Power Laser and Particle Beams* **8** 513(in Chinese)[杨梓强、李大治、梁 正 1996 强激光与粒子束 **8** 347]

[7] Minami K *et al* 1990 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **18** 537

[8] Ali M M, Ogura K and Minami K 1992 *Phys. Fluids* B **4** 1023

[9] Sawhney R, Maheshwari K P and Choyal Y 1993 *IEEE Trans on Plasma Science*, **21** 609

[10] Wu J Q, Liu S G and Mo Y L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 324(in Chinese)[吴坚强、刘盛纲、莫元龙 1997 物理学报 **46** 324]

[11] Liu P K *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 892(in Chinese)[刘濮鲲等 1997 物理学报 **46** 892]

[12] Kobayashi S *et al* 1998 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **26** 669

[13] Nusinovich G S *et al* 1998 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **26** 628

[14] Gao H and Liu S G 2000 *Chin. Phys.* **9** 274

[15] Liu S G *et al* 2000 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **28** 2135

[16] Liu S G *et al* 2000 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **28**, 2152

[17] Xie H Q *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 914(in Chinese)[谢鸿全等 2003 物理学报 **52** 914]

[18] Trivelpiece A W and Gould R W 1959 *J. Appl. Phys.* **30** 1784

[19] Lou W R *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2481

[20] Ogura K *et al* 1992 *Journal of the Physical Society of Japan* **61** 4022

[21] Liu S G *et al* 1985 *Introduction to Microwave Electronics* (Beijing: National Defence Industry Press) 36 (in Chinese)[刘盛纲等 1985 微波电子学导论(北京 国防工业出版社)第 36 页]

Analysis of the characteristics of low-frequency modes in a corrugated waveguide filled with plasma*

Xie Hong-Quan[1)] Liu Pu-Kun[2)] Li Cheng-Yue[3)] Yan Yang[3)] Liu Sheng-Gang[3)]

[1)] (*School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang* 621002, *China*)

[2)] (*Institute of Electronics, Chinese Acaemy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[2)] (*Institute of High Energy Electronics, University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu* 610054, *China*)

(Received 20 October 2003; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

A corrugated waveguide filled with an infinitely thin annular plasma is immersed in a strong longitudinal magnetic field. By means of fluid model and linear field theory, the dispersion relation of the electromagnetic wave propagation along the system is derived. The dispersion characteristics and beam-wave interactions of low-frequency plasma modes are analyzed in two cases of various densities of plasma by numerical computation. It is found that the dispersion relation without electron beam satisfies exactly the Floquet theorem and the frequency of electromagnetic wave could not be confined by plasma oscillation frequency. The low-frequency plasma modes can even be coupled with TM modes as the plasma density is increased.

Keywords: plasma, corrugated waveguide, dispersion relation, gain

PACC: 5275, 5240D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347009), and the Science Foundation of Education Bureau of Sichuan Province, China (Grant No. 2003B019).