

量子简并性对气体斯特林制冷循环性能的影响^{*}

何济洲¹⁾ 王 磊²⁾ 李俊彬³⁾

¹⁾ 南昌大学物理系, 南昌 330047)

²⁾ 南昌大学建筑系, 南昌 330029)

³⁾ 江西交通职业技术学院, 南昌 330013)

(2004 年 3 月 18 日收到, 2004 年 4 月 26 日收到修改稿)

基于理想量子气体的状态方程, 分析了量子气体斯特林制冷循环中的回热特征, 推导出循环的制冷系数一般表达式. 获得了在强简并和弱简并条件下循环的制冷系数, 对全面理解气体斯特林制冷机的性能有所帮助.

关键词: 量子简并性, 斯特林制冷循环

PACC: 0530, 0570

1. 引 言

近年来, 有关量子热力循环问题已吸引了许多学者的关注, 已经取得了许多有益的结论. 在量子热力学循环中, 其工作物质可以涉及到量子气体、自旋 1/2 系统、谐振子系统和势阱中的微观粒子等. 一些文献对以量子气体为工质的卡诺、埃里克森、斯特林和奥托等热力循环中的功、功率、效率和制冷系数等性能参数进行了研究, 由于量子气体简并性的影响, 量子气体的各种热力学循环的性能是不同于经典气体的热力循环的性能^[1-10]. 另一些文献应用有限时间热力学的方法对以 1/2 自旋系统和谐振子系统为工质的量子热力循环的性能进行了研究^[11-15]. 还有一些文献建立了以势阱中的微观粒子为工质的量子卡诺循环模型, 得到了与经典卡诺循环类似的效率公式^[16, 17].

斯特林制冷循环是一类重要的制冷循环方式, 其工作物质可以是经典气体、磁材料和铁电材料. 按照经典热力学理论, 使用上述工质的斯特林制冷循环具有理想回热条件, 它们的制冷系数与工作在相同温度区间的卡诺制冷循环的制冷系数相等^[18-21]. 但是当气体的温度较低时, 经典气体模型将被量子气体模型所取代, 必须考虑气体的量子简并性, 这时气体斯特林制冷循环将不同于经典气体的斯特林制

冷循环, 它被称为量子斯特林制冷循环.

本文基于理想量子气体的状态方程, 对量子气体的斯特林制冷循环的回热特征进行了分析, 得到了制冷系数的普遍表达式, 并在强简并和弱简并条件下得到了制冷系数的具体表达式.

2. 理想量子气体的状态方程

根据量子统计理论^[22, 23], 理想量子气体的压强和粒子数密度分别为:

对费米气体

$$P = \frac{gkT}{\lambda^3} f_{5/2}(z), \quad (1)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z), \quad (2)$$

对玻色气体

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \quad (3)$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z). \quad (4)$$

其中 g 为自旋简并度, λ 为平均热波长, k 是玻尔兹曼常数, N 是理想量子气体粒子总数, N_0 是玻色气体在基态的粒子数, V 是量子气体的体积, v 是单个粒子所占据的体积, T 为气体的温度, $f_n(z)$ 和 $g_n(z)$ 分别称为费米和玻色积分. 而平均热波长、费米积分和玻色积分分别定义为

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10465003)和江西省自然科学基金(批准号: 0412011)资助的课题.

[†] E-mail: jizhouhe@263.net; 电话: 0791-8305626, 13870651139.

$$\lambda = h(2\pi mkT)^{1/2},$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x + 1},$$

和

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x - 1},$$

其中 $z = \exp(\mu/kT)$ 称为逸度, $\Gamma(n)$ 称为伽玛函数, h 为普朗克常数, m 为单个粒子的质量, μ 为气体的化学势. 由(1)–(4)式, 可得理想量子气体的状态方程

$$P = nkTF(z), \quad (5)$$

n 为粒子数密度, $F(z)$ 被称为修正因子.

对费米气体

$$F(z) = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}. \quad (6)$$

对玻色气体

$$F(z) = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad T > T_c, \quad (7)$$

$$F(z) = 0.5135 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad T \leq T_c, \quad (8)$$

T_c 是玻色-爱因斯坦凝聚温度^[24, 25], 且

$$T_c(v) = A/v^{2/3}, \quad (9)$$

其中 $A = h^2(2\pi mk[\zeta(3/2)]^{2/3})$ 为常数, $\zeta(n)$ 为 Riemann-Zeta 函数.

理想量子气体的熵和热容分别为:

对费米气体

$$S = Nk \left[\frac{5}{2} F(T, v) - \ln z \right], \quad (10)$$

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \frac{d}{dT} [TF(T, v)]. \quad (11)$$

对玻色气体, 当 $T > T_c$ 时, 熵表达式与(10)式相同, 当 $T \leq T_c$ 时, 熵表达式为

$$S = \frac{5}{2} Nk \frac{v}{\lambda^3} \xi \left(\frac{5}{2} \right) \quad T \leq T_c. \quad (12)$$

从(10)–(12)式, 能够推导出理想量子气体在等温过程和等容过程的热量分别为

对费米气体

$$Q_{if}^T = T(S_f - S_i)$$

$$= \frac{5}{2} NkT [F(T, v_f) - F(T, v_i)]$$

$$- NkT (\ln z_f - \ln z_i), \quad (13)$$

$$Q_{if}^v = \int_i^f C_v(T, v) dT$$

$$= \frac{3}{2} Nk [T_f F(T_f, v) - T_i F(T_i, v)], \quad (14)$$

对玻色气体, 当 $T > T_c$ 时, 热量表达式与(13)和(14)式相同, 当 $T \leq T_c$ 时, 热量的表达式改为

$$Q_{if}^T = T(S_f - S_i)$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{0.5135}{A^{3/2}} NkT^{5/2} (v_f - v_i), \quad (15)$$

$$Q_{if}^v = \int_i^f C_v(T, v) dT$$

$$= \frac{3}{2} \times 0.5135 \frac{v}{A^{3/2}} Nk [T_f^{5/2} - T_i^{5/2}], \quad (16)$$

其中下标 i 和 f 分别代表初始和终止状态. 利用(13)–(16)式, 可以分析理想量子气体斯特林制冷循环中的回热特征和性能参数.

3. 量子斯特林制冷循环

斯特林制冷循环是由两个等温过程和两个等容过程组成, 如图 1 为它的熵-温度示意图, 其中 Q_L 和 Q_H 分别为两个等温过程的热量, Q_{bc} 和 Q_{da} 分别为两个等容过程(回热过程)的热量, T_H 和 T_L 分别为高、低温热源的温度, v_H 和 v_L 分别为单个粒子占据的最大和最小体积, 所有热量均为正值. 由(13)和(14)式, 我们得到各过程的热量表达式

$$Q_L = \frac{5}{2} NkT_L [F(T_L, v_H) - F(T_L, v_L)]$$

$$- NkT_L (\ln z_d - \ln z_c), \quad (17)$$

$$Q_H = \frac{5}{2} NkT_H [F(T_H, v_H) - F(T_H, v_L)]$$

$$- NkT_H (\ln z_a - \ln z_b), \quad (18)$$

$$Q_{da} = \frac{3}{2} Nk [T_H F(T_H, v_H) - T_L F(T_L, v_H)] \quad (19)$$

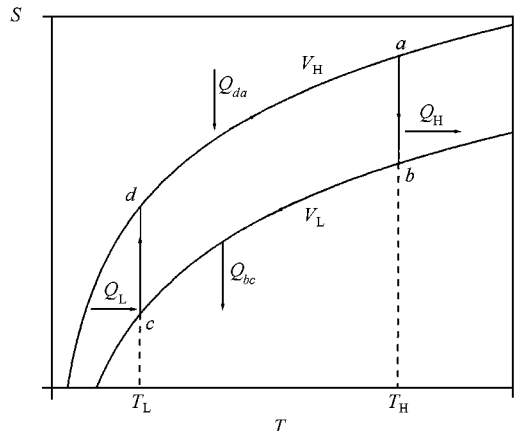


图 1 斯特林制冷循环的熵-温度示意图

和

$$Q_{bc} = \frac{3}{2} Nk [T_H F(T_H, \nu_L) - T_L F(T_L, \nu_L)], \quad (20)$$

这里 z_a, z_b, z_c 和 z_d 分别为状态 a, b, c, d 的逸度.

从(17)–(20)式,可以得到输入功为

$$\begin{aligned} W &= Q_H - Q_L + Q_{bc} - q_{da} \\ &= NkT_H [F(T_H, \nu_H) - F(T_H, \nu_L) + \ln(z_b / z_a)] \\ &\quad + NkT_L [F(T_L, \nu_L) - F(T_L, \nu_H) + \ln(z_d / z_c)]. \end{aligned} \quad (21)$$

从(19)和(20)式,可以得到净回热量

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q_{da} - Q_{bc} \\ &= \frac{3}{2} Nk \{ T_H [F(T_H, \nu_H) - F(T_H, \nu_L)] \\ &\quad + T_L [F(T_L, \nu_L) - F(T_L, \nu_H)] \}. \end{aligned} \quad (22)$$

图2画出了费米气体(^3He)在不同体积下函数 $TF(T, \nu)$ 与温度的关系图,利用(11)式并比较两条曲线的斜率,可以发现下列关系

$$C_V(T, \nu_H) > C_V(T, \nu_L), \quad (23)$$

即 $\Delta Q > 0$.

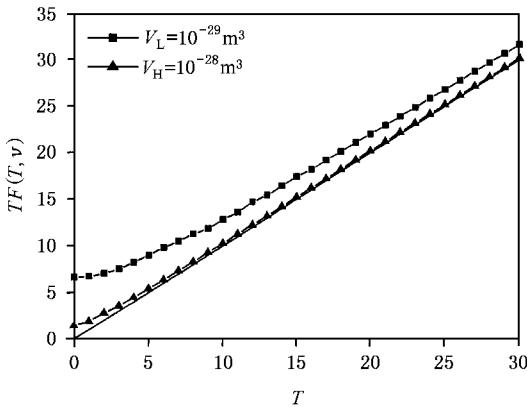


图2 费米气体 $TF(T, \nu)$ 与温度之间的关系曲线

它说明在等容过程 V_L 中流入回热器的热量 Q_{bc} 是小于在等容过程 V_H 中流出回热器的热量 Q_{da} , 那么回热器中不足的热量必须从高温热源补充, 否则回热器的温度将改变, 以致于回热器不能正常工作, 这时循环过程的制冷量不会改变. 所以制冷系数的一般表达式为

$$\begin{aligned} \epsilon &= Q_L / W \\ &= \left\{ \frac{5}{2} T_L [F(T_L, \nu_H) - F(T_L, \nu_L)] - T_L [\ln z_d / z_c] \right\} \\ &\quad \times \left\{ T_H [F(T_H, \nu_H) - F(T_H, \nu_L) + \ln(z_b / z_a)] \right\} \end{aligned}$$

$$+ T_L [F(T_L, \nu_L) - F(T_L, \nu_H) + \ln(z_d / z_c)]^{-1}. \quad (24)$$

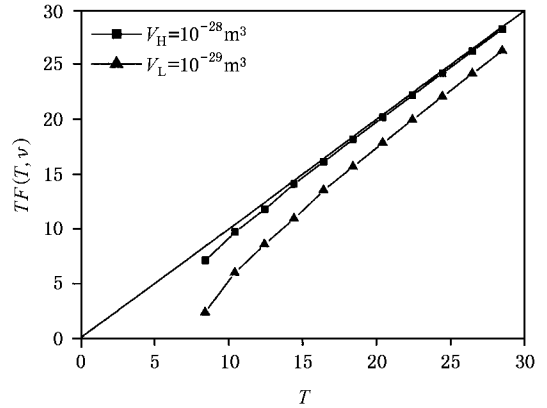


图3 玻色气体 $TF(T, \nu)$ 与温度之间的关系曲线

图3画出了玻色气体(^4He)在不同体积下函数 $TF(T, \nu)$ 与温度的关系图,利用(11)式并比较两条曲线的斜率,可以发现下列关系

$$C_V(T, \nu_H) < C_V(T, \nu_L), \quad (25)$$

即 $\Delta Q < 0$. 它说明在等容过程 V_L 中流入回热器的热量 Q_{bc} 是大于在等容过程 V_H 中流出回热器的热量 Q_{da} , 那么回热器中多余的热量必须放给低温热源, 否则回热器的温度将改变, 以致于回热器不能正常工作, 这时循环过程的制冷量将改变为

$$\begin{aligned} Q'_L &= Q_L - \Delta Q \\ &= NkT_L [F(T_L, \nu_H) - F(T_L, \nu_L) - \ln(z_d / z_c)] \\ &\quad - \frac{3}{2} NkT_H [F(T_H, \nu_L) - F(T_H, \nu_H)], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{Q'_L}{W} \\ &= \left\{ \frac{3}{2} T_H [F(T_H, \nu_H) - F(T_H, \nu_L)] \right. \\ &\quad \left. + T_L [F(T_L, \nu_H) - F(T_L, \nu_L) - \ln(z_d / z_c)] \right\} \\ &\quad \times \left\{ T_H [F(T_H, \nu_H) - F(T_H, \nu_L) + \ln(z_b / z_a)] \right. \\ &\quad \left. + T_L [F(T_L, \nu_L) - F(T_L, \nu_H) + \ln(z_d / z_c)] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

利用(24)和(27)式可以讨论强简并和弱简并情况下循环的制冷系数具体表达式.

4. 讨 论

1) 在气体弱简并条件下, 即高温和低密度情况

下,费米积分 $f_n(z)$ 可以展开为

$$f_{5/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} - \dots, \quad (28)$$

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \dots. \quad (29)$$

我们可以推导出以温度和体积为变量的费米气体的修正因子和逸度表达式

$$F(T, v) = 1 + B \frac{1}{T^{3/2} v}, \quad (30)$$

和

$$z = 4\sqrt{2} \frac{B}{T^{3/2} v} \left[1 + \frac{2B}{T^{3/2} v} \right], \quad (31)$$

其中 $B = h^3 / 3\sqrt{2} (\pi mk)^{3/2}$. 将(30)和(31)式代入(24)式,在一级近似条件下可以得到费米气体斯特林制冷循环的制冷系数为

$$\begin{aligned} \epsilon = & [T_L \ln(v_H/v_L) - (1/2) \sqrt{B/T_L^{1/2}} (1/v_L - 1/v_H)] \\ & \times \left\{ (T_H - T_L) \ln(v_H/v_L) + B(1/v_L - 1/v_H) \right. \\ & \left. \times [(1/T_H^{1/2}) - (1/T_L^{1/2})] \right\}^{-1}. \quad (32) \end{aligned}$$

同理,玻色积分 $g_n(z)$ 可以展开为

$$g_{5/2}(z) = z + \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} + \dots, \quad (33)$$

$$g_{3/2}(z) = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \dots. \quad (34)$$

玻色气体的修正因子和逸度表达式

$$z = 4\sqrt{2} \frac{D}{T^{3/2} v} [1 - 2D(T^{3/2} v)], \quad (35)$$

和

$$F(T, v) = 1 - D(T^{3/2} v), \quad (36)$$

其中 $D = h^3 [16(\pi mk)^{3/2}]$. 将(35)和(36)式代入(27)式,在一级近似条件下可以得到玻色气体斯特林制冷循环的制冷系数为

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{Q'_L}{W} \\ = & [T_L \ln(v_H/v_L) + D(1/v_L - 1/v_H)] \\ & \times (3(2T_H^{1/2}) - 1/T_L^{1/2}) \left\{ (T_H - T_L) \ln(v_H/v_L) \right. \\ & \left. + D(1/v_L - 1/v_H) \sqrt{1/T_L^{1/2} - 1/T_H^{1/2}} \right\}^{-1}. \quad (37) \end{aligned}$$

当 T 趋于足够大时, $F(T, v) \rightarrow 1$, 说明理想量子气体回到理想经典气体的行为. 从(32)和(37)式可知制冷系数近似为

$$\epsilon = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \epsilon_c, \quad (38)$$

与理想经典气体卡诺制冷循环的制冷系数相同.

2) 在气体强简并条件下,即低温和高密度情况

下,费米积分 $f_n(z)$ 可以展开为

$$\begin{aligned} f_{5/2}(z) = & \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \\ & \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^2 + \dots \right], \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{3/2}(z) = & \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \\ & \times \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^2 + \dots \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

我们可以推导出以温度和体积为变量的费米气体的修正因子和逸度表达式

$$F(T, v) = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} = \frac{2T_f(v)}{5T} + \frac{\pi^2 T}{6T_f(v)}, \quad (41)$$

和

$$\ln z = \frac{T_f(v)}{T} - \frac{\pi^2 T}{12T_f(v)}, \quad (42)$$

其中 $T_f(v) = \frac{(3\pi^2 h^3)^{2/3}}{2km} \frac{1}{v^{2/3}} = E/v^{2/3}$ 为费米温度, $E = \frac{(3\pi^2 h^3)^{2/3}}{2km}$ 为常数.

将(41)和(42)式代入(24)式,在一级近似条件下可以得到费米气体斯特林制冷循环的制冷系数为

$$\epsilon = \frac{T_L}{T_H - T_L} \frac{2T_L}{T_H + T_L} < \epsilon_c. \quad (43)$$

对玻色气体,当 $T \leq T_c$ 时,利用(15)(16)式,可以得到各个过程的热量、回热损失和制冷系数分别为

$$Q_L = \frac{5}{2} \times \frac{0.5135}{A^{3/2}} Nk T_L^{5/2} (v_H - v_L), \quad (44)$$

$$Q_H = \frac{5}{2} \times \frac{0.5135}{A^{3/2}} Nk T_H^{5/2} (v_H - v_L), \quad (45)$$

$$Q_{da} = \frac{3}{2} \times 0.5135 \frac{v_H}{A^{3/2}} Nk (T_L^{5/2} - T_H^{5/2}), \quad (46)$$

$$Q_{bc} = \frac{3}{2} \times 0.5135 \frac{v_L}{A^{3/2}} Nk (T_H^{5/2} - T_L^{5/2}), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q = & \frac{3}{2} \times 0.5135 \frac{1}{A^{3/2}} Nk (v_H - v_L) \\ & \times (T_L^{5/2} - T_H^{5/2}) > 0, \quad (48) \end{aligned}$$

和

$$\epsilon = \frac{5T_L^{5/2}}{\sqrt{2} (T_H^{5/2} - T_L^{5/2})}. \quad (49)$$

5. 结 论

考虑到气体的量子简并性,以理想量子气体为工质的斯特林制冷循环不具有理想回热条件,对费

米气体 $\Delta Q > 0$,对玻色气体 ,在玻色-爱因斯坦凝聚温度以上 $\Delta Q < 0$,而在玻色-爱因斯坦凝聚温度以下 $\Delta Q > 0$,不管什么情况 ,循环的制冷系数将小于卡诺制冷循环的制冷系数 . 当温度趋向很高时 ,理想费米气体就可看成经典理想气体 ,其制冷系数与

卡诺制冷循环的制冷系数相同 ;当温度很低时 ,气体必须看成量子气体 ,其制冷系数具有非常简洁的表达式 . 这里获得的结果有利于全面理解气体斯特林制冷机的性能 .

-
- [1] Sisman A and Saygin H 2001 *Appl. Energy* **68** 367
- [2] Sisman A and Saygin H 1999 *J. Phys. D : Appl. Phys.* **32** 664
- [3] Saygin H and Sisman A 2001 *J. Appl. Phys.* **90** 3086
- [4] Sisman A and Saygin H 2001 *Physics Scripta* **63** 263
- [5] Sisman A and Saygin H 2001 *Physics Scripta* **64** 108
- [6] Saygin H and Sisman A 2001 *Appl. Energy* **69** 77
- [7] He J Z , Chen J C and Hua B 2002 *Appl. Energy* **72** 542
- [8] Chen J C , He J Z and Hua B 2002 *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 7995
- [9] He J Z 2002 *Chinese Journal of Low Temperature Physics* **24** 142 (in Chinese) [何济洲 2002 低温物理学报 **24** 142]
- [10] He J Z 2001 *Cryogenics and Superconductivity* **29** 28 (in Chinese) [何济洲 2001 低温与超导 **29** 28]
- [11] Geva E and Kosloff R 1992 *J. Chem. Phys.* **96** 3054
- [12] He J Z , Chen J C and Hua B 2002 *Physical Review E* **65** 036145-1
- [13] Wu F , Chen L G , Sun F R , Wu C and Zhu Y 1998 *Energy Conv. & Mgmt.* **39** 1161
- [14] Geva E and Kosloff R 1992 *J. Chem. Phys.* **97** 4396
- [15] Wu F , Chen L G , Sun F R and Wu C 2000 *I. J. Engineering Science* **38** 239
- [16] Bhattacharyya K and Makhopadhyay S 2001 *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** 1529
- [17] Bener C M , Brody D C and Meister B K 2000 *J. Phys. A : Math. Gen.* **33** 4427
- [18] Chen J C and Yan Z J 1993 *Cryogenics* **33** 863
- [19] He J Z , Chen J C , Zhou Y H and Wang J T 2002 *Energy Conv. & Mgmt.* **43** 2319
- [20] He J Z , Chen J C and Wu C 2003 *I. J. Ambient Energy* **24** 221
- [21] Chen J C and Yan Z J 1996 *J. Phys. D : Appl. Phys.* **29** 987
- [22] Department of Physics of Peking University 1987 *Quantum Statistical Physics* (Beijing : Peking University Press) p88 (in Chinese) [北京大学物理系编 1987 量子统计物理学(北京大学出版社) 第 88 页]
- [23] Landau L D , Lifshitz E M 1958 *Statistical Mechanics* (London : Pergamon Press Ltd)
- [24] Yi X X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 995 (in Chinese) [衣学喜 1999 物理学报 **48** 995]
- [25] Yan K Z 2000 *Chin. Phys.* **9** 485

Influence of quantum degeneracy on the performance of a Stirling refrigeration cycle ^{*}

He Ji-Zhou¹⁾ Wang Lei²⁾ Li Jun-Bin³⁾

¹⁾*(Department of Physics , Nanchang University , Nanchang 330047 , China)*

²⁾*(Department of Architecture , Nanchang University , Nanchang 330029 , China)*

³⁾*(Department of Physics , Jiangxi Transportation Institute , Nanchang 330013 , China)*

(Received 18 March 2004 ; revised manuscript received 26 April 2004)

Abstract

Based on the equation of state of the ideal quantum gas , regenerative characteristics of the quantum Stirling refrigeration cycle is analyzed . The general expression for the coefficient of performance is derived . Under the condition of strong and weak gas degeneracy , the special expressions for the coefficient of performance are discussed . These results will be significant for the research of a Stirling refrigerator in the low temperature range .

Keywords : quantum degeneracy , Stirling refrigeration cycle

PACC : 0530 , 0570

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10465003) and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province , China (Grant No. 0412011) .