第 54 卷 第 1 期 2005 年 1 月
1000-3290/2005/54(01)/0047-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.1, January, 2005

$AdS_5 \otimes S^5$ 背景下 IIB 超弦的 Dressing 对称性及 Affine 可积性

熊传华

(西北大学现代物理研究所,西安 710069)

(2004 年 3 月 9 日收到;2004 年 4 月 14 日收到修改稿)

在 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中,IIB 超弦的运动方程与 Maurer-Cartan 方程在世界面上存在对偶对称性. 通过引入扭曲对偶(twisted dual)的概念,将有限的对偶变换推广到连续的对偶变换,并给出了 $AdS_5 \otimes S^5$ 中 IIB 超弦的 Lax 联络及其可积的相容条件.

关键词:扭曲对偶, κ 对称性, Lax 联络

PACC:1240H, 1190, 1110L

1. 引 言

在十维超引力理论中,可以有两种不同手征性 $N=2$ 的超引力理论:IIA, IIB 超引力. 这里 A, B 分别对应于两种超荷手征性的相反与相同.

IIB 超引力理论中,如果场量只有引力场和 R-R 4 阶反对称张量场(C_4),我们可以得到 $D3$ 膜的解. 在弦度规中解的形式是

$$\mathrm{d}s^2 = f^{-1/2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i\right) + f^{1/2}\mathrm{d}\Omega_6^2, \tag{1}$$

$$f = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 = 4\pi g_s N l_s^4, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\Omega_6^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5^2. \tag{3}$$

这里 g_s 是弦的耦合常数, l_s 为弦的基本长度.

在靠近 $D3$ 膜的视界附近,即 $r\to 0$ 时,度规(1)式可进一步改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \frac{r^2}{R^2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i\right) + \frac{R^2}{r^2}\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5^2\right)\\ &= \frac{r^2}{R^2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i\right) + \frac{R^2}{r^2}\mathrm{d}r^2 + R^2\mathrm{d}\Omega_5^2.\end{aligned} \tag{4}$$

此即为 $AdS_5 \otimes S^5$ 的度规形式,它具有最大时空超对称性.

研究超弦在一般背景中的运动行为有着十分重要的意义. 在 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中,因背景中有 R-R 4 阶反对称张量场,IIB 超弦的 I 作用量形式采用 Green-Schwarz 型是最为适当的. Metsaev 等[1,2] 已构造出在 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景下的 IIB 超弦的作用量. 场量取值在陪集超空间上[1,3—6]

$$M = \frac{SU(2,2\mid 4)}{SO(4,1)\otimes SO(5)}. \tag{5}$$

这里 $SO(4,1)\otimes SO(5)$ 是稳定子群.

陪集超空间的玻色部分为

$$\frac{SO(4,2)}{SO(4,1)} \otimes \frac{SO(6)}{SO(5)} = AdS_5 \otimes S^5, \tag{6}$$

其中 $SO(4,2)$, $SO(6)$ 分别为 AdS_5 和 S^5 的等长变换群(isometry group). 陪集超空间的玻色部分 $AdS_5 \otimes S^5$ 的坐标是 x^A, $A=0,1,\cdots,9$.

陪集超空间费米部分的坐标是 θ^I, $I=1,2$ 为超弦世界面上的旋量指标. 这里 θ^I 是具有相同手征性的 32 分量的旋量.

IIB Green-Schwarz 超弦可以看做世界面上的二维场论. 类似于平直时空的 Green-Schwarz 协变作用量, $AdS_5 \times S^5$ 中的 IIB 超弦作用量可以用含有 WZW 项的非线性 σ 模型的作用量. 描述它除具有整体的 $SU(2,2|4)$ 的对称性外,还具有局域的超对称性,即 κ 对称性. 在 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中的 IIB 超弦,在其世界面上具有无穷多守恒流[5] 及存在可积性[7] 本文根据 κ 对称性,在世界面上引入扭曲的对偶概念,将超代数 $SU(2,2|4)$ 仿射化(affined),期望能与

可积的 Affined Toda 场论相联系,并能够借助于可积场论中的 Dressing 变换技术,得到 $AdS_5 \otimes S^5$ 中的 IIB 超弦的经典孤子解. 进一步利用 R 矩阵可以将在 $AdS_5 \otimes S^5$ 中的 IIB 超弦量子化.

2. 扭曲对偶(twisted dual)变换及可积的相容条件

2.1. $SU(2,2|4)$ 超代数的基本对易关系式

超群 $SU(2,2|4)$ 的生成元由玻色与费米两部分组成. 玻色生成元又可分成两部分:一部分是群 $SO(4,2)$ 的生成元 P^a 和 J^{ab} ($a, b = 0, \cdots 4$). P^a 对应于 AdS_5 中的平移算子; J^{ab} 对应于 AdS_5 中的转动算子. 另一部分是 $SO(6)$ 的生成元 $P^{a'}$ 及 $J^{a'b'}$ ($a', b' = 0, \cdots, 4$),它们分别对应于 S^5 中的平移和转动生成元.

费米部分生成元是 $Q_{\alpha\alpha' I}$. 这里 $\alpha = 1, \cdots, 4$ 为 AdS_5 中的旋量指标, $\alpha' = 1, \cdots, 4$ 为 S^5 中的旋量指标.

我们可以在 $SO(4,1) \oplus SO(5)$ 基底下将超群的生成元记为[1)] $T^A = (P_a, P_{a'}, J_{ab}, J_{a'b'}, Q_{\alpha\alpha'})$. 这些生成元之间的对易关系式为

$$
\begin{aligned}
&[P_a, P_b] = J_{ab}, \\
&[P_{a'}, P_{b'}] = -J_{a'b'}, \qquad (7)\\
&[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b, \\
&[P_{a'}, J_{b'c'}] = \eta_{a'b'} P_{c'} - \eta_{a'c'} P_{b'}, \qquad (8)\\
&[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc} J_{ad} + 3 \text{ terms}, \\
&[J_{a'b'}, J_{c'd'}] = \eta_{b'c'} J_{a'd'} + 3 \text{terms}, \qquad (9)\\
&[Q_I, P_a] = -\frac{\mathrm{i}}{2} \varepsilon_{IJ} Q_J \gamma_a, \\
&[Q_I, P_{a'}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJ} Q_J \gamma_{a'}, \qquad (10)\\
&[Q_I, J_{ab}] = -\frac{1}{2} Q_I \gamma_{ab}, \\
&[Q_I, J_{a'b'}] = -\frac{1}{2} Q_I \gamma_{a'b'}, \qquad (11)\\
&\{Q_{\alpha\alpha'}, Q_{\beta\beta'}\} = \delta_{IJ} [-2\mathrm{i} C_{\alpha'\beta'} (C\gamma^a)_{\alpha\beta} P_a \\
&\qquad + 2 C_{\alpha\beta} (C'\gamma^{a'})_{\alpha'\beta'} P_{a'}] \\
&\qquad + \varepsilon_{IJ} [C_{\alpha'\beta'} (C\gamma^{ab})_{\alpha\beta} J_{ab} \\
&\qquad - C_{\alpha\beta} (C'\gamma^{a'b'})_{\alpha'\beta'} J_{a'b'}]. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

2.2. Maurer-Cartan 方程及 Euler-Lagrange 运动方程的对偶变换

取超群 $SU(2,2|4)$ 的陪集代表元素 $G = G(x, \theta)$,由此可以构造出取值在超代数 $SU(2,2|4)$ 上的左不变的 Maurer-Cartan 1 形式

$$
\begin{aligned}
G^{-1}\mathrm{d}G &= L^A P_A \\
&= L^a P_a + L^{a'} P_{a'} + \frac{1}{2}(L^{ab} J_{ab} + L^{a'b'} J_{a'b'}) \\
&\quad + L^{\alpha\alpha' I} Q_{\alpha\alpha' I}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

其中 $L^A = \mathrm{d}X^M L_M^A$, $X^M = (x, \theta)$.

可以将此左不变的 Maurer-Cartan 1 形式进一步分解为联络部分(H)和第二基本型部分(K, K'),即

$$G^{-1}\mathrm{d}G = H + K + K', \qquad (14)$$

这里

$$H = \frac{1}{2}(L^{ab} J_{ab} + L^{a'b'} J_{a'b'}), \qquad (15)$$

$$K = L^a P_a + L^{a'} P_{a'}, \qquad (16)$$

$$K' = L^{\alpha\alpha' I} Q_{\alpha\alpha' I}. \qquad (17)$$

利用 Maurer-Cartan 1 形式,可以得到 Maurer-Cartan 结构方程

$$\mathrm{d}(G^{-1}\mathrm{d}G) + (G^{-1}\mathrm{d}G) \wedge (G^{-1}\mathrm{d}G) = 0. \qquad (18)$$

根据超代数 $SU(2,2|4)$ 的对易式,可以将(18)式的 Maurer-Cartan 方程表达为如下的形式[1]:

$$\mathrm{d}L^a = -L^b \wedge L^{ba} - \mathrm{i}\bar{L}^I \gamma^a \wedge L^I, \qquad (19)$$

$$\mathrm{d}L^{a'} = -L^{b'} \wedge L^{b'a'} + \bar{L}^I \gamma^{a'} \wedge L^I, \qquad (20)$$

$$\mathrm{d}L^{ab} + L^{ac} \wedge L^{cb} = -L^a \wedge L^b + \varepsilon^{IJ} \bar{L}^I \gamma^{ab} \wedge L^J, \qquad (21)$$

$$\mathrm{d}L^{a'b'} + L^{a'c'} \wedge L^{c'b'} = L^{a'} \wedge L^{b'} - \varepsilon^{IJ} \bar{L}^I \gamma^{a'b'} \wedge L^J, \qquad (22)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L^I &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \gamma^a \varepsilon^{IJ} L^J \wedge L^a + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \gamma^{a'} L^J \wedge L^{a'} \\
&\quad + \frac{1}{4} \gamma^{ab} L^I \wedge L^{ab} + \frac{1}{4} \gamma^{a'b'} L^I \wedge L^{a'b'}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

可以将 Maurer-Cartan 1 形式(13)式及 Maurer-Cartan 方程诱导至超弦的世界面 $\Sigma(\tau, \sigma)$ 上,这时 Maurer-Cartan 1 形式变为

$$
\begin{aligned}
G^{-1}\partial_i G &= L_i^A P_A \\
&= L_i^a P_a + L_i^{a'} P_{a'} + \frac{1}{2}(L_i^{ab} J_{ab} + L_i^{a'b'} J_{a'b'}) \\
&\quad + L_i^{\alpha\alpha I'} Q_{\alpha\alpha I}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

这里 $L_i^{AA} \equiv \partial_i X^M L_M^A$, $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^i}$, $\sigma^i = (\tau, \sigma)$.

---

1) 本文中, $A = (a, a')$, α, α', I, J 均与文献[1]一致. $i, j = 1,2$ 为世界面的指标.

Maurer-Cartan 方程中的(19),(20)式可表达为

$$\varepsilon^{ij}(\partial_i L_j^a + L_i^{ab}L_j^b) + i\varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^I = 0, \tag{25}$$

$$\varepsilon^{ij}(\partial_i L_j^{a'} + L_i^{a'b'}L_j^{b'}) - \varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^{a'} L_j^I = 0. \tag{26}$$

这里已用到关系式 $L^{ab} = -L^{ba}$.

可进一步将方程(25),(26)改写为

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{ij}(\partial_i L_j^a + L_i^{ab}L_j^b) + i\varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^I\\
&= \partial_i(\varepsilon^{ij}L_j^a) + L_i^{ab}\varepsilon^{ij}L_j^b + i\varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^I\\
&= \partial_i(\varepsilon^{ij}L_j^a) + L_i^{ab}\varepsilon^{ij}L_j^b + i\varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^I\\
&= \partial_i(\sqrt{g} * L_j^a) + L_i^{ab}\sqrt{g} * L_j^b + i\varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^I,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{ij}(\partial_i L_j^{a'} + L_i^{a'b'}L_j^{b'}) - \varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^{a'} L_j^I\\
&= \partial_i(\varepsilon^{ij}L_j^{a'}) + L_i^{a'b'}\varepsilon^{ij}L_j^{b'} - \varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^{a'} L_j^I\\
&= \partial_i(\varepsilon^{ij}L_j^{a'}) + L_i^{a'b'}\varepsilon^{ij}L_j^{b'} - \varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^{a'} L_j^I\\
&= \partial_i(\sqrt{g} * L_j^{a'}) + L_i^{a'b'}\sqrt{g} * L_j^{b'} - \varepsilon^{ij}\bar{L}_i^I\gamma^{a'} L_j^I.\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$* L_i^A = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g}} L^{jA}, \quad A = (a, a'). \tag{29}$$

$AdS_5 \times S^5$ 背景下的 IIB 超弦作用量类似于平直空间($R^{9,1}$)中的 Green-Schwarz 作用量[8],具体表达式为[1]

$$\begin{aligned}S = &-\frac{1}{2}\int_{\partial M_3} d^2\sigma\sqrt{g}g^{ij}(L_j^a L_j^a + L_i^{a'}L_j^{a'})\\
&+ \int_{M^3} S^{IJ}(iL^a \wedge \bar{L}^I\gamma^a \wedge L^J\\
&- L^{a'}\bar{L}^I\gamma^{a'} \wedge L^J.\end{aligned} \tag{30}$$

这里,$S^{IJ} = \mathrm{diag}(1, -1)$此作用量具有整体的 $SU(2,2|4)$超对称不变性,同时它还具局域超对称不变性,即 κ 对称性.为了描述 κ 对称性,引入投影算子 $P_\pm^{ij}$,其定义为

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} \pm \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ij}). \tag{31}$$

在 κ 超对称变换下,16 分量旋量 κ_i^I做如下变换:

$$P_-^{ij}\kappa_j^1 = \kappa^{i1}, \quad P_+^{ij}\kappa_j^2 = \kappa^{i2}. \tag{32}$$

以下将会看到,利用投影算子 $P_\pm^{ij}$,可以得到 Maurer-Cartan 方程与 Euler-Lagrange 运动方程之间的对偶关系.

对作用量(30)变分,可以得到运动方程[1]

$$\sqrt{g}g^{ij}(\nabla_i L_j^a + L_i^{ab}L_j^b) + i\varepsilon^{ij}S^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^J = 0, \tag{33}$$

$$\sqrt{g}g^{ij}(\nabla_i L_j^{a'} + L_i^{a'b'}L_j^{b'}) - \varepsilon^{ij}S^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^J = 0, \tag{34}$$

$$(\gamma^a L_i^a + i\gamma^{a'}L_i^{a'})(\sqrt{g}g^{ij}\delta^{IJ} - \varepsilon^{ij}s^{IJ})L_j^J = 0. \tag{35}$$

方程中∇_i 是与世界面上度规 g^{ij}有关的协变微分. L_i^{ab} 为陪集超空间的 Cartan 联络,它出现在运动方程中是因为靶空间为弯曲空间.

可进一步将所得到的运动方程(33),(34)改写成

$$g^{ij}(\partial_i(\sqrt{g}L_j^a) + L_i^{ab}L_j^b) + i\varepsilon^{ij}S^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^J = 0, \tag{36}$$

$$g^{ij}(\partial_i(\sqrt{g}L_j^{a'}) + L_i^{a'b'}L_j^{b'}) - \varepsilon^{ij}S^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^J = 0. \tag{37}$$

这里,已用到关系式

$$\nabla_i L^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}L^i). \tag{38}$$

将 Maurer-Cartan 方程中的玻色场量 L_i^A($A = (a, a')$)做如下的变换:

$$L_i^A \leftrightarrow * L_i^A. \tag{39}$$

同时,对于 Maurer-Cartan 方程中的费米场量部分 $L_i^I, \bar{L}_i^I$ 做变换:

$$L^{i1} \leftrightarrow P_-^{il}L_l^1, \quad L^{i2} \leftrightarrow P_+^{il}L_l^2, \tag{40}$$

$$\bar{L}^{i1} \leftrightarrow P_-^{il}\bar{L}_l^1, \quad \bar{L}^{i2} \leftrightarrow P_+^{il}\bar{L}_l^2. \tag{41}$$

利用到以下的关系式

$$P_+^{ik}P_+^{il} = P_+^{jk}P_+^{il}, \tag{42}$$

$$P_-^{ij}L_j^1 = L^{i1}, \quad P_+^{ij}L_j^2 = L^{i2}, \tag{43}$$

我们有

$$\begin{aligned}\bar{L}^{i2} \wedge L^{j2} &\leftrightarrow P_+^{il}\bar{L}_l^2 \wedge P_+^{jk}L_k^2\\
&= P_+^{jl}\bar{L}_l^2 \wedge P_+^{ik}L_k^2\\
&= \bar{L}^{j2} \wedge L^{i2} = -\bar{L}^{i2} \wedge L^{j2}.\end{aligned} \tag{44}$$

这里,尽管 $P_\pm^{ij}$ 表示为作用 Cartan 1 形式上,但应理解为其作用对象是费米生成元 Q_j^I 上,本文均采用此约定.

容易看出,Maurer-Cartan 方程(27),(28)在上述的变换下分别与 Euler-Lagrange 运动方程(36),(37)相互对偶.应当指出,方程中的 L_i^{ab} 在上述对偶变换下不发生变化. 在研究一般非线性 σ 模型对偶变换时,都要求 H 空间不变,而 K 空间的元素互为对偶变换.在现在我们所讨论的模型中,同样要求 H 不变,但此时需将 K 空间扩充为相空间,此相空间的元素做互为对偶变换.

2.3. 扭曲的对偶及可积的相容性条件

我们可以通过引入扭曲的对偶变换将有限对偶变换过渡到连续对偶变换.在世界面上沿正负光锥的两个方向 $\tau \pm \sigma$ 分别做伸缩变换,伸缩因子为 λ, λ^{-1}.对应于靶空间的玻色场量在这两个方向分别转 $\pm 2\varphi$.费米场量要分别在 κ^1, κ^2 两个方向转

$\pm\varphi$.将它们作线性组合可得到连续对偶变换.

对于玻色场量部分,我们有

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{Ai} &= e^{2\varphi}P_{+}^{ij}L_j^A + e^{-2\varphi}P_{-}^{ij}L_j^A\\ &= e^{2\varphi}\times\frac{1}{2}\left(g^{ij}+\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ij}\right)L_j^A\\ &\quad + e^{-2\varphi}\times\frac{1}{2}\left(g^{ij}-\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ij}\right)L_j^A\\ &= \frac{1}{2}(e^{2\varphi}+e^{-2\varphi})L^{Ai}\\ &\quad + \frac{1}{2}(e^{2\varphi}-e^{-2\varphi})\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ij}L^{Ai}\\ &= \cosh 2\varphi\, L^{Ai} + \sinh 2\varphi * L_j^A\\ &= \frac{1}{2}(\lambda^1+\lambda^{-1})L^{Ai}\\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda^1+\lambda^{-1}) * L^{Ai}. \end{aligned} \tag{45}$$

费米部分是

$$\tilde{L}^{i1} = e^{\varphi}P_{+}^{ij}L_j^{\ 1} = e^{\varphi}L^{i1} = \lambda^{1/2}L^{i1}, \tag{46}$$

$$\tilde{L}^{i2} = e^{-\varphi}P_{-}^{ij}L_j^2 = e^{-\varphi}L^{i2} = \lambda^{-1/2}L^{i2}. \tag{47}$$

这里用到

$$e^{2\varphi} = \lambda. \tag{48}$$

由此,可以构造出含有谱参数(λ)的 Lax 联络 A_i

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2}L_i^{AB}J_{AB} + \tilde{L}_i^AP_A + \tilde{L}_i^{\alpha\alpha'1}Q_{\alpha\alpha'1}\\ &\quad + \tilde{L}_1^{\alpha\alpha'2}Q_{\alpha\alpha'2}\\ &= \frac{1}{2}L_i^{AB}J_{AB} + e^{2\varphi}P_{+ij}L^{jA}P_A\\ &\quad + e^{-2\varphi}P_{-ij}L^{jA}P_A + e^{\varphi}L_i^{\alpha\alpha'1}Q_{\alpha\alpha'1}\\ &\quad + e^{-\varphi}L_i^{\alpha\alpha'2}Q_{\alpha\alpha'2}\\ &= \frac{1}{2}L_i^{AB}J_{AB} + \frac{1}{2}(\lambda^1+\lambda^{-1})L_i^AP_A\\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda^1-\lambda^{-1}) * L_i^AP_A + \lambda^{1/2}L_i^{\alpha\alpha'1}Q_{\alpha\alpha'1}\\ &\quad + \lambda^{-1/2}L_i^{\alpha\alpha'2}Q_{\alpha\alpha'2}. \end{aligned} \tag{49}$$

给定 Lax 联络 A_i,就可以得到以下的可积方程:

$$\partial_i U = A_i U. \tag{50}$$

不难证明,Lax 联络 A_i 满足可积相容条件

$$A_{i,j} - A_{j,i} + [A_i, A_j] = 0. \tag{51}$$

对于 Lax 联络 A_i,可以取其的世界面上的时间分量(τ 分量),记为 A.由此可以得到经典的 r 矩阵

$$\{A(\lambda), A(\mu)\} = [r, A(\lambda)\otimes A(\mu)], \tag{52}$$

对于方程的左边,通过基本场量 $X(x^A,\theta)$ 与其共轭动量 Π_X 的基本泊松括号,得到 $\{A(\lambda), A(\mu)\}$. 比较方程两边,即可定出 r 矩阵.

我们比较感兴趣的是通过引入 loop 参数 λ 以及中心扩张项,将现在的超代数 $SU(2,2|4)$ 仿射化,即变成仿射的超代数 $\hat{SU}(2,2|4)$. 对于 $\hat{SU}(2,2|4)$,它所对应的 r 矩阵可以通过标准的方法得到[9,10]. 我们下一步工作是希望找出两种方法所得到的 r 矩阵的关系.

3. Lax 联络在 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基底下的表示

我们可以将 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 基底换成 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基底.这时需将 Lax 联络 A_i 重新在新基底写出. 首先须将 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 基底下的生成元改写成 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基底下的形式.可先从 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 到 $SO(3,1)\oplus SU(4)$ 基底.在此基底下,生成元是平移算子 P^a,共形 boosts 算子 K^a,膨胀算子 D,$SO(3,1)$ Lorentz 代数生成元 J^{ab} 以及 $SU(4)$ 代数生成元 J_j^i.由文献[2]中,我们可得到 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 基底下的生成元 $\hat{P}^A$,$\hat{J}^{AB}$ 与 $SO(3,1)\oplus SU(4)$ 基底下生成元 P^μ,K^μ,D,J_j^i 之间的关系式

$$\hat{P}^\mu = \frac{1}{2}(P^\mu - 2K^\mu), \tag{53}$$

$$\hat{J}^{4\mu} = \frac{1}{2}(P^\mu + 2K^\mu), \tag{54}$$

$$D = -\hat{P}^4, \tag{55}$$

$$J^{\mu\nu} = \hat{J}^{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu = 0,\cdots,3), \tag{56}$$

$$J_j^i \equiv -\frac{i}{2}(\gamma^{a'})_j^i P^{a'} + \frac{1}{4}(\gamma^{a'b'})_j^i J^{a'b'}, \quad (i,j = 1,\cdots,4), \tag{57}$$

其中

$$\hat{P}^a = \frac{1}{2}\gamma^a, \quad J^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a,\gamma^b], \quad (a,b = 0,\cdots,4), \tag{58}$$

$$\hat{P}^{a'} = \frac{i}{2}\gamma^{a'}, \quad \hat{J}^{a'b'} = \frac{1}{4}[\gamma^{a'},\gamma^{b'}], \quad (a', b' = 1,\cdots,5). \tag{59}$$

这里,利用了以下的 Dirac 矩阵的定义.

对于 $SO(4,1)$,Dirac 矩阵是

$$\{\gamma^a,\gamma^b\} = \eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,1), \tag{60}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}, \gamma^4 = \begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\sigma^{\mu} = (1,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3), \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (-1,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3). \tag{62}$$

对于 $SO(5)$，Dirac 矩阵的定义是

$$\{\gamma^{a'},\gamma^{b'}\} = \delta^{a'b'}, \tag{63}$$

$$\gamma^{\mu'} = \begin{pmatrix} & \sigma^{\mu'} \\ \bar{\sigma}^{\mu'} & \end{pmatrix}, \ \gamma^{4'} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$\sigma^{\mu'} = (1,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3), \quad \bar{\sigma}^{\mu'} = (1,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3). \tag{65}$$

Maurer-Cartan 1 形式在 $SO(3,1)\oplus SU(4)$ 基下的表达式为

$$\hat{L}^{\mu} = L_P^{\mu} - \frac{1}{2}L_K^{\mu},$$

$$\hat{L}^{4\mu} = L_P^{\mu} + \frac{1}{2}L_K^{\mu}\hat{L}^4 = -L_D,$$

$$\hat{L}^{\mu\nu} = L^{\mu\nu}, \tag{66}$$

$$L^{a'} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^{a'})^i_j L_i^{\ j}, \quad L^{a'b'} = \frac{1}{4}(\gamma^{a'b'})^i_j L_i^j. \tag{67}$$

为了将 $SO(3,1)\oplus SU(4)$ 基底换成 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基底，引入 $SL(2,c)$ 的生成元

$$P_{a\dot{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\mu})_{a\dot{b}}P_{\mu}, \quad K_{a\dot{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\mu})_{a\dot{b}}K_{\mu}, \tag{68}$$

$$J_{ab} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{ab}J_{\mu\nu}, \quad J_{\dot{a}\dot{b}} = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}}J_{\mu\nu}. \tag{69}$$

对应的 Maurer-Cartan 1 形式是

$$L_P^{\ a\dot{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\mu})^{a\dot{b}}L_{P\mu}, \quad L_K^{\ a\dot{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\mu})^{a\dot{b}}L_{K\mu}, \tag{70}$$

$$L^{ab} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^{ab}L_{\mu\nu}, \quad L^{\dot{a}\dot{b}} = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}}L_{\mu\nu}. \tag{71}$$

这时 Maurer-Cartan 1 形式表达为

$$\begin{aligned} G^{-1}\mathrm{d}G &= L_P^{a\dot{b}}P_{a\dot{b}} + L_K^{a\dot{b}}K_{a\dot{b}} + L_D D \\ &\quad + \frac{1}{4}(L^{ab}J_{ab} + L^{\dot{a}\dot{b}}J_{\dot{a}\dot{b}}) + L_j^iJ_i^j \\ &\quad + L_{Qi}^aQ_a^i - L_{Qi}^{\dot{a}}Q_{\dot{a}}^i + L_{Si}^aS_a^i - L_{Si}^{\dot{a}}S_{\dot{a}}^i, \end{aligned} \tag{72}$$

其中 H，K，K' 分别是

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}L^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + \frac{1}{2}J_{4\mu}L^{4\mu} + \frac{1}{2}L^{a'b'}J_{a'b'} \\ &= \frac{1}{2}L^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(L_P^{\mu} + \frac{1}{2}L_K^{\ \mu}\right)(P_{\mu} + 2K_{\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2(\gamma^{a'b'})^i_jL_i^j(\gamma^{a'b'}) \\ &= \frac{1}{2}J^{\mu\nu}L_{\mu\nu} + \frac{1}{2}L_P^{\ \mu}P_{\mu} + \frac{1}{2}L_K^{\mu}K_{\mu} + L_P^{\mu}K_{\mu} \\ &\quad + \frac{1}{4}L_K^{\mu}P_{\mu} + \frac{1}{32}(\gamma^{a'b'})^i_jL_i^j(\gamma^{a'b'}) \\ &= \frac{1}{4}(J^{\dot{a}\dot{b}}L_{\dot{a}\dot{b}} + J^{ab}L_{ab}) + \frac{1}{2}(L_P^{\ ab}P_{a\dot{b}} \\ &\quad + L_K^{\ a\dot{b}}K_{a\dot{b}}) + L_P^{\ a\dot{b}}K_{a\dot{b}} + \frac{1}{4}L_K^{\ a\dot{b}}P_{a\dot{b}} \\ &\quad + \frac{1}{32}(\gamma^{a'b'})(\gamma^{a'b'})^i_jL_i^{\ j}, \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} K &= \hat{L}^{\mu}\hat{P}_{\mu} + \hat{L}^4\hat{P}_4 + \hat{L}^{a'}\hat{P}_{a'} \\ &= \frac{1}{2}(L_P^{\ \mu} - \frac{1}{2}L_K^{\mu})(P_{\mu} - 2K_{\mu}) \\ &\quad + L_D D + \frac{1}{4}\gamma^{a'}(\gamma^{a'})^i_jL_i^{\ j}, \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} K' &= L^{\alpha\alpha'1}Q_{\alpha\alpha'1} + L^{\alpha\alpha'2}Q_2 \\ &= L_{Qi}^aQ_a^i - L_Q^{\dot{a}i}Q_{\dot{a}i} + L_{Si}^aS_a^i - L_{Si}^{\dot{a}}S_{\dot{a}}^i. \end{aligned} \tag{75}$$

这里 Q_a，$Q_{\dot{a}}$，S_a，$S_{\dot{a}}$ 是 $SL(2,c)$ 基底下的费米生成元.

我们可将在 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 基下的 Lax 联络 A_i(49)在 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基下写出，这时只需要将 Lax 联络 A_i 的 $SO(4,1)\oplus SO(5)$ 基下的生成元换成 $SL(2,c)\oplus SU(4)$ 基下的生成元. 我们有

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{4}(L_i^{\dot{a}\dot{b}}J_{\dot{a}\dot{b}} + L_i^{ab}J_{ab}) + \frac{1}{2}(L_{iP}^{a\dot{b}}P_{a\dot{b}} + L_{iK}^{a\dot{b}}K_{a\dot{b}}) \\ &\quad + L_{iP}^{a\dot{b}}K_{a\dot{b}} + \frac{1}{4}L_{iK}^{a\dot{b}}P_{a\dot{b}} \\ &\quad + \frac{1}{32}(\gamma^{a'b'})(\gamma^{a'b'})^m_lL_{im}^l \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1})\left(\frac{1}{2}(L_{iP}^{\mu} - \frac{1}{2}L_{iK}^{\mu}\right)\gamma_{\mu} \\ &\quad - \frac{1}{2}L_{iD}\gamma_4 + \frac{1}{4}\gamma^{a'}(\gamma^{a'})^m_lL_{im}^l) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ij}(\frac{1}{2}(L_{jP}^{\mu} - \frac{1}{2}L_{jK}^{\mu})\gamma_{\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2}L_{iD}\gamma_4 + \frac{1}{4}\gamma^{a'}(\gamma^{a'})^m_lL_{im}^l \\ &\quad + \lambda^{1/2}(L_{iQl}^aQ_a^l - L_{iQ}^{\dot{a}l}Q_{\dot{a}l}) \\ &\quad + \lambda^{-1/2}(L_{iSl}^aS_a^l - L_{iSl}^{\dot{a}}S_{\dot{a}}^l). \end{aligned} \tag{76}$$

4. 讨　论

$AdS_5\otimes S^5$ 背景中的 IIBGreen-Schwarz(GS)超弦在其世界面上具有无穷多的守恒流. 在此背景下 IIB 超弦的 GS 作用量不但具有整体的超对称性而且还具有局域的超对称(κ 对称性). 正是由于具有

κ 对称性,我们在超弦的世界面上对于玻色场量分别沿光锥正负方向作角度相反的扭曲转动;对于费米场量,则沿 κ 对称的两个方向做相反的转动,转动的角度是玻色场量的一半.亦即我们在世界面上引入对偶转动,同时玻色及费米场量在相空间做角度相反的转动(twisted dual).这样,通过引入扭曲转动参数 λ,从而将超代数 $SU(2,2|4)$ loop 化,并可进一步得到 Affined 的超代数 $\hat{SU}(2,2|4)$.这样可以与 Affined Toda 的可积场论联系起来.我们知道,在可积场论中利用 Dressing 变换的技术,可以求得单孤子及多孤子解.由此可以得到 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中的 IIB 超弦的经典孤子解.利用 r 矩阵,我们还可进一步将经典解量子化.

本文是在侯伯宇教授指导下完成的,作者同时也感谢岳瑞宏教授的指导和讨论.

[1] Metsaev R R and Tseylin A A 1998 *Nucl. Phys.* B **533** 109

[2] Metsaev R R 2000 *JHEP* 11,014

[3] Kallosh R, Rahmfeld J and Rajaraman A 1998 *JHEP* 09,002

[4] Roiban R and Siegel W 2000 *JHEP* 11,024

[5] Bena I, Polchinski J and Roiban R 2003 e-print hep-th/0305116

[6] Alday L F 2003 *JHEP* 12,033

[7] Dolan L, Nappi C R and Witten E 2003 *JHEP* 10,017

[8] Green M B and Schwarz J H 1984 *Phys. Lett.* B **136** 367

[9] Babelon O 1993 *Int. J. Mod. Phys.* A **8** 507

[10] Babelon O and Bonora L 1990 *Phys. Lett.* B **244** 220

The Dressing symmetry and Affine integrability of type IIB superstring in $AdS_5 \otimes S^5$ background

Xiong Chuan-Hua

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

(Received 9 March 2004; revised manuscript received 14 April 2004)

Abstract

There exists a dual symmetry between the equations of motion and Maurrer-Cartan equations of the type IIB superstring on $AdS_5 \otimes S^5$. We generalize the finite dual transformation to the infinitesimal dual transformation by the twisted dual. We also obtain the Lax connexion and the compatibility condition for this integrable system.

Keywords: twisted dual, κ symmetry, Lax connexion

PACC: 1240H, 1190, 1110L