

一维无序扰动周期结构中局域长度的对称等价变换*

韩 鹏^{1,2)} 汪河洲¹⁾

¹⁾ 中山大学光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275)

²⁾ 华南师范大学物理系, 广州 510631)

(2004 年 3 月 31 日收到, 2004 年 4 月 30 日收到修改稿)

以一维周期结构光谱对称性为基础, 提出了无序扰动周期结构有关局域长度的一个新的变换关系: 对称等价变换, 并用数值计算加以验证. 该等价变换描述了不同无序度的结构对不同频率光子局域能力之间的等价关系, 为无序结构中光子局域性质的进一步研究提供了一个新的工具.

关键词: 局域长度, 无序扰动周期结构, 对称等价变换

PACC: 7155J, 4225B, 4270Q

1. 引 言

电子在强的无序势场中会发生局域现象^[1]. 对该性质的认识促进了非固体物理学的极大发展, 其提出者 Anderson 因此获得诺贝尔物理学奖, 这种局域现象也被称为 Anderson 局域. 进一步的研究发现, Anderson 局域是电子波动性的结果——相干多重散射, 所以光子、声子等在一定条件下也应具有 Anderson 局域现象. 光子局域、声子局域等也因此一直是近年来的研究热点^[2-5].

光子局域因其巨大的应用前景而受到人们的广泛关注. 人们最初的研究对象为完全无序系统, 即统计平均为均匀的系统. 然而苛刻的条件使光子局域的实现非常困难. 1987 年 John 提出在周期结构的基础上引入无序时, 由于周期结构存在能带与能隙, 在能带的边缘态密度较小, 这些频率在无序扰动时更容易被局域^[6]. 该思想的提出不仅促使了一个新领域——光子晶体研究的产生^[7-9], 也使无序扰动周期结构中的光子局域性质受到广泛关注^[10-12].

局域长度描述了无序系统局域能力的大小. 不同频率的光子在无序系统中被局域的程度不同, 因此局域长度随频率的变化关系(局域长度谱)在光子局域的性质研究中非常重要. 虽然 Thouless 把局域

长度与态密度联系起来^[13], 但人们还是仅对低频和 高频极限下的局域长度有较深入的认识^[14-16]. 对于一维无序扰动周期结构, Kondilis 曾得出一个关于局域长度的等价变换关系^[17]. 我们的研究发现^[18], 该等价变换关系是周期结构光谱周期性的结果, 从而将它推广到无序扰动周期结构的所有情况. 同时, 应用该等价变换关系, 解释了局域长度谱的振荡及其异常等性质.

本文以一维周期结构光谱的另一个重要性质——对称性为基础, 得到无序扰动周期结构中有关局域长度的一个新等价变换关系: 对称等价变换, 并用数值计算进行了验证. 该等价变换描述了不同无序度的结构对不同频率光子的局域能力之间的等价关系, 因此它为无序结构中光子局域性质研究提供了一个新的方法.

2. 结构描述

一维周期结构是由多种具有不同折射率的介质平面交替周期排列而成的多层膜系. 为简单起见, 我们研究由两种材料交替组成的一维周期结构, 分别用 \bar{d}_h, \bar{d}_l 和 n_h, n_l 表示它们的厚度和折射率, 其中下标“h”、“l”表示高或低折射率材料.

无序扰动周期结构是指在周期结构的基础上引

* 国家自然科学基金(批准号: 19934002 和 10274108)、国家高技术研究发展计划(批准号: 2003AA311022)、国家重点基础研究发展规划(批准号: 2003CB314901)和广东省自然科学基金资助的课题.

† E-mail: stswzhz@zsu.edu.cn

入无序,而整个无序结构的统计平均仍然为周期结构.被引入无序的对象可以是各周期单元的尺寸,也可以是组成的材料(表现为其折射率的无序变化).图 1 给出了两种一维无序扰动周期结构的图例,两结构中两种材料的扰动强度都为 5%.由于光波长量级的周期结构(光子晶体)一般由人工制作而成,因此单元尺寸大小的无序扰动在实际中更为常见,本文即以此为研究对象.

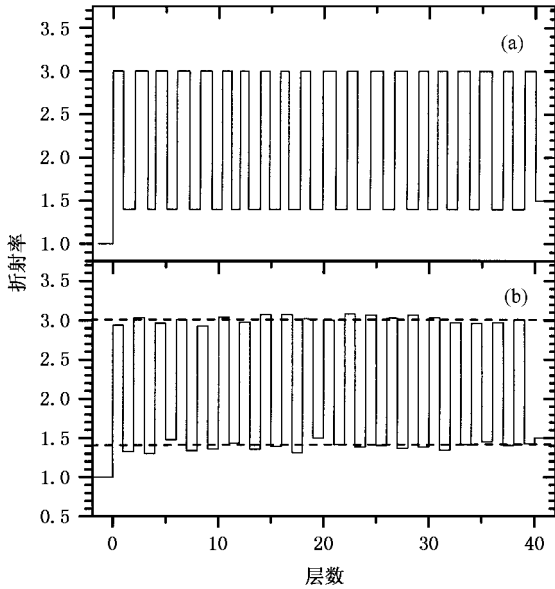


图 1 两种不同的无序扰动周期结构,两结构中高、低折射率材料的扰动强度都为 5%。(a)各层厚度被无序扰动,材料的折射率不变;(b)各层厚度不变,而材料的折射率被无序扰动

对于一维无序扰动周期结构,单元尺寸大小的无序扰动表现为各层厚度的变化,可用数学描述如下:

$$d_h(i) = \bar{d}_h [1 + \delta_h \zeta_h(i)], \quad (1a)$$

$$d_l(i) = \bar{d}_l [1 + \delta_l \zeta_l(i)], \quad (1b)$$

其中 ζ_h 和 ζ_l 为相互独立,并在 $[-1, 1]$ 区间均匀分布的两个随机变量, δ_h 和 δ_l 描述了它们随机变化的强度,取值范围为 $[0, 1]$ 。

3. 周期结构的光谱对称性

传输矩阵法是研究一维层状系统光学性质最有效的方法之一^[19],它用矩阵的形式描述了光场的切向分量在层状介质中的传输过程.光场经过某一层介质变化用特征矩阵 M_k 表示:

$$M_k = \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & j \sin \varphi_k / Y_k \\ j Y_k \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中

$$Y_k = \begin{cases} -(n_k^2 - n_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} & (\text{s 偏振}), \\ n_k^2 (n_k^2 - n_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} & (\text{p 偏振}) \end{cases} \quad (3)$$

为第 k 层的光学导纳(两种偏振), θ 为入射角, n_0 为入射介质的折射率.

$$\varphi_k = \frac{2\pi}{\lambda} (n_k^2 - n_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d_k \quad (4)$$

为第 k 层的相位. λ 是真空中波长, n_k 和 d_k 分别为第 k 层的折射率和厚度.整个系统的特征矩阵 M 为各层特征矩阵的乘积:

$$M = \prod_{k=1}^N M_k = \begin{bmatrix} u_{11} & i u_{12} \\ i u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

则系统透射率为

$$T = \frac{4 Y_0 Y_{\text{sub}}}{|Y_0 u_{11} + Y_{\text{sub}} u_{22}|^2 + |Y_0 Y_{\text{sub}} u_{12} + u_{21}|^2}, \quad (6)$$

其中, Y_0 和 Y_{sub} 分别为入射介质与基底材料的光学导纳,它们在不同偏振下的值可由(3)式求得.

按照普遍的等效定理^[20],一个任意的多层膜系等效于一个双层膜.则系统的特征矩阵等效于 M_{eff} :

$$M_{\text{eff}} = (M_1 M_2) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & j \sin \varphi_1 / Y_1 \\ j Y_1 \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & j \sin \varphi_2 / Y_2 \\ j Y_2 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{Y_2}{Y_1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & j \left(\frac{1}{Y_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \frac{1}{Y_2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) \\ j \left(Y_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + Y_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{Y_1}{Y_2} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

值得注意的是,对于不同的波长和不同的入射角,等效双层膜的折射率和位相厚度都是不同的,须分别

计算.将等效矩阵 M_{eff} 代入透射率公式(6),我们发现,当进行变换 $\omega \rightarrow -\omega$ 时, $\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1$, $\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2$,

不影响系统透射率,即 T 关于频率是偶对称的:

$$T(\omega) = T(-\omega). \quad (8)$$

虽然频率为负值没有直接的物理意义,但由(8)式很容易得到周期结构的光谱对称性.

周期结构的光谱在频率域上是周期性的,例如四分之一波片的光谱周期为 π . 所以

$$T(\varphi) = T(\varphi + mP) \quad (m \text{ 为整数}). \quad (9)$$

为与文献统一,这里用位相 φ 表示频率.(9)式中, P 为光谱周期.与(8)式联立,取 $m=1$ 有

$$T\left(\frac{P}{2} + \varphi\right) = T\left(\frac{P}{2} - \varphi\right), \quad (10)$$

即光谱关于 $\frac{P}{2}$ 对称.(10)式再与(9)式联立有

$$T\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)P + \varphi\right] = T\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)P - \varphi\right], \quad (11)$$

即光谱在 $\left(m + \frac{1}{2}\right)P$ 处都是左右对称的.同理,还可以得到光谱在 mP 处也是左右对称的,这就是周期结构的光谱对称性.图2为三种不同的周期结构的透射光谱图,各参数为: $n_h = 3.0$, $n_l = 1.4$, $n_0 = 1.0$, $n_{\text{sub}} = 1.5$, 周期数都为5.其中(a)为调谐比 c (即单元内两材料光学厚度的比值, $c = \frac{n_h \bar{d}_h}{n_l \bar{d}_l}$) 等于1的周期结构,周期 $P = \pi$ (b)为调谐比 $c = 3/2$ 的周期结构,周期 $P = 2\pi$,而(c)为斜入射时,有效调谐比(即计入了入射角的两材料有效光学厚度的比值,

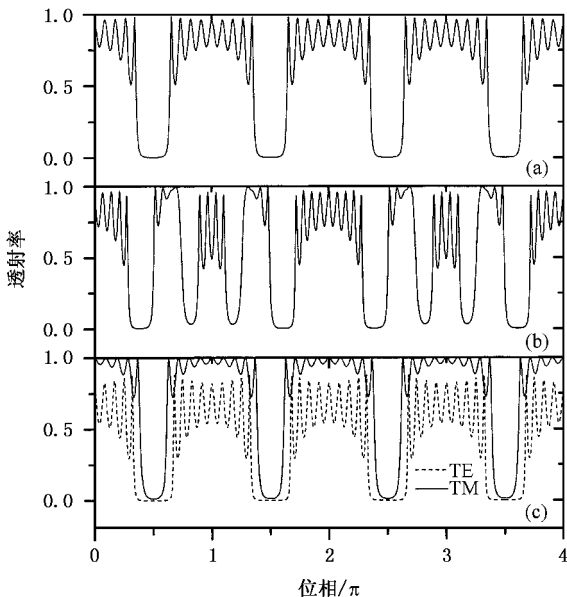


图2 三种不同的周期结构的透射光谱图

$c_{\text{eff}} = \frac{n_h \bar{d}_h \cos \theta_h}{n_l \bar{d}_l \cos \theta_l}$) 等于1的周期结构,周期 $P = \pi$.它们的光谱周期性及对称性都是显而易见的.

4. 对称等价变换关系

按照局域理论^[2],一维无序系统中的光子都是局域的,系统的光学性质可用局域长度来描述.局域长度 ξ 定义为

$$\xi = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{\ln T}, \quad (12)$$

其中 L 为无序系统的厚度, T 为系统的透射率.由(12)式可知,局域长度的单位与 L 相同,一般取平均单元厚度 $A = \bar{d}_h + \bar{d}_l$ 的相对值.在数值计算中,不可能计算无穷结构的透射率.通常采用^[10-12]通过对大量随机产生的具有相同无序度的无序结构的局域长度进行平均的方法来近似求解(12)式.

对于无序扰动周期结构,以光谱周期性为基础,我们已经给出了局域长度存在以下等价变化关系^[18]:

$$\xi(\delta_{h,l}, \varphi) = \xi(\delta'_{h,l}, mP + \varphi) \quad m \text{ 为整数}, \quad (13a)$$

其中 $\delta_{h,l}, \delta'_{h,l}$ 须满足

$$\delta'_{h,l} = \frac{\varphi}{mP + \varphi} \delta_{h,l}. \quad (13b)$$

如上所述,在周期结构中(8)式与光谱周期性联立,可推出光谱对称性.而(8)式对于任意的一维结构都成立,因此有

$$\xi(\varphi) = \xi(-\varphi). \quad (14)$$

将(14)式与(13)式联立有

$$\xi(\delta_{h,l}, \varphi) = \xi(\delta'_{h,l}, mP - \varphi) \quad m \text{ 为整数}, \quad (15a)$$

其中 $\delta_{h,l}, \delta'_{h,l}$ 须满足

$$\delta'_{h,l} = \frac{\varphi}{mP - \varphi} \delta_{h,l}. \quad (15b)$$

(13)式以光谱周期性为基础,而(15)式以周期结构光谱对称性为基础,为了将它们相互区别,将前者(对应于(13)式)称为平移等价变换,将后者(对应于(15)式)称为对称等价变换.由于平移等价变换对于所有一维无序扰动周期结构都成立,而光谱关于频率的偶对称性也与具体的结构无关,因此对称等价变换同样对于一维无序扰动周期结构的所有情况都成立.

为了验证上述等价变换关系的正确性,将它与

数值计算结果进行了比较.以调谐比为 1 的周期结构为基础(该结构的光谱如图 χ_a 所示),构造三种不同无序度的无序扰动周期结构,为计算简单,取 $\delta = \delta_h = \delta_l$.图 3 给出了三种无序扰动周期结构的局域长度谱,图中的每条曲线都是对随机产生的 500 个 200 层无序扰动周期结构进行平均而得到的.按照平移等价变换(13 式), $\delta = 10\%$ 的结构在 $\varphi = \pi/$

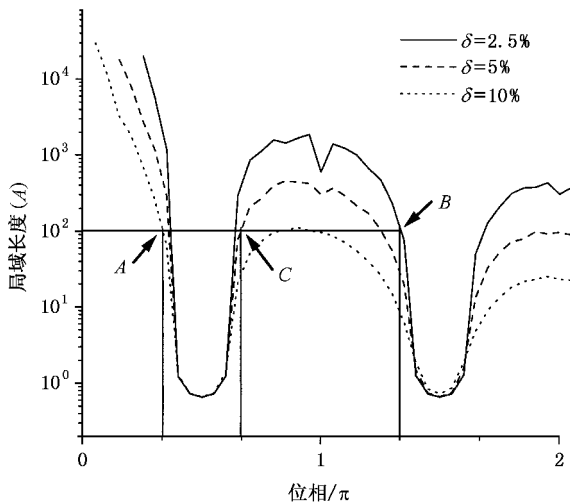


图 3 三种无序扰动周期结构的局域长度谱,其中 $\delta = \delta_h = \delta_l$. 局域长度为平均单元厚度 $A = \bar{\delta}_h + \bar{\delta}_l$ 的相对值

3 处的局域长度(图中的 A 点)应与 $\delta' = \delta/4 = 2.5\%$ 的结构在 $\varphi = 4\pi/3$ 处的局域长度(图中的 B 点)相等.同时,按照对称等价变换(15 式), $\delta = 10\%$ 的结构在 $\varphi = \pi/3$ 处的局域长度(图中的 A 点)还应与 $\delta' = \delta/2 = 5\%$ 的结构在 $\varphi = 2\pi/3$ 处的局域长度(图中的 C 点)相等.图 3 的数值计算结果证明三处的局域长度确实是相等的.我们也数值模拟了调谐比不为 1 时的无序扰动周期结构以及斜入射时的局域长度谱,结果都证明对称等价变换成立.

5. 结 论

以周期结构的光谱对称性为基础,结合已有的平移等价变换,得到了无序扰动周期结构中有关局域长度另一新的等价变换关系:对称等价变换,并用数值计算进行了验证.与平移等价变换相比,对称等价变换描述了更短的频率间隔内局域长度的等价变换.两者相互补充,共同指出了局域长度在不同的无序结构与不同的光子频率之间存在的等价变换关系.同时,由于两个等价变换在推导过程中没有引入任何假设,所以它们应是无序扰动周期结构的本质属性,从而有利于无序结构光子局域性质的进一步研究.

- [1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [2] Sheng P 1990 *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (Singapore: World Scientific)
- [3] Wiersma D S, Bartolini P, Lagendijk Ad and Righini R 1997 *Nature* **390** 671
- [4] Scheffold F, Lenke R, Tweer R and Maret G 1999 *Nature* **398** 206
- [5] Liu X D, Li S G, Hou L T and Wang H T 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2123 (in Chinese) [刘晓东、李曙光、侯蓝田、王慧田 2002 物理学报 **51** 2123]
- [6] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [7] Toader O and John S 2001 *Science* **292** 1133
- [8] He Y J, Su H M, Wang H Z, Tang Q F and Dong P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 892 (in Chinese) [何拥军、苏慧敏、汪河洲、唐琼芳、董 鹏 2001 物理学报 **50** 892]
- [9] Liang G Q, Han P, Wang H Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2197 (in Chinese) [梁冠全、韩 鹏、汪河洲 2004 物理学报 **53** 2197]
- [10] McGurn A R, Christensen K T, Mueller F M and Maradudin A A 1993 *Phys. Rev. B* **47** 13120
- [11] Frigerio J M, Rivory J and Sheng P 1993 *Opt. Commun.* **98** 231
- [12] Deych L I, Lisyansky A A and Altshuler B L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2678
- [13] Thouless D J 1972 *J. Phys. C* **5** 77
- [14] John S, Sompolinsky H and Stephen M J 1983 *Phys. Rev. B* **27** 5592
- [15] Sheng P, White B, Zhang Z Q and Papanicolaou G 1986 *Phys. Rev. B* **34** 4757
- [16] Sheng P 1990 *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (Singapore: World Scientific) p563
- [17] Kondilis A and Tzanetakos P 1992 *Phys. Rev. B* **46** 15426
- [18] Han P and Wang H Z 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1520
- [19] Knittl Z 1976 *Optics of Thin Films* (New York: Wiley) p45
- [20] Knittl Z 1976 *Optics of Thin Films* (New York: Wiley) p247

Symmetrical invariant transformation of localization length in one-dimensional randomly-perturbed periodic structure *

Han Peng^{1,2)} Wang He-Zhou^{1)†}

¹⁾ *State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China*

²⁾ *Department of Physics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*

(Received 31 March 2004 ; revised manuscript received 30 April 2004)

Abstract

Based on the spectral symmetry of the one-dimensional periodic structure, a new invariant transformation, named symmetrical invariant transformation, of localization length is presented for the one-dimensional randomly-perturbed periodic structure. The validity of the transformation is confirmed by numerical stimulations performed by means of transfer-matrix method. Since the symmetrical invariant transformation explores an equivalent relation of localization length at different frequencies between different structures, it is expected to provide a new tool for further investigation of the light localization in disordered structures.

Keywords : localization length, randomly-perturbed periodic structure, invariant transformation

PACC : 7155J, 4225B, 4270Q

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19934002 and 10274108), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2003AA311022) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2003CB314901).

† E-mail : stswzh@zsu.edu.cn