

非线性 Kronig-Penney 超晶格的二维实映射分析*

祝 娅¹⁾²⁾ 周 倩²⁾ 田 强^{2)†}

¹⁾ 铜仁高等师范专科学校物理系, 铜仁 554300)

²⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2004 年 4 月 16 日收到, 2004 年 6 月 15 日收到修改稿)

通过二维实映射研究非线性 Kronig-Penney 超晶格中的波输运特性. 数值计算得到波矢一定情况下不同非线性系数的映射图、以及非线性系数一定情况下不同波矢的映射图. 非线性 Kronig-Penney 超晶格中的非线性, 对超晶格中波函数的 Bloch 波矢有明显的调节作用. 随着非线性系数的增大, 映射图由周期函数的有限个分立点变为准周期函数的一条闭合轨道、以及有规则或无规则的点分布.

关键词: 非线性 Kronig-Penney 超晶格, 非线性效应, 二维实映射, 波矢

PACC: 7220H, 0560, 0365

1. 引 言

典型的非线性 Kronig-Penney 超晶格^[1,2]的周期势场是一系列周期分布的 δ 函数与波函数模平方的乘积 $\alpha\delta(x-x_n)|\psi(x)|^2$, 其中 $x_n = na$, n 是整数、 a 是超晶格的周期, α 是反映非线性势强度的常数, 称为非线性系数. 对于由两种材料一层薄一层厚交替生长形成的超晶格, 如果薄层很薄, 远小于超晶格周期, 同时, 薄层中强的电声相互作用会引起极化效应, 这样的超晶格就是非线性 Kronig-Penney 超晶格的一个实例^[3]. 对于传输电磁波的介电超晶格, 如果薄层材料是 Kerr 介质且远小于超晶格周期, 也是非线性 Kronig-Penney 超晶格的一个典型实例^[4]. 非线性 Kronig-Penney 超晶格具有很多不同于线性超晶格中的波输运性质^[5], 波的透射率依赖于波的强度, 透射波强度作为入射波强度的函数呈现出多稳态等.

本文将非线性 Kronig-Penney 超晶格的定态非线性薛定谔方程, 写为节变量 (node variable) 的二阶差分方程, 并转化为一个二维实映射, 通过二维实映射分析不同非线性系数 α 对非线性 Kronig-Penney 超晶格中波输运的影响.

2. 非线性 Kronig-Penney 超晶格的二维实映射

考虑非线性 Kronig-Penney 超晶格中的定态问题. 对应的定态非线性薛定谔方程^[2,6]为

$$E\psi(x) = -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha \sum_{n=1}^N \delta(x-x_n) |\psi(x)|^2 \psi(x). \quad (1)$$

定态波函数形式上可以写为

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (2)$$

其中 A, B 分别表示右行和左行波的幅度. 对于节变量 $\psi_n \equiv \psi(x_n)$ 利用波函数在 δ 函数势处的连续性条件和一阶导数的不连续性, 可以得到 ψ_n 的二阶差分方程

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = \left[2\cos(k) + \alpha \frac{\sin(k)}{k} |\psi_n|^2 \right] \psi_n, \quad (3)$$

其中为简化已取 $a = 1$. 这是一个非线性迭代方程, 可用于讨论不同波矢的波函数在超晶格中的透射率^[1], 得到类似于线性超晶格的能带性质, 不同波矢的透射率是不同的.

为了进一步讨论非线性 Kronig-Penney 超晶格中的非线性输运性质, 下面通过极坐标变换, 将 (3) 式变换为一个二维实映射.

* 国家教育部高等学校骨干教师基金和北京师范大学创新研究群体基金资助的课题.

† E-mail: qtian@bnu.edu.cn; 电话 010-62206921.

令 $\psi_n = r_n e^{i\theta_n}$, 代入 (3) 式, 由实部与虚部分别相等得到

$$r_{n+1} \cos(\Delta\theta_{n+1}) + r_{n-1} \cos(\Delta\theta_n) = \left[2\cos(k) + \alpha \frac{\sin(k)}{k} |r_n|^2 \right] r_n, \quad (4)$$

$$r_{n+1} \sin(\Delta\theta_{n+1}) - r_{n-1} \sin(\Delta\theta_n) = 0, \quad (5)$$

其中 $\Delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$. 定义概率流

$$J = r_n r_{n-1} \sin(\Delta\theta_n). \quad (6)$$

(5) 式表示这个概率流守恒. 进一步引入由波位移

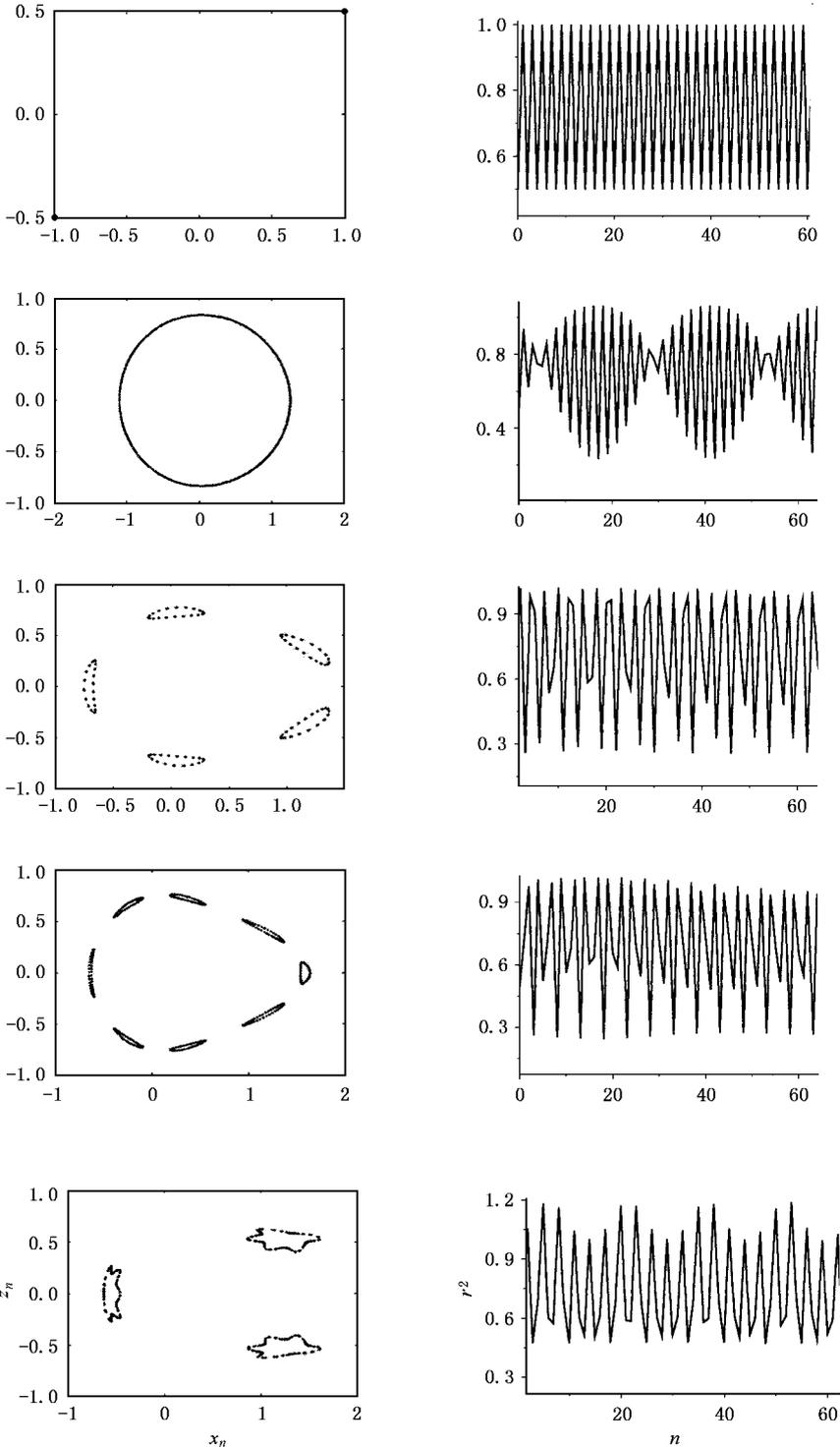


图 1 $k = \pi/2$ 的映射图及其对应的波位移平方在超晶格中的分布 (非线性系数 α 从上至下分别为 0, 0.2, 1.0, 1.2, 1.6)

r_n 定义的实变量

$$x_n = \psi_n^* \psi_{n-1} + \psi_n \psi_{n-1}^* = 2r_n r_{n-1} \cos(\Delta\theta_n), \quad (7)$$

$$y_n = [\psi_n^* \psi_{n-1} - \psi_n \psi_{n-1}^*] = 2J, \quad (8)$$

$$z_n = |\psi_n|^2 - |\psi_{n-1}|^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2. \quad (9)$$

注意到 y_n 是一个守恒量, z_n 决定于超晶格相邻 δ 函数势垒处波位移平方的差值, 而相邻势垒处波的相位差包含在 x_n 中. (4) 和 (5) 式化为一个二维实映射

$$x_{n-1} = \left[2\cos(k) + \alpha \frac{\sin(k)}{2k} (w_n - z_n) \right] \times (w_n - z_n) - x_n, \quad (10)$$

$$z_{n-1} = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{w_n - z_n} - z_n, \quad (11)$$

其中

$$w_n = \sqrt{x_n^2 + z_n^2 + 4J^2}. \quad (12)$$

下面通过二维实映射, 主要讨论 (x_n, z_n) 随非线性系数 α 的变化. (x_n, z_n) 的变化, 直接反映了超晶格中波函数在各周期中的变化.

3. 映射图和波位移随非线性系数的变化

为了分析非线性系数 α 对非线性 Kronig-Penney 超晶格中波运输的影响, 这里讨论波矢一定而非线性系数 α 不同情况下的映射图. 取 $k = \frac{\pi}{2}$, 即波长 $\lambda = 4$, 二维实映射 (10) 和 (11) 式很容易在计算机上完成; 为了更直观地反映出映射图的物理意义, 同时数值计算了映射图对应的波位移平方 r_n^2 在超晶格中的空间分布图, 如图 1 所示.

计算中, 波位移平方 r_n^2 由 (6) 和 (7) 式代入 (12) 式, 再将 (9) 式代入, 易得到

$$r_n^2 = \frac{1}{2}(w_n + z_n). \quad (13)$$

计算中超晶格周期数取 $N = 500$, 初始值取为 $x_N = 1, z_N = 0.5$, 概率流常数 $J = 0.5$. 图 1 中的非线性系数 α 分别为 0, 0.2, 1.0, 1.2, 1.6.

图 2 是对于波矢 $k = \frac{\pi}{2}$ 的不同非线性系数 α 的总体映射图, 非线性系数 α 从 0 增大到 1.6.

4. 非线性系数一定情况下波矢不同的映射图及波位移的变化

现在对于非线性系数一定的情况下, 比较分析

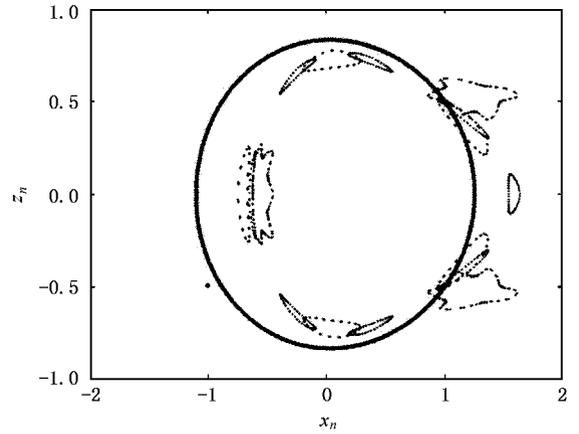


图 2 $k = \pi/2$ 的总体映射图 (非线性系数 α 为 0, 0.2, 1.0, 1.2, 1.6)

不同波矢的映射图. 取非线性系数 $\alpha = 0.6$, 改变入射波矢, 分别取 $k = \pi/2, 1.3, 1.1, \pi/2$, 二维实映射 (10) 和 (11) 式的映射图以及对应的波位移平方 r_n^2 在超晶格中的空间分布图, 如图 3 所示. 计算中的一些参数与 $k = \pi/2$ 时相同, 即超晶格周期数取 $N = 500$, 初始值取为 $x_N = 1, z_N = 0.5$, 概率流常数 $J = 0.5$.

5. 结论和讨论

超晶格是人工物性剪裁的开端^[7], 在理论研究和器件应用^[8]等方面具有重要作用. 超晶格中的孤子等非线性运输现象也得到了很多研究^[9,10]. 近年来非线性超晶格引起人们的极大关注. 本文将非线性 Kronig-Penney 超晶格的定态非线性薛定谔方程, 通过一个二阶差分方程转化为一个二维实映射, 通过二维实映射分析不同非线性系数 α 对非线性 Kronig-Penney 超晶格中波函数的影响. 在线性 Kronig-Penney 超晶格即非线性系数 $\alpha = 0$ 情况下, 对于一定 Bloch 波矢的波函数, 若波长与超晶格周期可公度, 波函数 ψ_n 的绝对值或波位移平方 r_n^2 在超晶格中的周期是波函数半波长与超晶格周期的最小公倍数; 对于波矢 $k = \pi/2$ 即波长 $\lambda = 4$ 的波函数, 半波长与超晶格周期的最小公倍数为 2, 二维实映射 (10) 和 (11) 式应为两个分立点. 非线性系数 α 为 0 时, 二维实映射的两个点就是这种情况. 在非线性 Kronig-Penney 超晶格中, 即非线性系数 α 不为 0 时, 二维实映射一般情况下是一条闭合轨道, 以及有规则的点分布, 反映出非线性系数 α 的作用. 非线性改变了波函数波长与超晶格周期的可公度性, 使超

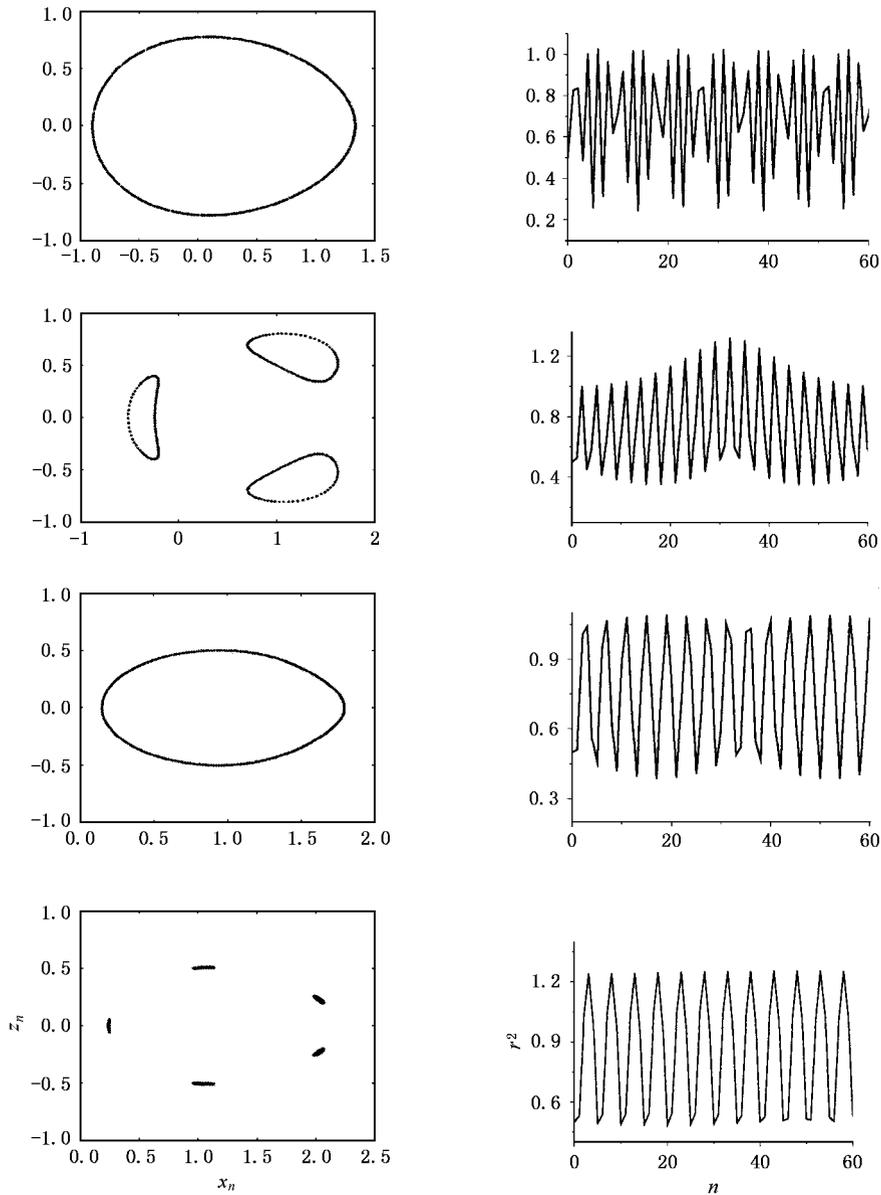


图3 $k = \pi/2, 1.3, 1.1, \pi/3$ 的映射图及其对应的波位移平方在超晶格中的分布(非线性系数 $\alpha = 0.6$)

晶格中波函数的 Bloch 波矢与 (2) 式的波矢不同, 且非线性系数 α 大小不同, 超晶格中波函数的 Bloch 波矢大小也不同. 由图 1 可见, 随着非线性系数 α 的增大, 波位移平方 r_n^2 在超晶格中的空间分布由周期 2 分布变为准周期或混沌分布^[10], 相应的映射图由 2 个分立点变为一条闭合轨道、以及有规则的点分布. 其准周期或混沌特性有待进一步研究.

对于非线性系数一定的情况下, 比较分析了不同波矢的映射图. 在 (2) 式中分别取 $k = \pi/2, 1.3, 1.1, \pi/3$, 二维实映射图以及对应的波位移平方 r_n^2 的空间分布图如图 3 所示. 同样的非线性系数 α , 对

非线性系数为 $\alpha = 0.6$ 时不同波矢的周期分布的作用是不同的. 映射图分别呈现出一条闭合轨道或有规则的点分布, 波位移平方 r_n^2 在超晶格中的空间分布分别对应为准周期或混沌分布.

非线性 Kronig-Penney 超晶格中的非线性, 对超晶格中波函数的 Bloch 波矢有明显的调节作用. 这一方面使我们认识到非线性 Kronig-Penney 超晶格中的一些非线性效应, 另一方面, 我们可以通过超晶格中非线性层的人工剪裁, 获得具有特定非线性效应的非线性材料.

- [1] Hennig D *et al* 1994 *Phys. Lett. A* **190** 259
[2] Hennig D and Tsironis G P 1999 *Phys. Reports* **307** 333
[3] Wan Y and Soukoulis C M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 800
[4] Hennig D *et al* 1994 *Appl. Phys. Lett.* **64** 2934
[5] Tian Q and Wang J 2002 *Int. J. Theor. Phys.* **41** 1275
[6] Tian Q and Wu C 1999 *Phys. Lett. A* **262** 83
[7] Esaki L and Chang L L 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 495
[8] Grahm H T *et al* 1991 *Phys. Rev. B* **43** 12094
[9] Bulashenko O M, Garcia M J and Bonilla L L 1996 *Phys. Rev. B* **53** 10008
[10] Zhang Q Y and Tian Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 809

The analysis of nonlinear Kronig-Penney superlattice by a two-dimensional real-valued map^{*}

Zhu Ya^{1,2)} Zhou Qian²⁾ Tian Qiang²⁾

¹⁾(Department of Physics , Tongren Teachers College , Tongren 554300 , China)

²⁾(Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China)

(Received 16 April 2004 ; revised manuscript received 15 June 2004)

Abstract

The wave transportation in nonlinear Kronig-Penney model is investigated by a two-dimensional real map. The maps for different nonlinear parameters under the condition of fixed wave vector are calculated, and the corresponding evolution of the square of wave displacement along the nonlinear superlattice is also numerically calculated. The nonlinear parameter of the nonlinear Kronig-Penny superlattice has a distinctive modulation effect on the Bloch wave vector of the wave function in the superlattice. In response to the increase of the nonlinear parameter, the map evolves from a finite number of dots to a closed orbit or an attractor, which corresponds to a periodic function, quasiperiodic function or chaos.

Keywords : nonlinear Kronig-Penney superlattice, nonlinearity, tow-dimensional real map, wave vector

PACC : 7220H, 0560, 0365

^{*} Project supported by the Foundation for Teachers by the Ministry of Education of China and by the Foundation from Beijing Normal University.