第 54 卷 第 10 期 2005 年 10 月
1000-3290/2005/54(10)/4506-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.10,October,2005

用试探方程法求变系数非线性发展方程的精确解

刘成仕[†]

(大庆石油学院数学系,大庆 163318)

(2004 年 11 月 26 日收到;2005 年 2 月 28 日收到修改稿)

将试探方程法应用到变系数非线性发展方程的精确解的求解.以两类变系数 KdV 方程为例,在相当一般的参数条件下求得了丰富的精确解,其中包括新解.

关键词:试探方程法, 变系数 KdV 方程, 类椭圆正弦(余弦)波解, 类孤子解

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

求非线性演化方程的精确解是非线性科学中的主要课题. 对常系数方程已发展了许多方法,特别是代数方法,如齐次平衡法[1—3],试探函数法[4,5],双曲正切展开法[6—8],椭圆函数展开法[9—11],函数变换法[12], sine-cosine 方法[13—15],混合指数法[16,17],分离变量法[18],用微分方程解的展开方法[19]等. 利用这些方法已求得了大量非线性发展方程的精确解. 代数方法的基本思想是假设方程有某种特定函数组合形式的解,将此组合形式代入方程中确定其中的参数即可. 这时经常要利用一些数学软件,如 Mathematica 等. 最近,我们提出了一种求非线性发展方程精确行波解的方法,即试探方程法[20]. 其基本思想是将所求方程约化为初等积分形式,而一般情形下被积函数与多项式密切相关. 通过讨论多项式的根的情况,可以解出相应的不定积分,进而得到所求方程的精确解.

在现实的物理世界中,用来描述现象的常系数微分方程是比较粗糙的,而变系数微分方程与实际更符合. 但变系数微分方程的求解也更困难. 用前面提到的代数方法已求得了一些具体的变系数微分方程的精确解[21—24]. 在本文中,考虑文献中广泛关注的如下的两类变系数 KdV 方程,用试探方程法求出了它们的较丰富的精确行波解,其中包括了文献[21]中的结果为特例,同时也包含了新解. 这里,第一类变系数 KdV 方程为

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

第二类变系数 KdV 方程为

$$u_t + [\sigma(t) + \mu(t)x]u_x + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \gamma(t)u = 0. \tag{2}$$

方程(2)包含了广义变系数 KdV 方程[23,24]

$$u_t + [\alpha(t) + \beta(t)x]u_x - 3c\gamma(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} + 2\beta(t)u = 0, \tag{3}$$

而方程(3)又可化为多种形式,如变系数非均匀谱 KdV 方程

$$u_t = k_0(t)\{u_{xxx} + 6uu_x\} + 4k_1(t)u_x - h(t)\{2u + xu_x\}, \tag{4}$$

柱 KdV 方程

$$u_t + \frac{1}{2t}u + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{5}$$

具有预弛效应非均匀介质的 KdV 方程

$$u_t + \{(c_0 + \gamma(t)x)u\}_x + 6uu_x + u_{xxx} + \gamma(t)u = 0, \tag{6}$$

广义 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 6f(t)u - x(f' + 12f^2) = 0, \tag{7}$$

带外力项的广义 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 6f(t)u = g(t) + x(f' + 12f^2), \tag{8}$$

[†]E-mail:chengshiliu_68@126.com

等等. 因此本文的结果有广泛的适用性.

2. 试探方程法概述

对于变系数非线性发展方程,试探方程法可概述如下:

第一步 对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0, \tag{9}$$

作波变换

$$u(x,t)=u(\xi_1),\xi_1=k(t)x+\omega(t), \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式得到非线性常微分方程

$$M(u,u',u'',\cdots)=0. \tag{11}$$

第二步 取试探方程

$$u''=\sum_{i=1}^{m}a_iu^i, \tag{12}$$

其中系数为常数. 由(12)式可导出

$$(u')^2=F(u)=\sum_{i=0}^{m}\frac{2a_i}{i+1}u^{i+1}+d, \tag{13}$$

以及 u^m 等其他导数项, 这里 d 是积分常数. 将这些项代入(11)式中,得到一个 u 的多项式 $G(u)$. 根据平衡原则能确定 m 的值. 令 $G(u)$ 的系数都是零,得到一个常微分方程组. 解这个方程组可确定 $k(t)$,$\omega(t)$以及 $a_0,\cdots,a_m$ 和 d 的值.

第三步 将(13)式化成初等积分形式

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{F(u)}}, \tag{14}$$

利用 $m+1$ 阶多项式的完全判别系统[20,25]对 $F(u)$ 的根分类,由此解出(14)式,进而得到方程(9)的形如(10)式的精确解.

注 1 与变系数方程不同之处在于,常系数方程的波变换(10)中 $k(t)$,$\omega(t)$均为常数.

3. 第一类变系数 KdV 方程的精确解

将(10)代入(1)中,有

$$(k'(t)x+\omega'(t))u'+\alpha(t)k(t)uu'+\beta(t)k^3(t)u'''=0, \tag{15}$$

取试探方程(12),根据平衡原则知 $m=2$, 即

$$u''=a_2u^2+a_1u+a_0, \tag{16}$$

由(16)式有

$$(u')^2=\frac{2}{3}a_2u^3+a_1u^2+2a_0u+d, \tag{17}$$

$$u'''=(2a_2u+a_1)u'. \tag{18}$$

将(18)式代入(15)式并消去 u' 有

$$r_1u+r_0=0, \tag{19}$$

其中

$$r_1=\alpha(t)k(t)+2a_2\beta(t)k^3(t),$$
$$r_0=k'(t)x+\omega'(t)+a_1\beta(t)k^3(t). \tag{20}$$

解如下方程组

$$r_1=0,\quad r_0=0. \tag{21}$$

注意到 a_1,a_2 均为常数,解得

$$k(t)=k \text{ 为常数},$$
$$a_1 \text{ 为任意常数},$$
$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}=\text{常数},$$
$$a_2=-\frac{\alpha(t)}{2\beta(t)k^2},$$
$$\omega(t)=-a_1k^3\int\beta(t)\mathrm{d}t. \tag{22}$$

在条件(22)下, 我们解方程(17). 为此作如下变换

$$w=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}u,$$
$$\xi=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\xi_1, \tag{23}$$

方程(17)变成

$$w_\xi^2=w^3+d_2w^2+d_1w+d_0, \tag{24}$$

其中

$$d_2=a_1\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}},$$
$$d_1=2a_0\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}},$$
$$d_0=d. \tag{25}$$

记(24)式右边的多项式为 $F(w)$. 它的完全判别系统为

$$\Delta=-27\left(\frac{2}{27}d_2^3+d_0-\frac{d_1d_2}{3}\right)^2-4\left(d_1-\frac{d_2^2}{3}\right)^3,$$
$$D=d_1-\frac{1}{3}d_2^2. \tag{26}$$

其中 Δ 是判别式. (24)式化为初等积分形式(14), 分以下四种情形讨论(细节可参考文献[20]):

情形 1 $\Delta=0,D<0$;$F(w)=0$ 有一个二重实根和一个单重实根,即,

$$F(w)=(w-\alpha)^2(w-\beta), \tag{27}$$

如果 $w>\beta$, 积分(14),相应的得到(17)的精确解为

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[(\alpha-\beta)\mathrm{th}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha-\beta}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1-\xi_0)\right)+\beta\right],\alpha>\beta, \tag{28}$$

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[(\alpha-\beta)\mathrm{cth}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha-\beta}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1-\xi_0)\right)+\beta\right],\alpha>\beta, \tag{29}$$

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta-\alpha}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1-\xi_0)\right)+\alpha\right],\alpha<\beta, \tag{30}$$

其中(28)式和(29)式是类孤波解,(30)式是三角函数形解.

情形2 $\Delta=0,D=0$;$F(w)=0$有一个三重实根,即

$$F(w)=(w-\alpha)^3, \tag{31}$$

相应的有(17)的解为

$$u=\frac{6}{a_2(\xi_1-\xi_0)}+\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha, \tag{32}$$

这是有理函数形解.

注2 在方程(28)—(30)和(32)中,积分常数ξ_0已重新标度了,仍然记为ξ_0,下同.

情形3 $\Delta>0,D<0$;$F(w)=0$有三个不同的实根$\alpha<\beta<\gamma$,当$\alpha<w<\beta$时,作变换

$$w=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi, \tag{33}$$

可用椭圆函数[26]解出积分(14)式,相应地(17)式的精确解为

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\alpha+\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}(\beta-\alpha)\times\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1-\xi_0),m\right). \tag{34}$$

这是类椭圆正弦波解,可化成类椭圆余弦波解.

当$w>\gamma$时,作变量变换

$$w=\frac{-\beta\sin^2\phi+\gamma}{\cos^2\phi}, \tag{35}$$

相应的(17)式的精确解为

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{-\beta\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)+\gamma}{\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}, \tag{36}$$

在(34)式和(36)式中,$m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

情形4 $\Delta<0$;$F(w)=0$有一个实根和一对共轭复根,即,

$$F(w)=(w-\alpha)(w^2+pw+q), \tag{37}$$

其中$p^2-4q<0$. 当$w>\alpha$时,作变量变换

$$w=\alpha+\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\tan^2\frac{\varphi}{2}, \tag{38}$$

解出积分(14)式,相应地(17)式的精确解为

$$u=\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\alpha+\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{1+\mathrm{cn}\left((\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1-\xi_0),m\right)}-\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\right). \tag{39}$$

其中,$m^2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$.

这里,(28),(29)和(34)式是文献[21]中得到的结果,(30),(32),(36)和(39)式是我们得到的新解.

4. 第二类变系数KdV方程(2)的精确解

由于第二类变系数KdV方程(2)不能直接利用试探方程法求解,为此先作如下变换,即设(2)有如下形式的解

$$u(x,t)=q(x,t)\mathrm{e}^{h(t)}, \tag{40}$$

将(40)代入(2)并消去$\mathrm{e}^{h(t)}$有

$$q_t+qh'(t)+(\sigma(t)+\mu(t)x)q_x+\alpha(t)\mathrm{e}^{h(t)}qq_x+\beta(t)q_{xxx}+\gamma(t)q=0, \tag{41}$$

令$h'(t)=-\gamma(t)$,即

$$h(t)=-\int\gamma(t)\mathrm{d}t, \tag{42}$$

将(42)式代入(41)式中,(41)变成

$$q_t + (\sigma(t) + \mu(t)x)q_x + \alpha(t)e^{h(t)}qq_x + \beta(t)q_{xxx} = 0. \tag{43}$$

作波变换

$$q(x,t) = q(\xi_1), \xi_1 = k(t)x + \omega(t), \tag{44}$$

将(44)式代入(43)式有

$$(k'(t)x + \omega'(t))q' + (\sigma(t) + \mu(t)x)k(t)q' + \alpha(t)e^{h(t)}k(t)qq' + \beta(t)k^3(t)q''' = 0, \tag{45}$$

与对第一类变系数 KdV 方程的讨论相似，取试探方程为

$$q'' = a_2q^2 + a_1q + a_0, \tag{46}$$

同样的程序可得

$$\begin{aligned} k(t) &= e^{-\int\mu(t)dt}, \\ \omega(t) &= -\int(\sigma(t)k(t) + \alpha_1\beta(t)k^3(t))dt, \\ a_2 &= -\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}e^{\int(2\mu(t)-\gamma(t))dt} = \text{常数}, \\ a_1 & \text{ 为任意常数}. \end{aligned} \tag{47}$$

在参数条件(47)的情形下，解方程(46)，相应的可以得到第二类变系数 KdV 方程(2)的形如(28)—(30)，(32)，(34)，(36)和(39)式的精确解，其中形如(30)，(32)，(36)和(39)式的解是新解，其他的是文献[21]中得到的解，并且这里的参数条件更一般．为简明起见，这里不具体写出了．

由于(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)式都是(2)式的特殊情形，因此由(2)式的精确解可写出这些方程的精确解，从略．

5．结束语

本文将试探方程法应用到变系数非线性发展方程．以数学物理中重要的两类变系数 KdV 方程为例，给出了它们的精确解，这其中包括文献中的结果为特例，并包含新结果．

[1] Wang M L, Zhou Y B and Li Z B 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67

[2] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[3] Zhang J F 1999 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **16** 4

[4] Kudryashov N A 1990 *Phys*. *Lett*. A **147** 287

[5] Zhang W G 2003 *Acta Math*. *Sci*. **23**A 679 (in Chinese) [张卫国 2003 数学物理学报 **23**A 679]

[6] Li Z B and Zhang S Q 1997 *Acta Math*. *Sin*. **17** 81 (in Chinese) [李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]

[7] Lu K P, Shi Y R, Duan W S and Zhao J B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]

[8] Zhang G X, Li Z B and Duan Y S 2000 *Sci*. *China* A **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]

[9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]

[10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

[11] Porubov A V 1996 *Phys*. *Lett*. A **221** 309

[12] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Appl*. *Math*. *Mech*. **22** 326

[13] Yan C T 1996 *Phys*. *Lett*. A **224** 77

[14] Yan Z Y, Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1998 物理学报 **48** 1]

[15] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[16] Xu G Q and Li Z B 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 946 (in Chinese) [徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946]

[17] Xu G Q and Li Z B 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1424 (in Chinese) [徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 1424]

[18] Lou S Y and Lu J Z 1996 *J*. *Phys*. A **29** 4029

[19] Fan E G. 2003 *Chaos*, *Solitons & Fractals* **16** 819

[20] Liu C S 2005 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **54** 2505 [刘成仕 2005 物理学报 **54** 2505]

[21] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 1923]

[22] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1957 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1957]

[23] Zhang J F and Chen F Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[24] Li D S and Zhang H Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1569 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[25] Yang L, Zhang J Z and Hou X R 1996 *Sci*. *in China Ser*. E **39** 629

[26] Wang Z X and Guo D R. 2002 *Special Functions* (Beijing: Peking University Press). [王竹溪、郭敦仁 2002 特殊函数概论.(北京 北京大学出版社)]

Using trial equation method to solve the exact solutions for two kinds of KdV equations with variable coefficients

Liu Cheng-Shi†

(*Department of Mathematics*, *Daqing Petroleum Institute*, *Daqing* 163318, *China*)

(Received 26 November 2004; revised manuscript received 28 February 2005)

Abstract

Trial equation method was applied to nonlinear evolution equations with variable coefficients. As examples, exact solutions for two kinds of KdV equations with variable coefficients were obtained. Some of these results were new.

Keywords: trial equation method, variable coefficient KdV equation, Jacobi elliptic-sine(cosine)-like function solution, soliton-like solution

PACC: 0340K, 0290

† E-mail: chengshiliu_68@126.com