

含时的线性驱动简并参量放大系统的量子起伏^{*}

赵超樱 谭维翰

(上海大学物理系, 上海 200444)

(2004 年 12 月 19 日收到, 2005 年 3 月 14 日收到修改稿)

导出在 P 表象中含时的线性驱动简并参量放大 Fokker-Planck 方程, 并求其解. 在阈值以下或阈值附近, 含时驱动 Fokker-Planck 方程的解与线性理论或阈值附近的微扰理论预言的基本相符. 在阈值以上, 含时驱动 Fokker-Planck 方程解的短期行为也与线性近似解相近, 但当 τ 增大后的长期行为完全区别于线性理论的结果.

关键词: 含时的线性驱动简并参量放大, Fokker-Planck 方程, 量子起伏

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

光学参量放大是产生压缩光的一种常用光学手段. 近年来, 关于参量放大器的量子压缩特性的研究已经成为一个热点. 参量放大器在阈值以下的压缩在理论和实验上都已经进行了系统的研究^[1-19]. 先前的理论研究主要是采用线性近似, 亦即假定抽运光强远大于被放大的参量信号, 可略去由于参量放大而导致的抽空 (pump depletion). 近来, 文献 20 在抽运参量 μ 接近于但小于阈值 1 (即 $\mu < 1$), 作微扰展开. 取线性近似后, 场的压缩分量为 $y_1^2 = \frac{1}{1+\mu}$, 当 $\mu \rightarrow 1$ 获得了量子起伏相对于真空起伏的 $\frac{1}{2}$ 倍的压缩. 可是考虑到微扰展开的非线性项 $y_1 y_3$ 的贡献后, 便增加了与 $\frac{1}{1-\mu}$ 成正比例的非线性项, 当 $\mu \rightarrow 1$ 时该项发散. 稍后在文献 21 中采用稍不同的微扰方式, 避免了 y_1^2 当抽运场 $\mu \rightarrow 1$ 的发散, 但只适用于阈值附近. 本文在前文的基础上^[11, 12] 求解考虑到抽空以后的简并光学参量放大 Fokker-Planck 方程, 但不采用非线性 Fokker-Planck 方程, 而是采用含时的(正比于抽运波)线性(正比于参量波)驱动 Fokker-Planck 方程, 并解析求解. 所得结果在阈值附近与文献 21 所得相符, 对于远离阈值处也是适用的. 当 $\mu \leq 1$ 时, 压缩接近线性理论预示的 $\frac{1}{1+\mu}$. 当 $\mu \geq 1$ 压缩曲线可按相互作用时间 τ 由两段构成,

一段是当 τ 不大的短期行为的压缩度接近线性理论预示的 $\frac{1}{1+\mu}$, 另一段是当 τ 很大的长期行为的压缩度则接近于 $\frac{1}{2}$.

2. 非线性简并参量放大与含时的线性驱动简并参量放大 Fokker-Planck 方程

首先抽运场与信号场, 闲置场的相互作用哈密顿, 文献 11, 12 用 $W = \frac{i\hbar}{2}(\epsilon a^{+2} - \epsilon^* a^2)$ 来表示, a, a^+ 分别为参量场的淹没与产生算符, ϵ, ϵ^* 表示驱动场. 而文献 20 用的是 $H_{int} = i\hbar(\bar{\epsilon}^* a_2 - \bar{\epsilon} a_2^+) + \frac{i\chi\hbar}{2}(a_2 a_1^{+2} - a_2^+ a_1^2)$. 式中 a_2, a_1 分别为抽运场, 参量场算符, χ 为三阶非线性系数. 前一项表示抽运, 抽率为 $\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^*$, 而后一项则表示抽运场与信号场, 闲置场的相互作用, 与文献 11, 12 的 W 相当. 不失一般性, 可取定 W 表示中的 ϵ 为实数. 将 W 与 H_{int} 的第二项进行比较, 使得驱动场 ϵ 与抽运波 a_2 的关系为

$$\frac{\epsilon}{2} = \frac{\chi}{2} a_2 \Rightarrow \epsilon = \chi a_2. \quad (1)$$

引进变量 $\tau = \gamma_1 t, \gamma_r = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ 并取实数解, 于是在 H_{int} 基础上可导出 α_1, α_2 的变率方程^[20]

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = -\alpha_1 + \frac{\chi}{\gamma_1} \alpha_2 \alpha_1,$$

^{*} 上海市教育委员会重点学科基金资助的课题.

$$\frac{d\alpha_2}{d\tau} = -\gamma_r \alpha_2 + \frac{\bar{\epsilon}}{\gamma_1} - \frac{\chi}{2\gamma_1} \alpha_1^2. \quad (2)$$

稳态解为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\chi}{\gamma_1} \alpha_2 \alpha_1, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\gamma_2} \left(\bar{\epsilon} - \frac{\chi}{2} \alpha_1^2 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

由(3)式,得阈值 $\bar{\epsilon}_c = \alpha_2 \gamma_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\chi}$. (2)式中参量 $\frac{\chi}{\gamma_1}$,

$\frac{\bar{\epsilon}}{\gamma_1}$ 可用 γ_r, η, μ 来表示, $\frac{\chi}{\gamma_1} = \sqrt{2\gamma_r \eta}$, $\frac{\bar{\epsilon}}{\gamma_1} = \frac{\bar{\epsilon}_c}{\gamma_1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_c} =$

$\sqrt{\frac{\gamma_r}{2\eta}} \mu$, 式中 $\eta = \frac{\chi^2}{2\gamma_1 \gamma_2}$, $\mu = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_c} = \frac{\chi}{\gamma_1} \alpha_{20} = \frac{\epsilon_0}{\gamma_1}$, η 即文献[20]中定义的 g^2 .

α_1, α_2 的稳态值为

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \pm \sqrt{\frac{2}{\chi} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_c)} = \sqrt{\frac{2}{\chi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\chi} (\mu - 1)} \\ &= \sqrt{\frac{\mu - 1}{\eta}}, \\ \bar{\alpha}_2 &= \frac{1}{\gamma_r} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\chi}{\gamma_1} \frac{\mu - 1}{\eta} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_r \eta}}. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\mu = 2, \eta = \frac{1}{1000}, \gamma_r = 0.5, \alpha_{10} = 1, \alpha_{20} = \frac{\mu}{\sqrt{2\gamma_r \eta}}$ 时,

图1(a),(b)给出方程(2)的数值计算结果即 $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)$ 随 τ 的变化曲线图. 当 τ 增大时趋近于稳态值与(4)式给出的相符.

由图1(a)可以看出参量放大基本上是由开始阶段的放大与后来由于抽空的饱和阶段所形成的. 开始阶段,参量波 α_1 指数放大,而抽运波 α_2 变化较少. 后一阶段为 α_1 趋于饱和,而抽运波 α_2 也急剧下降到低的稳定值. 一般地来说,稳态解(3)式是不成立的,但当 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ 时, α_2 可绝热的跟随 α_1 的变化,亦即驱动场 $\epsilon = \chi \alpha_2 \approx \frac{\chi}{\gamma_2} \left(\bar{\epsilon} - \frac{\chi}{2} \alpha_1^2 \right)$. 应用这个关系绝热地消去参量放大 Fokker-Planck 方程中的驱动场 ϵ , 使得非线性简并参量放大的 Fokker-Planck 方程^[5,22]. 若不采用 α_2 的绝热近似,可将数值求解(2)式得出驱动场 $\epsilon(\tau) = \chi \alpha_2(\tau)$, 代入 Fokker-Planck 方程中, 使得含时的线性驱动 Fokker-Planck 方程.

图2示出 $\alpha_2(\tau)$ 与绝热近似(3)式的第2式的偏差 $\Delta(\tau) = \alpha_2(\tau) - \frac{1}{\gamma_2} \left[\bar{\epsilon} - \frac{\chi}{2} \alpha_1(\tau)^2 \right]$ 的计算曲线. 虚线为 $\gamma_r = 0.5$, 实线为 $\gamma_r = 5$, 其他参数同上.

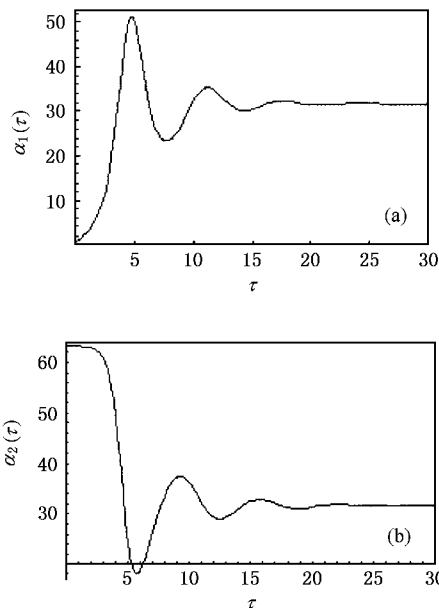


图1 (a) $\alpha_1(\tau)$ 随 τ 变化曲线图, (b) $\alpha_2(\tau)$ 随 τ 变化曲线图

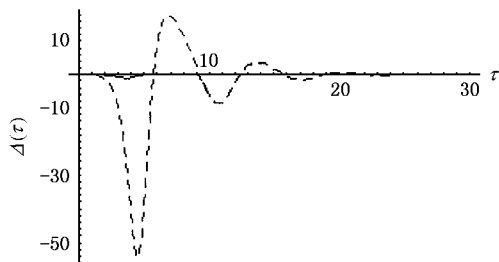


图2 偏差 $\Delta(\tau)$ 随 τ 变化曲线图

由图可看出当 γ_r 增加的时候, $\Delta(\tau)$ 急剧减小, 这就是绝热近似成立的条件. 但当 γ_r 不是很大, $\Delta(\tau)$ 不是很小, 如图中的虚线所示, 绝热近似不能用. 还是要用含时的线性驱动 Fokker-Planck 方程. 故本文采用 $\alpha_2(\tau)$, 而不用绝热近似即(3)式的第2式.

线性理论假设 $\epsilon = \chi \alpha_2$ 为常数, 得出通常的线性驱动 Ornstein-Uhlenbeck 方程可以解析求解. 当驱动场 $\epsilon(\tau) = \chi \alpha_2(\tau)$ 为含时的函数时, 相应的 Fokker-Planck 方程即变系数的或含时的线性驱动 Fokker-Planck 方程, 也可以解析求解的, 这便是本文在下节所要证明的.

3. 含时的线性驱动 Fokker-Planck 方程的解

常系数线性驱动 Fokker-Planck 方程即 Ornstein-Uhlenbeck 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}p, \quad (5)$$

$$p = p(x, t | x_0, 0),$$

这时 k, D 是常数, 取 $p(x, t | x_0, 0)$ 的 Fourier 变换, 得^[23]

$$\phi(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) p(x, t | x_0, 0) dx, \quad (6)$$

$$\phi = \exp\left\{-\frac{Ds^2}{4k}[1 - \exp(-2kt)] + isx_0 \exp(-kt)\right\}. \quad (7)$$

对于变系数的情形 $k = k(t), D = D(t)$, 将(6)式代入(5)式得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + ks \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{D}{2}s^2 \phi,$$

即

$$\frac{\partial \ln \phi}{\partial t} + ks \frac{\partial \ln \phi}{\partial s} = -\frac{D}{2}s^2. \quad (8)$$

先求(8)式的特解. 设 $\ln \phi = -A(t)s^2$, 则得 $\frac{\partial A}{\partial t} +$

$$2kA = \frac{D}{2}.$$

$$A = A_0 \exp\left(-2 \int_0^t k dt'\right) + \exp\left(-2 \int_0^t k dt'\right) + \int_0^t \exp\left(2 \int_0^{t'} k dt''\right) \frac{D}{2} dt'. \quad (9)$$

故 ϕ 特解可写为 $\bar{\phi} = \exp(-As^2)$. 而 ϕ 的通解为

$$\phi = \exp(-As^2) g\left[s \exp\left(-\int_0^t k dt'\right)\right]. \quad (10)$$

为了满足初值 $\phi(s, 0) = \exp(isx_0)$, 使得

$$\phi = \exp\left\{-As^2[1 - \exp(-2 \int_0^t k dt')] + isx_0 \exp\left(-\int_0^t k dt'\right)\right\}. \quad (11)$$

当 k, D 为常数时, 易于证明(11)式中的 $A = \frac{D}{4k}$, 返

回(7)式一般情形, 应用(11)求反变换

$$\frac{p(x, t | x_0, 0)}{1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi A [1 - \exp(-2 \int_0^t k dt')]}} \times \exp\left[-\frac{\left[x - x_0 \exp\left(-\int_0^t k dt'\right)\right]^2}{4A [1 - \exp(-2 \int_0^t k dt')]}\right]. \quad (12)$$

4. 含时的线性驱动简并参量放大 Fokker-Planck 方程的解

先写下简并参量 Fokker-Planck 方程^[11, 12],

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) - \epsilon \left(\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right) + 2k\bar{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] p. \quad (13)$$

通过变换 $\alpha = \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}, \alpha^* = \frac{\beta - i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}$, 使得 $p(\alpha, \alpha^*) = p(\beta) \tilde{p}(i\tilde{\beta})$.

$$\frac{\partial p(\beta)}{\partial t} = \left[(k - \epsilon) \frac{\partial}{\partial \beta} \beta + \left(\frac{\epsilon}{2} + k\bar{n} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] p(\beta), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}(i\tilde{\beta})}{\partial t} = \left[(k + \epsilon) \frac{\partial}{\partial (i\tilde{\beta})} (i\tilde{\beta}) + \left(\frac{\epsilon}{2} - k\bar{n} \right) \frac{\partial^2}{\partial (i\tilde{\beta})^2} \right] \tilde{p}(i\tilde{\beta}), \quad (15)$$

(14)与(15)式分别为 $p(\beta) \tilde{p}(i\tilde{\beta})$ 的 Fokker-Planck 方程, 而且扩散系数分别为 $\frac{\epsilon}{2} + k\bar{n}, \frac{\epsilon}{2} - k\bar{n}$. 一般 $k\bar{n}$ 贡献很小, 故均为正的. 若略去 $k\bar{n}$ 的贡献, 与(5)式进行比较, 则(14)与(15)式的驱动与扩散变系数分别为 $k - \epsilon, k + \epsilon$. 因驱动场 $\epsilon = \chi \alpha_2(\tau)$, 故(14)(15)式为变系数线性驱动场的 Fokker-Planck 方程. 现在按(9)式求解 A, \bar{A} 并代入(13)便得分布函数 $p(\beta) \tilde{p}(i\tilde{\beta})$.

$$p(\beta) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{4A} \frac{\left(\beta - \beta_0 \exp\left[-\int_0^t (k - \epsilon) dt'\right]\right)^2}{1 - \exp\left[-2 \int_0^t (k - \epsilon) dt'\right]}\right]}{\sqrt{4\pi A \left(1 - \exp\left[-2 \int_0^t (k - \epsilon) dt'\right]\right)}}, \quad (16)$$

$$\tilde{p}(i\tilde{\beta}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{4\bar{A}} \frac{\left(i\tilde{\beta} - i\tilde{\beta}_0 \exp\left[-\int_0^t (k + \epsilon) dt'\right]\right)^2}{1 - \exp\left[-2 \int_0^t (k + \epsilon) dt'\right]}\right]}{\sqrt{4\pi \bar{A} \left(1 - \exp\left[-2 \int_0^t (k + \epsilon) dt'\right]\right)}}, \quad (17)$$

由常微分方程(2)的一式:

$$\frac{d \ln \alpha_1(\tau)}{d\tau} = -1 + \frac{\chi \alpha_2}{\gamma_1} = -1 + \frac{\epsilon}{k},$$

可得

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_{10} \exp\left[-\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right].$$

故式中

$$\begin{aligned} \exp\left[-\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right] &= \alpha(t) = \frac{\alpha_1(\tau)}{\alpha_{10}}, \\ \exp\left[-\int_0^t (k + \varepsilon) dt'\right] & \\ &= \exp\left[-2\int_0^t k dt' + 2\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right] \\ &= \exp(-2kt) \alpha(t)^{-2} = \tilde{\alpha}(t). \end{aligned}$$

对于参量下转换情形,比较(9)式与(14)式(9)式中的 k, D 分别代换为 $k - \varepsilon$ 与 ε , 使得

$$\begin{aligned} A &= A_0 \exp\left[-2\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right] \\ &+ \exp\left[-2\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right] \\ &\times \int_0^t \exp\left[2\int_0^{t'} (k - \varepsilon) dt''\right] \frac{\varepsilon}{2} dt' \\ &= \alpha^2 \left[A_0 + \int_0^t \frac{\alpha^{-2}}{2} \left(\frac{d \ln \alpha}{dt} + k \right) dt' \right] \\ &= \alpha^2 \left(A_0 + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 k}{2} \int_0^t \alpha^{-2} dt'. \quad (18) \end{aligned}$$

同样比较(9)式与(15)式,

$$\tilde{A} = \tilde{\alpha}(\tau) \left(\tilde{A}_0 + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\alpha}(\tau) k}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} \tilde{\alpha}(t)^{-2} dt. \quad (19)$$

5. 简并参量放大系统的量子起伏计算

在(16)–(19)式的基础上,可求得简并参量放大系统的量子起伏为

$$\begin{aligned} (\Delta\beta)^2 &= (\beta - \beta_0 \exp\left[-\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right])^2 \\ &= 2A(1 - \exp\left[-2\int_0^t (k - \varepsilon) dt'\right]) \\ &= 2A(1 - \alpha^2(\tau)), \\ (\Delta i\tilde{\beta})^2 &= (i\tilde{\beta} - i\tilde{\beta}_0 \exp\left[-\int_0^t (k + \varepsilon) dt'\right])^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\tilde{A}(1 - \exp\left[-2\int_0^t (k + \varepsilon) dt'\right]) \\ &= 2\tilde{A}(1 - \tilde{\alpha}^2(\tau)). \end{aligned}$$

实际量子起伏为

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \frac{1}{4} + (\Delta x)^2 : \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(\Delta\beta)^2}{2} \\ &= \frac{1}{4} + A(1 - \alpha^2(\tau)), \quad (20) \\ (\Delta y)^2 &= \frac{1}{4} + (\Delta y)^2 : \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(\Delta i\tilde{\beta})^2}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \tilde{A}(1 - \tilde{\alpha}^2(\tau)). \quad (21) \end{aligned}$$

Fokker-Planck 方程中的损耗系数 k 即(2)式中的 γ_1 , 即 $k = \gamma_1$. 参见前面(4)式 μ 的定义, $\mu = \frac{\varepsilon_0}{k}$. 由(18)

式, 当 $t=0$, 有 $A = A_0 = \frac{D}{4k} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{4(k - \varepsilon_0)} = \frac{\mu}{4(1 - \mu)}$,

同样有 $\tilde{A}_0 = \frac{\mu}{4(1 + \mu)}$.

下面我们选择参数: $\eta = \frac{1}{1000}$, $\gamma_r = 0.5$, 初值 α_{10}

$= 1$, $\alpha_{20} = \frac{\mu}{\sqrt{2\gamma_r \eta}}$, 数值求解微分方程(2), 并应用(18)和(19)式计算 $A(\tau), \tilde{A}(\tau)$, 应用(20)和(21)式计算量子起伏 $(\Delta y)^2$ 随时间 τ 的变化过程.

(1) 对于 $\mu \leq 1$ 的情况

当 $\mu = 0.8$ 时, 压缩度为 $\frac{0.14}{0.25} = 0.56$, 与线性理

论近似 $\frac{1}{1 + \mu} = 0.556$ 相接近(见图 3(a)); 当 $\mu = 1$

时, 压缩度为 $\frac{0.125}{0.25} = 0.5$, 与线性理论近似 $\frac{1}{1 + \mu} =$

0.5 相同(见图 3(b)).

(2) 对于 $\mu \geq 1$ 的情况

当 $\mu = 2$ 时, 压缩曲线由两个压缩平台构成, 一个接近线性理论近似 $\frac{1}{1 + \mu}$, 另一个则接近于 $\frac{1}{2}$. 对

于第一压缩平台的压缩度为 $\frac{0.085}{0.25} = 0.34$, 与线性理

论相近. 对于第二压缩平台的压缩度为 $\frac{0.125}{0.25} = 0.5$,

完全区别于线性理论(见图 3(c)).

第一个平台的宽度 $\Delta\tau$ 决定于初值 α_{10} 及稳态值

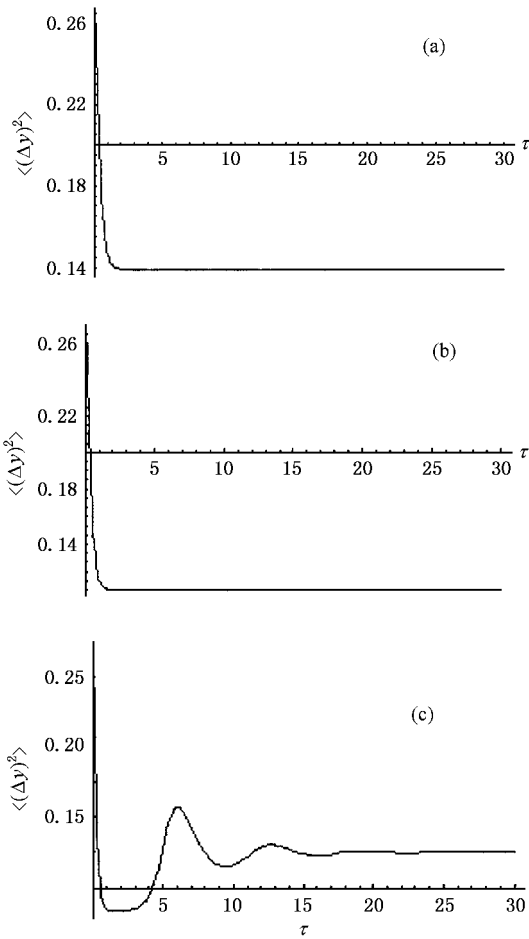


图 3 (a) $\mu = 0.8$, (b) $\mu = 1$, (c) $\mu = 2$. 当 $\alpha_{10} = 1$, $\eta = \frac{1}{1000}$, $\gamma_r = 0.5$ 时量子起伏 $\langle(\Delta y)^2\rangle$ 随时间 τ 的变化曲线图

$\bar{\alpha}_1$ 可按 $\alpha_{10} \exp[-(k - \epsilon)\Delta\tau] \approx \bar{\alpha}_1$ 计算, 即 $\Delta\tau \approx \frac{1}{\mu - 1} \ln \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_{10}}$. 图 4 给出了初值 $\alpha_{10} = 0.001$ 时的压缩计算.

由 $\Delta\tau$ 的公式估算出图 3(c) 和图 4 的 $\Delta\tau$ 分别为 3.4 和 10.4. 与图示的宽度基本相同. 上面两平台

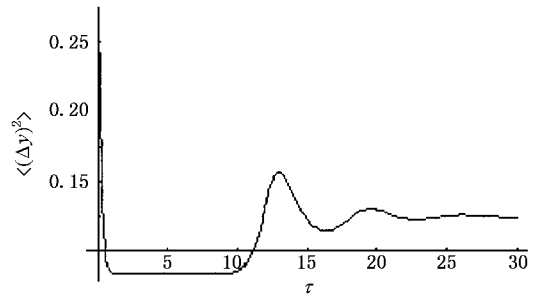


图 4 $\alpha_{10} = 0.001, \eta = \frac{1}{1000}, \gamma_r = 0.5, \mu = 2$ 时量子起伏 $\langle(\Delta y)^2\rangle$ 随时间 τ 的变化曲线图

及 $\Delta\tau$ 结论是根据 $\mu = 2$ 的计算得出的, 但对 $\mu \geq 1$ 的情形, 例如 $\mu = 1.3, \mu = 4$ 也核算过是成立的. 根据这些压缩特点, 为获得高的压缩度, 应采用大的 μ , 并将作用时间 Δt 选在第一平台即 $\Delta t \leq \frac{\Delta\tau}{k}$, 损耗 k 减小有利于作用时间的增长, 为使得第一平台的参量振幅 ($\approx 2\bar{\alpha}_1$) 足够大, 应尽量采用小的 η , 因 $\bar{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{\mu - 1}{\eta}}$.

6. 讨论与小结

本文首先将一个在 P 表象中的非线性简并参量放大 Fokker-Planck 方程转换为一个含时线性驱动的 Fokker-Planck 方程并求其解. 在阈值以下或阈值附近, 含时驱动 Fokker-Planck 方程的解与线性理论或阈值附近的微扰理论预言的基本相符. 但在阈值以上, 含时驱动 Fokker-Planck 方程解的短时行为也与线性近似解相近. 但当 τ 增大后的长时行为压缩度为 $\frac{1}{2}$ 完全区别于线性理论的结果. 这些特点提供了获得最大压缩最大参量输出选择参数的依据.

[1] Yurke B 1985 *Phys. Rev. A* **32** 300
 [2] Gardiner C W and Collett M J 1985 *Phys. Rev. A* **31** 3761
 [3] Collett M J and Walls D F 1985 *Phys. Rev. A* **32** 2887
 [4] Wu L A, Kimble H J, Hall J L et al 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2520
 [5] Kinsler P and Drummond P D 1991 *Phys. Rev. A* **43** 6194 ;
 Kinsler P and Drummond P D 1992 *Phys. Rev. A* **52** 783
 [6] Plimak L I and Walls D F 1995 *Phys. Rev. A* **50** 2627
 [7] Drummond P D and Gardiner C W 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 2353
 [8] Bourdurant R S, Kumar P, Sharpiron J H et al 1984 *Phys. Rev. A* **30** 343
 [9] Kumar P and Sharpiron J H 1984 *Phys. Rev. A* **30** 1568
 [10] Wolinsky M and Carmichael H J 1985 *Opt. Commun.* **55** 138
 [11] Tan W H, Li Y F and Zhang W P 1987 *Opt. Commun.* **64** 195

- [12] Zhao C Y ,Tan W H and Guo Q Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2694 (in Chinese) [赵超樱、谭维翰、郭奇志 2003 物理学报 **52** 2694]
- [13] Wang D L ,Gong Q H ,Wang K G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1484 (in Chinese) [王丹翎、龚旗煌、汪凯戈等 2000 物理学报 **49** 1484]
- [14] Gamal M 1999 *Chin. Phys.* **8** 754
- [15] Li Y M ,Fan Q Y ,Zhang K S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 849 (in Chinese) [李永民、樊巧云、张宽收等 2003 物理学报 **52** 849]
- [16] Zheng S B 2003 *Chin. Phys.* **12** 51
- [17] Li X Y ,Jing J T , Zhang J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 966 (in Chinese) [李小英、荆杰泰、张 靖等 2002 物理学报 **51** 966]
- [18] Zhang Y , Wang H , Li X Y *et al* 2000 *Phys. Rev. A* **62** 23813
- [19] Liu H J ,Chen G F ,Zhao W *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 105 (in Chinese) [刘红军、陈果夫、赵 卫等 2004 物理学报 **53** 105]
- [20] Chaturvedi S , Dechoum K and Drummond P D 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033805
- [21] Drummond P D , Dechoum K and Chaturvedi S 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033806
- [22] Wall D F , Milburn G J 1994 *Quantum optics* 2nd ed (New York : Springer-Verlag) p177
- [23] Gardiner C W 1983 *Handbook of Stochastic Methods* (New York : Springer-Verlag) p75

Quantum fluctuation in the time-dependent linearly driven degenerate parametric amplification^{*}

Zhao Chao-Ying Tan Wei-Han

(*Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 200444 , China*)

(Received 19 December 2004 ; revised manuscript received 14 March 2005)

Abstract

A systematic theory of quantum fluctuation in the time-dependent linearly driven parametric amplification is developed. At first , a time-dependent linearly driven Fokker-Planck equation for the degenerate optical parametric amplification system is deduced when the pump depletion is considered , and then the quantum fluctuation below or near the threshold is evaluated , which is in agreement with that obtained by the linear theory or perturbation expansion near the threshold. Above the threshold , the short-time behavior of our solution is close to the linearization approximation ; however , with the increase of interaction time τ , the long-time behavior of our solution shows that the squeezing is quite different from the linear theory.

Keywords : time-dependent linearly driven degenerate parametric amplification , Fokker-Planck equation , quantum fluctuation

PACC : 0365 , 4250

^{*} Project supported by Leading Discipline Program of Shanghai Education Committee ,China.