

# Hénon 混沌系统的广义预测控制与同步快速算法

刘福才<sup>†</sup> 梁晓明

(燕山大学电气工程学院自动化系, 秦皇岛 066004)

(2005 年 1 月 7 日收到, 2005 年 2 月 4 日收到修改稿)

提出了一种带有终端滑模等式约束的 Hénon 混沌系统的广义预测控制快速算法. 该方法将广义预测控制与离散滑模控制结合起来运用到 Hénon 混沌系统中, 并采用柔化输入信号的方法, 避免了广义预测控制算法中的高维矩阵求逆. 占用内存小, 计算速度快, 并且具有较强的跟踪给定信号和抑制系统参数摄动和随机噪声的能力. 仿真结果验证了该方法的有效性和快速性.

关键词: 广义预测控制, 离散滑模控制, Hénon 混沌系统, 混沌同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌是非线性动力学所特有的一种运动形式, 它广泛存在于自然界当中, 长期以来, 人们一直认为混沌是不可控制的, 但自从 Ott, Grebogi 和 Yorke 基于参数扰动的方法, 成功地实现了混沌系统的控制<sup>[1]</sup>, 自此混沌系统的控制问题逐渐引起了人们浓厚的兴趣<sup>[2-5]</sup>. 另外由于非线性系统的混沌同步在通讯、信息科学、医学、生物、工程等领域中具有很大的应用潜力及发展前景, 已引起国内外学者的广泛关注与兴趣<sup>[6-9]</sup>. 文献 [9] 采用带终端滑模等式约束的模型预测控制方法实现了 Hénon 混沌系统对参考信号的追踪控制与同步. 本文在文献 [9] 的基础上将终端滑模等式约束的思想与广义预测控制相结合运用到 Hénon 混沌系统中, 并采用柔化输入信号的方法, 避免了广义预测控制算法中的高维矩阵求逆, 提高了算法的快速性. 通过与文献 [9] 的仿真结果比较可见, 本文算法有效地实现了 Hénon 混沌系统的追踪控制与同步, 使系统的跟踪误差减小, 并提高了受控系统抑制参数摄动和随机噪声的能力, 改善了控制系统的鲁棒性.

## 2. 终端滑模等式约束的 Hénon 混沌系统广义预测控制快速算法

### 2.1. 基于状态方程的终端滑模等式约束的广义预测控制方法

考虑被控对象的数学模型采用如下离散状态方程描述<sup>[10]</sup>:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad (1)$$

$$y(k) = cx(k), \quad (2)$$

式中状态向量  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

由 (1) 式和 (2) 式可以得到输出  $y$  在  $k$  时刻第  $j$  步的预测值

$$y(k+j) = cA^j x(k) + \sum_{i=1}^j cA^{j-i} bu(k+i-1), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

将 (3) 式写成向量形式为

$$Y = Fx(k) + GU, \quad (4)$$

式中  $N$  为预测时域, 定义

$$Y = [y(k+1) \ y(k+2) \ \dots \ y(k+N)]^T,$$

$$F = [cA \ cA^2 \ \dots \ cA^N]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} cb & & & & \\ cAb & cb & & & \\ & & \ddots & & \\ cA^{N-1} & cA^{N-2}b & \dots & cb & \end{bmatrix},$$

$$U = [u(k) \ u(k+1) \ \dots \ u(k+N-1)]^T, \quad (5)$$

对于 (1) 式和 (2) 式描述的系统, 设计滑动运动方程<sup>[9]</sup>

$$x(k+j) = T(z^{-1})x(k+j), \quad (6)$$

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: lfc\_xb@263.net

式中  $\mathcal{T}(z^{-1})$  是渐进稳定的多项式, 表示为

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = 1 + t_1 z^{-1} + \dots + t_n z^{-n}, \quad (7)$$

$x(k+j)$  表示  $k$  时刻第  $j$  步切换函数预测值,  $y_r(k+j)$  表示  $k$  时刻第  $j$  步参考信号值,  $\mathcal{T}(z^{-1})$  为后移算子  $z^{-1}$  的多项式,  $e(k+j)$  表示  $k$  时刻第  $j$  步输出跟踪误差预测值.

$$e(k+j) = y(k+j) - y_r(k+j). \quad (8)$$

根据离散线性系统稳定理论, 适当选择参数  $t_i$ , 使 (7) 式渐近稳定.

采用最终滑动模态  $s(k+N) = 0$ , 可在比较小的预测时域下获得闭环系统的稳定性结果. 取控制时域  $N_u = N$ , 最小预测时域  $N_1 = 1$ . 取性能指标为:

$$J_N = S_N^T S_N, \text{ 且 } s_k(N) = 0. \quad (9)$$

这样式  $s_k(j) = \mathcal{T}(z^{-1})[y_k(j) - y_{rk}(j)]$  可以表示为:

$$S_N = \mathcal{T}(z^{-1})[F\mathcal{X}(k) + GU - Y_r], \quad (10)$$

$$s(k+N|k) = \mathcal{T}(z^{-1})[F_N\mathcal{X}(k) + G_N U - y_r(k+N)], \quad (11)$$

$$U = [u(k) \quad u(k+1) \quad \dots \quad u(k+N-1)]^T. \quad (12)$$

定义输入柔化系数  $\beta$  为<sup>[11]</sup>

$$u(k+t) = \left(1 + \sum_{i=1}^k \beta^i\right) u(k), \quad (13)$$

其中  $\beta \geq 0$ , 通常  $\beta \leq 1$  为好.

由 (10) 式和 (13) 式可得:

$$S_N = \mathcal{T}(z^{-1})[F\mathcal{X}(k) + K u(k)] - \mathcal{T}(z^{-1})Y_r, \quad (14)$$

其中

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_N)^T = GM,$$

$$M = (1 \quad 1 + \beta \quad 1 + \beta + \beta^2 \quad \dots \quad 1 + \beta + \dots + \beta^{N-1})^T, \quad (15)$$

使性能指标 (9) 式最小可得控制律:

$$\begin{aligned} Tu(k) = & (K^T K + qN^T N)^{-1} \{K^T [\mathcal{T}(z^{-1})Y_r \\ & - \mathcal{T}(z^{-1})F\mathcal{X}(k)] + qN^T [\mathcal{T}(z^{-1})y_r(k+N) \\ & - \mathcal{T}(z^{-1})F_N\mathcal{X}(k)]\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $q$  为拉格朗日常数.

## 2.2. 带终端滑模等式约束 Hénon 混沌系统的广义预测控制快速算法

Hénon 混沌系统描述如下

$$x_1(k+1) = x_2(k), \quad (17a)$$

$$x_2(k+1) = 1 + bx_1(k) - \alpha(x_2(k))^2 + u(k), \quad (17b)$$

式中  $a$  和  $b$  为系统参数,  $u(k)$  为控制信号, 当  $u(k) = 0$  时系统为混沌系统.

定义

$$u(k) = -(1 + bx_1(k) - \alpha(x_2(k))^2) + u^*(k), \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (17) 式中, 可以得到一个广义系统为

$$x(k+1) = Ax(k) + bu^*(k), \quad (19)$$

其中

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由 (19) 式可以得到状态变量  $x_1$  在  $k$  时刻第  $j$  步的预测值

$$\begin{aligned} x_1(k+j) = & cA^j x(k) + \sum_{i=1}^j cA^{j-i} bu^*(k+i-1), \\ & j = 1 \quad 2 \quad \dots \quad N. \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$c = [1 \quad 0].$$

将 (20) 式写成向量形式为

$$X = GU^* + F\mathcal{X}(k), \quad (21)$$

式中  $N$  为预测时域, 定义

$$X = [x_1(k+1) \quad x_1(k+2) \quad \dots \quad x_1(k+N)]^T$$

$$F = [cA \quad cA^2 \quad \dots \quad cA^N]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} cb \\ cAb \quad cb \\ \vdots \\ cA^{N-1} \quad cA^{N-2}b \quad \dots \quad cb \end{bmatrix},$$

$$U^* = [u^*(k) \quad u^*(k+1) \quad \dots \quad u^*(k+N-1)],$$

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_N)^T = GM,$$

$$\begin{aligned} M = & (1 \quad 1 + \beta \quad 1 + \beta + \beta^2 \quad \dots \quad 1 + \beta + \dots + \beta^{N-1})^T, \\ N = & G_N M, \end{aligned} \quad (22)$$

则有以下结论

**定理 1** 对于 Hénon 混沌系统 (7), 若下面条件成立

$$u(k) = -(1 + bx_1(k) - \alpha(x_2(k))^2) + u^*(k), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Tu^*(k) = & [K^T K + qN^T N]^{-1} [K^T (\mathcal{T}(z^{-1})Y_r \\ & - \mathcal{T}(z^{-1})F\mathcal{X}(k)) + qN^T (\mathcal{T}(z^{-1})y_r(k+N) \\ & - \mathcal{T}(z^{-1})F_N\mathcal{X}(k))], \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $q$  为拉格朗日乘数, 则可以实现系统对参考信号  $y_r(k)$  的跟踪控制与同步.

证明 构造广义跟踪误差滑动面如下式

$$s(k+j) = \mathcal{T}(z^{-1})e(k+j), \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} \epsilon(k+j) &= x_1(k+j) - y_r(k+j), \\ \mathcal{T}(z^{-1}) &= 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2}, \end{aligned} \quad (26)$$

则有

$$\begin{aligned} s(k+j) &= \epsilon(k+j) + t_1 \epsilon(k+j-1) \\ &\quad + t_2 \epsilon(k+j-2). \end{aligned} \quad (27)$$

根据离散线性系统稳定理论,适当选择参数  $t_1, t_2$ , 使(26)式渐近稳定. 采用最终滑动模态  $s(k+N)=0$ , 可在比较小的预测时域下获得闭环系统的稳定性结果. 取性能指标函数为

$$J = S^T S, \text{ 且 } s(k+N) = 0, \quad (28)$$

式中

$$S = [s(k+1) \quad s(k+2) \quad \dots \quad s(k+N)]^T,$$

令

$$Y_r = [y_r(k+1) \quad y_r(k+2) \quad \dots \quad y_r(k+N)]^T,$$

将(21)式代入(25)式, 则有

$$S = \mathcal{T}(z^{-1}) [GU^* + Fx(k) - Y_r]. \quad (29)$$

由(22)式可得

$$S = \mathcal{T}(z^{-1}) [Fx(k) + Ku(k)] - \mathcal{T}(z^{-1}) Y_r. \quad (30)$$

将(30)式代入(28)式,  $q$  为拉格朗日乘数, 则使性能指标函数  $J$  取最小值的控制律为

$$\begin{aligned} u^*(k) &= [K^T K + qN^T N]^{-1} [K^T (\mathcal{T}(z^{-1}) Y_r \\ &\quad - \mathcal{T}(z^{-1}) Fx(k)) + qN^T (\mathcal{T}(z^{-1}) Y_r(k+N) \\ &\quad - \mathcal{T}(z^{-1}) F_N x(k))] - t_1 u^*(k-1) \\ &\quad - t_2 u^*(k-2). \end{aligned} \quad (31)$$

这样, 将(31)式代入(18)式中, 得到控制律  $u(k)$ .

$$u(k) = -(1 + bx_1(k) - a(x_2(k))^2) + u^*(k). \quad (32)$$

控制器(32)由于含有以前控制量的加权值  $t_2 u^*(k-1) - t_1 u^*(k-2)$ , 因此能够柔化控制量, 大大减少控制量的震荡. 综上所述, 定理1得证.

### 3. 数值研究结果

为了便于比较, 本文采用与文献[9]一样的仿真例子.

#### 3.1. Hénon 混沌系统追踪正弦信号

##### 3.1.1. 无参数摄动和随机噪声信号时 Hénon 混沌系统追踪正弦信号

选择系统中的参数为  $a = 1.4, b = 0.3$ , 当  $u(k)$

$= 0$  时, 此时系统(17)处于混沌态<sup>[7]</sup>.

设参考信号  $y_r(k) = \sin k/2$ , 选取  $T = 1 + 1.6z^{-1} + 0.64z^{-2}$  满足(7)式渐进稳定, 取预测时域  $N = 2$ , 拉格朗日常数  $q = 2$ . 利用控制器(32)可以实现 Hénon 混沌系统对参考信号  $y_r(k) = \sin(k/2)$  的追踪控制.

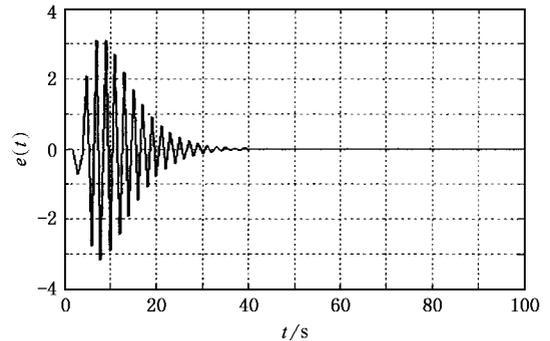


图1 采用文献[9]控制器时误差信号  $\epsilon(k)$

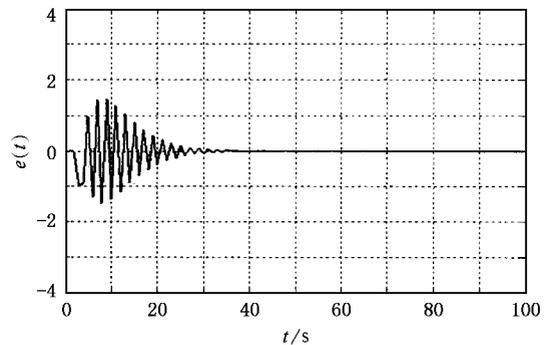


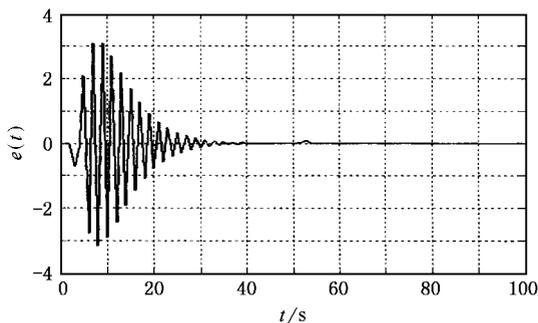
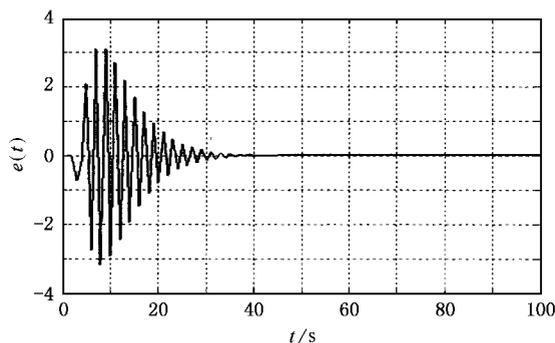
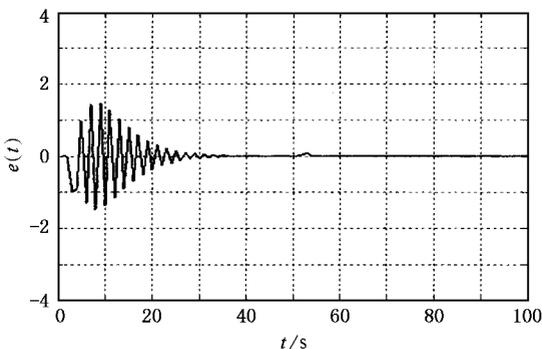
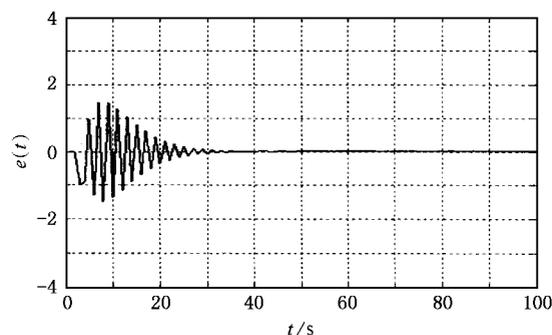
图2 采用本文控制器时误差信号  $\epsilon(k)$

图1给出了采用文献[9]控制器的跟踪误差信号  $\epsilon(k)$  曲线, 图2给出了采用本文控制器(32)的跟踪误差信号  $\epsilon(k)$  曲线. 可见本文控制器跟踪效果较好, 跟踪误差小.

##### 3.1.2. 带有系统参数摄动的 Hénon 混沌系统追踪正弦信号

在  $k = 50$  时, 在(17b)式中的参数  $b$  上加入参数摄动  $\Delta b = -0.2$ .

图3给出了用文献[9]控制器在  $k = 50$  时, 在(17b)式中的参数  $b$  上加入参数摄动  $\Delta b = -0.2$  得到的跟踪误差信号  $e(k) = x_1(k) - y_r(k)$  的显示结果. 图4给出了采用本文控制器在  $k = 50$  时, 在(17b)式中的参数  $b$  上加入同样的参数摄动  $\Delta b = -0.2$  得到的跟踪误差信号  $\epsilon(k)$  曲线. 比较可见, 文

图3 采用文献9控制器有参数摄动  $\Delta b$  时误差信号  $e(k)$ 图5 采用文献9控制器有随机噪声时误差信号  $e(k)$ 图4 采用本文控制器有参数摄动  $\Delta b$  时误差信号  $e(k)$ 图6 采用本文控制器有随机噪声时误差信号  $e(k)$ 

文献9控制器与本文控制器在追踪正弦信号时都具有较好的抑制参数摄动能力,但是本文控制器控制效果较好,跟踪误差小。

### 3.1.3. 带有随机噪声的 Hénon 混沌系统追踪正弦信号

考虑系统存在噪声的随机迭代过程<sup>[12]</sup>

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + \xi(k), \quad (33)$$

不失一般性,设  $\xi(k)$  为一 Gauss 型的随机变量,满足条件

$$E(\xi(k)) = 0, E(\xi(k)^2) = \delta^2. \quad (34)$$

取  $\delta = 0.01$  图5是当 Hénon 系统方程式(17b)中有随机噪声  $x_2(k+1) = 1 + bx_1(k) - a(x_2(k))^2 + u(k) + \xi(k)$  时,用文献9控制器实现的 Hénon 混沌系统对正弦参考信号的追踪控制的误差信号  $e(k) = x_1(k) - y_1(k)$  仿真结果;图6是当方程式(17b)有相同随机噪声,用本文控制器得到的误差信号的仿真结果.比较可见,文献9控制器与本文控制器在追踪正弦信号时都具有较好的抑制随机噪声的能力,只是本文控制器控制效果较好,跟踪误差小。

### 3.2. Hénon 混沌系统的自同步

选择同步系统的驱动系统为<sup>[9]</sup>

$$y_1(k+1) = y_2(k)$$

$$y_2(k+1) = 1 + b_1 y_1(k) - a_1 (y_2(k))^2$$

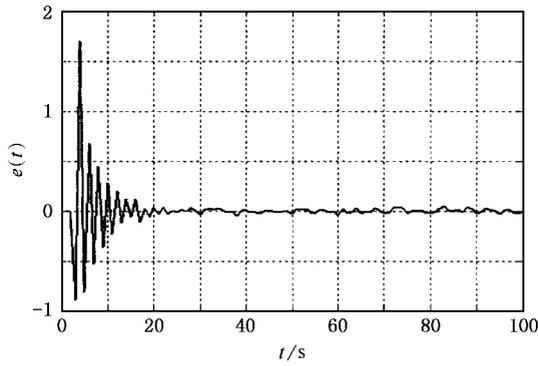
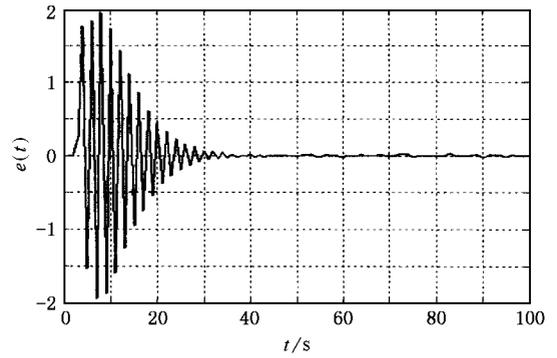
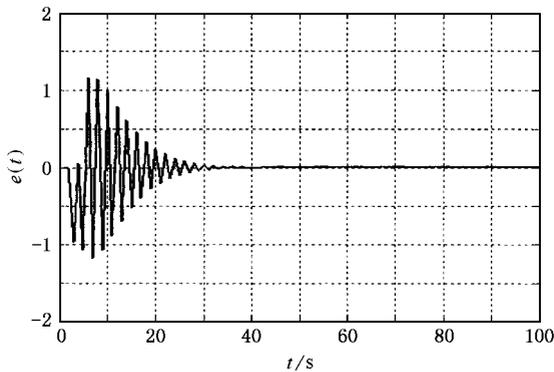
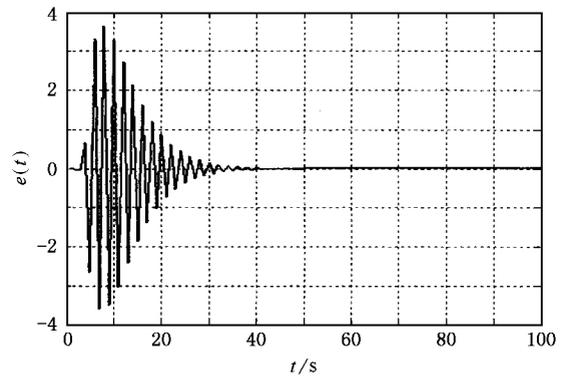
式中  $y_1(k)$  为驱动信号,  $b_1 = 0.3$ ,  $a_1 = 1.35$  为系统参数,此时系统处于混沌状态.图8给出了方程式(17b)有随机干扰时,取  $\delta = 0.01$ ,用本文控制器得到的误差信号  $e(k) = x_1(k) - y_1(k)$  的仿真结果,结果表明系统实现了自同步。

图7给出了采用了文献9控制器有随机噪声时的自同步误差信号  $e(k)$  曲线,图8给出了采用本文控制器有随机噪声时的自同步误差信号  $e(k)$  曲线,可见本文控制器能够实现 Hénon 混沌系统自同步,并且比文献9控制器具有更好的抑制随机噪声的能力,但是跟踪误差略大。

### 3.3. Hénon 混沌系统的异结构混沌同步

选择同步系统的驱动系统为<sup>[9]</sup>

$$y_1(k+1) = -k \sin(y_2(k)) + y_1(k)$$

图 7 采用文献 9 控制器有随机噪声时自同步误差信号  $e(k)$ 图 9 采用文献 9 控制器有随机噪声时异步误差信号  $e(k)$ 图 8 采用本文控制器有随机噪声时自同步误差信号  $e(k)$ 图 10 采用本文控制器有随机噪声时异步误差信号  $e(k)$ 

$$y_2(k+1) = y_2(k) + y_1(k+1)$$

式中  $y_1(k)$  为驱动信号 取  $k = 1.16$  系统处于混沌状态.图 10 给出了方程式(17b)有随机噪声时,取  $\delta = 0.01$  用本文控制器得到的误差信号  $e(k) = x_1(k) - y_1(k)$  的仿真结果 结果表明系统实现了异步.

图9给出了采用了文献 9 控制器有随机噪声

时的异步误差信号  $e(k)$  曲线,图 10 给出了采用本文控制器有随机噪声时的异步误差信号  $e(k)$  曲线,可见本文控制器能够实现 Hénon 混沌系统异步,并且比文献 9 控制器具有更好的抑制随机噪声能力,但是跟踪误差略大.

### 3.4. CPU 时间比较

表 1 CPU 时间(s)比较

数值研究内容	$N$	$q$	文献 9 算法	本文算法
无参数摄动和随机噪声时 Hénon 混沌系统追踪正弦信号	2	2	1.1807	0.6410
有参数摄动时 Hénon 混沌系统追踪正弦信号	2	2	0.3590	0.2190
有随机噪声时 Hénon 混沌系统追踪正弦信号	2	2	0.7190	0.2180
有随机噪声时 Hénon 混沌系统自同步	2	2	1.0310	0.3600
有随机噪声时 Hénon 混沌系统异步	2	2	0.9380	0.6560

表 1 列出了两种方法在 PIV2.0 上运行所需要的 CPU 时间,可见本文的又一大优点是将广义预测控制中柔化输出信号的方法推广到柔化输入信号中,避免了广义预测控制中的高维矩阵求逆,占用内存小,计算速度快.

## 4. 结 论

本文将广义预测控制与滑模控制相结合,运用到 Hénon 混沌系统当中,首先设计出切换函数,使得

滑动模态渐进稳定,然后在有限预测时域的基础上对切换函数附加终端等式约束,使得切换函数等于零,在对性能指标函数取最小的同时,把预测控制中柔化输出信号的方法推广到柔化输入信号中,避免了广义预测控制中的高维矩阵求逆,使得计算速度

变快.仿真结果验证了本文控制器在跟踪正弦信号时,具有文献[9]控制器的抑制参数摄动和随机噪声的能力,较文献[9]控制器跟踪误差小,在自同步与异同步控制中具有更好的抑制随机噪声的能力,计算速度快,但跟踪误差略大.

- [1] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [3] Tshimitsu Ushio and Shigeru Yamamoto 1999 *Phys. Lett. A* **264** 30
- [4] Guan X P, Peng H P, Li L X et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 [in Chinese] [关新平、彭海鹏、李丽秀等 2001 物理学报 **50** 26]
- [5] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121]
- [6] Lai J W, Zhou S P, Li G H and Xu D M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 21 (in Chinese) [赖建文、周世平、李国辉、徐得名 2001 物理学报 **50** 21]
- [7] Li L X, Peng H P, Lu H B and Guan X P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香、彭海鹏、卢辉斌、关新平 2001 物理学报 **50** 629]
- [8] Liu F, Ren Y, Shan X M and Qiu Z L 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 723
- [9] Liu F C, Wang J, Peng H P and Li L X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1954 (in Chinese) [刘福才、王娟、彭海鹏、李丽香 2002 物理学报 **51** 1954]
- [10] Wang W 1998 *Generalized Predictive Control Theory and Application* (Beijing: Science Press) p120 (in Chinese) [王伟 1998 广义预测控制理论及其应用(北京:科学出版社)第120页]
- [11] Jin Y Y 2002 *Control and Decision* **17** 506 (in Chinese) [金元郁 2002 控制与决策 **17** 506]
- [12] Chen S H and Lu J H 1998 *Principium of Chaotic Dynamics* (Wuhan: Wuhan Water Conservancy and Electric Power University Press) p62 (in Chinese) [陈士华、陆君实 1998 混沌动力学初步(武汉:武汉水利电力大学出版社)第62页]

## A fast algorithm for generalized predictive control and synchronization of Hénon chaotic systems

Liu Fu-Cai<sup>†</sup> Liang Xiao-Ming

(Department of Automation, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 7 January 2005; revised manuscript received 4 February 2005)

### Abstract

A kind of generalized predictive control and synchronization algorithm with terminal sliding model equation restriction for Hénon chaotic system is proposed. This algorithm combines the generalized predictive control with sliding-model control which has been applied to Hénon chaotic systems, and the soft coefficient to input signal, in which the inverse matrix does not require calculation. The method needs smaller computer memory and the computational speed is higher. The ability of tracking the reference signal and restraining the parameter perturbation and stochastic disturbance are improved. Simulated results show the effectiveness and speed of this algorithm.

**Keywords:** generalized predictive control, sliding-model control, Hénon chaotic system, chaotic synchronization

**PACC:** 0545

\* Corresponding author. E-mail: lfc\_xb@263.net