第 54 卷 第 10 期 2005 年 10 月
1000-3290/2005/54(10)/4974-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.10,October,2005

关于稳态轴对称真空引力场方程的两个扩展解*

吴亚波† 董 鹏 赵国明 邓雪梅

(辽宁师范大学物理系,大连 116029)

(2005 年 2 月 6 日收到;2005 年 4 月 13 日收到修改稿)

将 Ehlers 变换应用于 Ernst 方程的 Schwarzschild 解和 Kerr 解,通过引入 Boyer-Lindquist 坐标变换以及相关的参数代换,得到了 Ernst 方程的两个扩展解. 当所含参数 $L=0$ 时,其中一个扩展解退化为 Schwarzschild 解,另一个退化为 Kerr 解. 当参数 $|L|\ll M$ 时,如果取近似 $1-\left(\frac{L}{M}\right)^2\approx 1$,则这两个扩展解分别退化为已知的 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解. 这一结果表明 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解中所含的参数 l 并非能任意取值,它的取值要受到引力源质量 M 的限制,即要求 $|l|\ll M$.

关键词:Ehlers 变换群,Ernst 方程,Boyer-Lindquist 坐标变换

PACC:0420C,0420J,0240

1. 引 言

广义相对论理论的发展,在很大程度上取决于引力场方程的严格解及其物理解释. 因此,寻找引力场方程的严格解成为这一领域的重要工作. 对于求解方法,不论是直接求解,还是解的生成技术都取得了重大成果[1—14]. 其中 Ernst 方程是稳态轴对称真空引力场的一个基本方程,它在求解引力场方程精确解方面发挥了极大的作用. 同时,方程的对称性群在新解的生成技术中也起到了重要作用,尤其是 Reina 和 Treves[15] 利用相变换作用在 Schwarzschild 和 Kerr 解上,分别得到了 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解. 本文通过将 Ehlers 变换群分别作用于 Schwarzschild 解和 Kerr 解上,得到了两个不同解,一个解含有 3 个自由参数,另一个解含有 4 个自由参数. 当这些参数满足某种特定关系时,利用 Boyer-Lindquist 坐标变换[16] 以及相关的参数代换,我们得到了不同于 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解的两个解(本文中称其为 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解的扩展解). 这两个解都含有参数 L. 当 $L=0$ 时 它们分别退化为 Schwarzschild 解和 Kerr 解. 进一步,当 $|L|\ll M$ 时,如果考虑 $1-\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}\right)^2\approx 1$,这两个解就分别退化为已知的 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解. 由此可见,我们给出的两个解已将著名的 Schwarzschild 解,Kerr 解,NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解都作为特殊情况包含其中. 并且明确指出 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解中所含的参数 l(在文献[17,18] 中被解释为引力磁单极(the gravomagnetic monopole))并非能任意取值,它的取值要受到引力源质量 M 的限制,即要求 $|l|\ll M$.

为下面讨论问题方便,这里简要回顾一下 Ernst 方程以及相关的已知解.

稳态轴对称真空场线元可取为 Papapetrou 形式[16]

$$\mathrm{d}s^2=f(\mathrm{d}t-\omega\mathrm{d}\phi)^2-f^{-1}\left[e^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\phi^2\right],\tag{1}$$

其中引力势 f,ω 和 γ 仅仅是 ρ 和 z 的函数,而 γ 由 f 和 ω 决定. 稳态轴对称真空场方程,即 Ernst 方程为

$$(\xi\bar{\xi}-1)\nabla^2\xi=2\bar{\xi}\nabla\xi\cdot\nabla\xi,\tag{2}$$

这里 $\nabla\equiv(\partial_\rho,\partial_z)$ 和 $\nabla^2\equiv\partial_\rho^2+\rho^{-1}\partial_\rho+\partial_z^2$,$\bar{\xi}$ 是复势 ξ 的复共轭. 在椭球坐标系下,线元(1)可改写为[16]

$$\mathrm{d}s^2=f(\mathrm{d}t-\omega\mathrm{d}\phi)^2-k^2f^{-1}\times\left[e^{2\gamma}(x^2-y^2)\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right)\right.$$

* 国家自然科学基金(批准号:10475036)和辽宁省自然科学基金(批准号:20032102)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:ybwu61@163.com

$$+ \left(x^2 - 1\right)\left(1 - y^2\right)\mathrm{d}\phi^2\Big]. \tag{3}$$

可见,若已知 ξ,则 f,ω 和 γ 都可由如下关系求出

$$f + \mathrm{i}\Phi = \frac{\xi - 1}{\xi + 1},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{k\left(1 - y^2\right)}{f^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{4}$$

和

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{k\left(x^2 - 1\right)}{f^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{5}$$

而 γ 则由下式决定[6]

$$e^{2\gamma} = C\frac{A}{\left(x^2 - y^2\right)^{\delta}}, \tag{6}$$

其中 Φ 为扭势,C 和 δ 是积分常数.

众所周知,由 Ernst 方程求得的 Schwarzschild 解和 Kerr 解形式分别为

$\xi_s = x$ 和 $\xi_K = px + \mathrm{i}qy$,其中 p 和 q 是实常数,它们满足如下关系[16]

$$p^2 + q^2 = 1. \tag{7}$$

Reina 和 Treves[15] 利用相变换得到了如下的 NUT-Taub 解:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{H}{R}\left(\mathrm{d}t - 2l\cos\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 - \frac{R}{H}\mathrm{d}r^2 - R\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{8}$$

其中

$$H = r^2 - 2Mr - l^2, R = r^2 + l^2, \tag{9}$$

Kerr-NUT 解:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{G}{U}\left[\mathrm{d}t - \left(a\sin^2\theta\frac{U - G}{G} - 2l\cos\theta\right)\mathrm{d}\phi\right]^2 - U\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{K} + \mathrm{d}\theta^2\right) - \frac{UK}{G}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \tag{10}$$

其中

$$G = r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta - l^2,$$
$$U = r^2 + a^2\cos^2\theta + l^2 - 2al\cos\theta,$$
$$K = r^2 - 2Mr + a^2 - l^2, \tag{11}$$

这里参数 M 和 a 分别代表引力源的质量和单位质量的角动量,而参数 l 可取任意值,它已被一些学者解释为引力磁单极(the gravomagnetic monopole)[17,18].

2. 扩展的 NUT-Taub 解

设 ξ_0 是 Ernst 方程(2)的一个解,则经过 Ehlers 变换后得到的 ξ 也是 Ernst 方程的解[1],即

$$\xi = \frac{a\xi_0 + \bar{b}}{b\xi_0 + \bar{a}}, \tag{12}$$

其中 a 和 b 是复数,$\bar{a}$,$\bar{b}$ 是它们的复共轭,且它们之间满足如下关系

$$\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1),$$

$$a\bar{a} - b\bar{b} = 1. \tag{13}$$

现在,我们将 Ehlers 变换作用在 Schwarzschild 解上,通过复杂的计算能得到相应的复势

$$f = \frac{x^2 - 1}{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)x^2 + 2\left(\beta_1^2 - \beta_2^2\right)x + \beta_1^2 + \beta_2^2}, \tag{14}$$

$$\Phi = \frac{\left(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2\right)\left(x^2 - 1\right) + 2\left(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2\right)}{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)x^2 + 2\left(\beta_1^2 - \beta_2^2\right)x + \beta_1^2 + \beta_2^2}, \tag{15}$$

$$\omega = -4k\beta_1\beta_2 y, \tag{16}$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}, \tag{17}$$

这里 α 和 β 满足 $\alpha = a - b$,$\beta = a + b$.若将 α 和 β 写成 $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$,$\beta = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$,则有

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1. \tag{18}$$

从(14)—(18)式容易看出,此解包含了 3 个自由参数.

1)如果选取

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ 和 } \alpha_2 = \beta_2, \tag{19}$$

则由(14)—(17)式可知,相应的解就是 NUT-Taub 解.

2)如果考虑另一种情况

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ 和 } \alpha_2 = -\beta_2, \tag{20}$$

则(18)式变为

$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = 1. \tag{21}$$

引进双曲函数

$$\beta_1 = \coth\varphi \text{ 和 } \beta_2 = \sinh\varphi, \tag{22}$$

显然,这个方程满足(18)式.

引进 Boyer-Lindquist 坐标变换[15]和参数代换如下:

$$x \to \frac{r - M}{k}, y \to \cos\theta,$$

$$\coth 2\varphi \to \frac{M}{\sqrt{M^2 - L^2}},$$

$$\sinh 2\varphi \to \frac{-L}{\sqrt{M^2 - L^2}}, \tag{23}$$

且

$$k \to \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - L^2}}, \tag{24}$$

从(23)式可以看出 L 的取值有了如下限制

$$-M < L < M. \tag{25}$$

最后,我们得到了如下解:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta\mathscr{H}}{R}\left(\mathrm{d}t - \frac{2S}{\Delta}\cos\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 - \frac{\mathscr{R}}{\Delta H}\mathrm{d}r^2 - \frac{\mathscr{R}}{\Delta}(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{26}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{\frac{M^2 - L^2}{M^2}}, S = \frac{L}{\Delta},$$
$$\mathscr{H} = r^2 - 2Mr - S^2, \mathscr{R} = r^2 + S^2, \tag{27}$$

而 r 和 θ 是球坐标. 当 $L = 0$ 时,这个解就退化为 Schwarzschild 解. 由此表明这里的参数 M 可解释为引力源的质量,而且参数 L 的量纲为质量量纲. 更值得注意的是,如果我们取如下的近似

$$1 - \left(\frac{L}{M}\right)^2 \approx 1 \quad 当 \quad |L| \ll M 时 \tag{28}$$

则

$$S = L \to l, \mathscr{H} = r^2 - 2Mr - L^2 \to H,$$
$$\mathscr{R} = r^2 + L^2 \to R, \tag{29}$$

显然,这时解(26)能自然地退化为 NUT-Taub 解(8). 可见,解(26)已把 NUT-Taub 解作为特例包含其中. 故在这里,我们将它称之为扩展的 NUT - Taub 解(Generalized NUT-Taub Solution),简写为 GNT. 不过,与已知的 NUT-Taub 解不同,这里参数 l 不再能任意取值,而是有了一个限制,即 $|l| \ll M$.

下面,我们探讨一下 GNT 解的奇异性. 选取该度规的一次形式基如下:

$$\omega^0 = \sqrt{\frac{\Delta\mathscr{H}}{\mathscr{R}}}\left(\mathrm{d}t - \frac{2S}{\Delta}\cos\theta\mathrm{d}\phi\right),$$
$$\omega^1 = \sqrt{\frac{\mathscr{R}}{\Delta\mathscr{H}}}\mathrm{d}r,$$
$$\omega^2 = \sqrt{\frac{\mathscr{R}}{\Delta}}\mathrm{d}\theta,$$
$$\omega^3 = \sqrt{\frac{\mathscr{R}}{\Delta}}\sin\theta\mathrm{d}\phi. \tag{30}$$

由上面的第一式和第四式可解得

$$dt = \sqrt{\frac{\mathscr{R}}{\Delta\mathscr{H}}}\omega^0 + \frac{2S}{\sqrt{\Delta R}}\cot\theta\omega^3. \tag{31}$$

从而得到

$$(\nabla t)^2 = \frac{\mathscr{R}}{\Delta\mathscr{H}} + \frac{4S^2}{\Delta\mathscr{R}}\cot^2\theta. \tag{32}$$

不难看出,(32)式中当 $\Delta = 0$,或 $\mathscr{H} = 0$,或 $\theta = 0$ 和 π 时,坐标时 t 都可能会出现奇异性. 下面,我们就这三种情况分别加以讨论,来确定 GNT 解的奇点.

1)若 $\Delta = 0$,则有 $L = \pm M$. 但(25)式要求,$L \neq \pm M$. 所以,$\Delta = 0$ 的情况被排除.

2)若 $\mathscr{H} = 0$,则可求出 $r_{\pm} = M\left(1 \pm \sqrt{\frac{M^2}{M^2 - L^2}}\right)$,它正是该度规的视界 $r^h_{\pm}$[19],故 $r_{\pm}$ 不是奇点;

3)从度规的行列式 $-\det g = \frac{R^2}{\Delta^2}\sin^2\theta$ 可知,当 $\theta = 0$ 或 π 时,度规的行列式为零,从而可确定出度规的奇异性可能出现在 $\theta = 0$ 和 π 处. 此结果与 NUT-Taub 解的情况相一致[5]. 进一步,由文献[5]可知 $\theta = 0$ 是一个可去奇点,而 $\theta = \pi$ 才是内禀奇点.

综上所述,可知 $\theta = \pi$ 是 GNT 解的奇点.

此外,(26)式中的因子 $\sqrt{\frac{M^2 - L^2}{M^2}}$ 可以通过下面的坐标变换消去

$$\mathrm{d}t = \left(\frac{M^2 - L^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t'$$

且

$$\mathrm{d}r = \left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}r', \tag{33}$$

且

$$\theta = \theta', 和\ \phi = \phi',$$

于是,我们还能得到 GNT 解的另一种形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left[1 - 2\frac{M\left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{-\frac{1}{4}} r + \frac{M^2}{M^2 - L^2}L^2}{\left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 + \frac{M^2}{M^2 - L^2}L^2}\right] \\ &\times\left[\mathrm{d}t - 2\left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{\frac{3}{4}}L\cos\theta\mathrm{d}\phi\right]^2 \\ &- \left[1 - 2\frac{M\left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{-\frac{1}{4}} r + \frac{M^2}{M^2 - L^2}L^2}{\left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 + \frac{M^2}{M^2 - L^2}L^2}\right]^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &- \left[r^2 + \left(\frac{M^2}{M^2 - L^2}\right)^{\frac{3}{2}}L^2\right](\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2),\end{aligned} \tag{34}$$

其中我们已经作了变换 $r' \to r$ 和 $t' \to t$.

3. 扩展的 Kerr-NUT 解

现在,我们将 Ehlers 变换作用在 Kerr 解上,经过冗长的计算我们能得到

$$f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)(p^2x^2 + q^2y^2) + 2(\beta_1^2 - \beta_2^2)px - 4\beta_1\beta_2 qy + \beta_1^2 + \beta_2^2}, \tag{35}$$

$$\Phi = \frac{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(p^2x^2 + q^2y^2 + 2qy + 1) - 2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)px}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)(p^2x^2 + q^2y^2) + 2(\beta_1^2 - \beta_2^2)px - 4\beta_1\beta_2 qy + \beta_1^2 + \beta_2^2}, \tag{36}$$

$$\omega = \frac{2kq}{p}\frac{1 - y^2}{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}(2\beta_1\beta_2 qy - px - \beta_1^2 - \beta_2^2) - \frac{4\beta_1\beta_2 ky}{p}, \tag{37}$$

$$e^{2\gamma} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2 - y^2)}, \tag{38}$$

其中 α_1,α_2,β_1 和 β_2 仍然满足(18)式,即 $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1$.而参数 p 和 q 满足(7)式,即 $p^2 + q^2 = 1$.从(35)—(38)式可以看出此解包含 4 个自由参数.当参数满足(19)式,即 $\alpha_1 = \beta_1$,$\alpha_2 = \beta_2$ 时,我们可得到 Kerr-NUT 解.如果参数满足(20)式,即 $\alpha_1 = \beta_1$,$\alpha_2 = -\beta_2$,则我们可得到

$$f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(p^2x^2 + q^2y^2)\coth 2\varphi + 2px - 2qy\sinh 2\varphi + \coth 2\varphi}, \tag{39}$$

$$\omega = -\frac{2kq}{p}\frac{1 - y^2}{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}(qy\sinh 2\varphi - px - \coth 2\varphi) - \frac{2ky\sinh 2\varphi}{p}. \tag{40}$$

引进如下的 Boyer-Lindquist 坐标及相关的参数代换:

$$x \to \frac{r - M}{k}, y \to \cos\theta,$$

$$\coth 2\varphi \to \frac{M}{\sqrt{M^2 - L^2}}, \sinh 2\varphi \to \frac{L}{\sqrt{M^2 - L^2}},$$

$$p \to \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M}, q \to \frac{a}{M}, \tag{41}$$

且

$$k \to M\sqrt{\frac{M^2 - a^2}{M^2 - L^2}},$$

在(41)式的映射下,我们得到如下的度规线元:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\frac{\Delta\mathcal{G}}{u}\left[\mathrm{d}t - \left(a\sin^2\theta\frac{\mathcal{U} - \mathcal{G}}{\Delta^2 g} - \frac{2S}{\Delta}\cos\theta\right)\mathrm{d}\phi\right]^2 \\ &- \frac{\mathcal{U}}{\Delta}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathcal{K}} + \frac{\mathrm{d}\theta^2}{\Delta^2}\right) - \frac{\mathcal{U}\mathcal{K}}{\Delta^3\mathcal{G}}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \Delta^2(r^2 - 2Mr) + a^2\cos^2\theta - L^2, \\ \mathcal{U} &= \Delta^2 r^2 + a^2\cos^2\theta + L^2 - 2aL\cos\theta, \\ \mathcal{K} &= \Delta^2(r^2 - 2Mr) + a^2 - L^2. \end{aligned} \tag{43}$$

由(42)和(43)式容易看出当 $L = 0$ 时,此解可退化为 Kerr 解,这表明参数 M 和 a 分别表示引力源的质量和单位质量的角动量,并且参数 L 的量纲为质量量纲. 若 $a = 0$,此解能退化成扩展的 NUT-Taub 解(26).当我们考虑近似条件(28)式时,(43)式变成

$$\begin{aligned} &\mathcal{G} = r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta - L^2 \to G, \\ &\mathcal{U} = r^2 + a^2\cos^2\theta + L^2 - 2aL\cos\theta \to U, \\ &\mathcal{K} = r^2 - 2Mr + a^2 - L^2 \to K, S = L \to l. \end{aligned} \tag{44}$$

同时,新解(42)自然地退化成已知的 Kerr-NUT 解(10).可见,Kerr-NUT 解是(42)式的一个特例,故称解(42)为扩展的 Kerr-NUT 解(简写为 GKN).不过,这里应该注意,与已知的 Kerr-NUT 解(10)不同,这里参数 l 满足条件 $l \ll M$. 这表明 Kerr-NUT 解中所含的参数 l 并非能取任意值,它要受到引力源质量 M 的限制,即也要满足条件 $|l| \ll M$.

4. 结 论

通过将 Ehlers 变换作用在 Ernst 方程的 Schwarzschild 解和 Kerr 解上,并引入 Boyer-Lindquist 坐标变换以及相关的参数代换,我们分别得到了扩展的 NUT-Taub(GNT)解和扩展的 Kerr-NUT(GKN)解.当考虑近似条件(28)式时,这两个解能分别退化为 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解.本文中值得一提的是 NUT-Taub 和 Kerr-NUT 解是扩展解 GNT 和 GKN 在参数 $|L| \ll M$ 条件下的退化解. 这一结果表明 NUT-Taub 解和 Kerr-NUT 解中所含的参数 l 并非能任意取值,它的取值要受到引力源质量 M 的限制,即要求 $|l| \ll M$.文献[17]和[18]对参数 l 已做过大量的讨论,认为它具有引力磁单极的物理内涵,并对它作了一些观测效应的分析,如引力透镜效应等.本文中对该参数取值范围的限制,可能会影响到对观测效应的预言,对此问题我们将会做进一步的探讨.此外,与本文这两个扩展解相关的一些物理问题,如对该时空中类时和类光测地线以及与文献[20]相关内容等问题的研究,目前我们正在深入进行,力争尽快给出全面的研究结果.

[1] Ernst F J 1968 *Phy. Rev.* **167** 1175

[2] Kramer D *et al* 1980 *Exact Solution of Einstein's Field Equations* (Cambridge: Cambridge University Press)

[3] Geroch R 1971 *J. Math. Phys.* **12** 918

[4] Boyer R H and Lindquist R W 1967 *J. Math. Phys.* **8** 265

[5] Newman E T, Tamburino L and Unti T 1963 *J. Math. Phys.* **4** 918

[6] Wang Y J and Tang Z M 1990 *The Theory and Effects of Gravitation* (in Chinese) [王永久、唐智明,引力理论和引力效应(长沙:湖南科学技术出版社)]

[7] Wu Y B 1994 *Inter. J. Theor. Phys.* **33** 2415

[8] Gao Y J, Zhong Z Z and Gui Y X 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3155

[9] Liu L and Zhao Z 2004 *General Relativity* (in Chinese) [刘 辽、赵 峥,广义相对论(第二版)(北京:高等教育出版社)]

[10] Zhao Z 1999 *The Thermodynamical Properties of Black Holes and Singularities on Spacetime* (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)]

[11] Wu Y B and Gui Y X 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 165

[12] Zhao Z, Liu W B and Jiang Y L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 591 (in Chinese) [赵 峥、刘文彪、蒋亚铃 2000 物理学报 **49** 591]

[13] Wang Y J and Tang Z M 2001 *Chin. Phys.* **10** 679

[14] Gao Y J and Gui Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 420 (in Chinese) [高亚军、桂元星 2000 物理学报 **49** 420]

[15] Reina C and Treves A 1975 *J. Math. Phys.* **16** 834

[16] Carmeli M 1982 *Classical Field: General Relativity and Gauge Theory* (New York: Springer)

[17] Lynden B D and Nouri Z M 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 427

[18] Demianski M and Newman E 1966 *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.* **14** 653

[19] Wu Y B, Dong P, Deng X M and Zhao G M 2005 *J. Math. Phys.* **46** 5

[20] Ni W T 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 33

The two generalized solutions for the stationary axisymmetric vacuum garvitational field*

Wu Ya-Bo† Dong Peng Zhao Guo-Ming Deng Xue-Mei

(*Department of Physics, Liaoning NormalUniversity, Dalian* 116029, *China*)

(Received 6 February 2005; revised manuscript received 13 April 2005)

Abstract

In this paper by applying Ehlers transformation to Schwarzschild and Kerr solutions of Ernst equation and introducing the proper coordinate transformations, the two solutions of the Ernst equation, i.e., the so called generalized NUT-Taub (GNT) solution and generalized Kerr-NUT (GKN) solution are obtained, which not only can reduce to the well-known Schwarzschild and Kerr solutions when the parameter $L=0$, but also can also reduce to the NUT-Taub metric and Kerr-NUT metric respectively when the parameter $L \ll M$ and if taking $1-\left(\frac{L}{M}\right)^2 \approx 1$. It is showed that in the NUT – Taub and Kerr-NUT solutions the range of value for the parameter l (interpreted as the gravomagnetic monopole) can't be arbitrary and should be limited by mass of the source to $|l| \ll M$.

Keywords: Ehlers transformation group, Ernst equation, Boyer-Lindquist coordinate transformations

PACC: 0420C, 0420J, 0240

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10475036) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20032102).

† Corresponding author. E-mail: ybwu61@163.com