第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/4994-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.11, November, 2005

Clifford 代数中的双曲相位变换群及其在四维相对论时空中的应用*

吴亚波† 邓雪梅 赵国明 李 松 吕剑波 杨秀一

(辽宁师范大学物理系, 大连 116029)

(2005 年 3 月 15 日收到; 2005 年 4 月 4 日收到修改稿)

将 Clifford 代数所定义的双曲复空间 R_H 和作用在双曲复空间 R_H 上的双曲相位变换群 $U_4(H)$ 赋予了明确的物理意义. 双曲复空间 R_H 同构于四维 Minkowski 时空, 而其上的双曲相位变换群 $U_4(H)$ 就是四维相对论时空中的洛仑兹(Lorentz)变换群. 进一步, 利用 $U_4(H)$ 群的复合变换性质, 自然导出了四维 Minkowski 时空中 Lorentz 变换和速度变换的一般表达式. 由此, 将狭义相对论中的特殊 Lorentz 变换作为特例包含其中.

关键词: 双曲复数, 双曲相位变换, Minkowski 时空, Clifford 代数
PACC: 0330, 0200, 0220

1. 引 言

众所周知, 双曲复数作为阿贝尔复数中的一种, 在 19 世纪数学家们就已对它进行了广泛的研究, 但却很少将它直接应用于物理领域. 直到 1983 年, Kunstatter, Moffat 和 Malzan[1] 为解决非对称引力理论中的鬼极问题提出时空流形的度规应取双曲复数值, 这是人们第一次将双曲复数应用到物理学. 近年来双曲复数和双曲复群在物理学各领域中已有广泛应用[2—11], 其中 Hucks 讨论了双曲复结构在狭义相对论、Dirac 方程和弦理论中的应用, 而文献[6,7]研究了由双曲复数所构成的 Cifford 代数和双曲复数群的性质, 指出了双曲相位变换与 1 + 1 维 Minkowski 时空中 Lorentz 变换之间的关系. 本文在此基础上进一步探讨双曲复空间与四维相对论时空之间的内在联系, 并利用双曲相位变换群自然推导出四维 Minkowski 时空中 Lorentz 坐标变换和速度变换的一般表达式.

2. 双曲复空间与双曲相位变换群

对于四维实空间 R^4 中的点 (x^0, x^1, x^2, x^3) 相应的 Clifford 代数可定义为[5,12]

$$R_H = \{x^0 + \epsilon\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} = x^i\boldsymbol{e}_i, i = 1,2,3 : x^0, x^1, x^2, x^3 \in R, \epsilon^2 = 1\}, \tag{1}$$

这里称 R_H 为双曲复空间, ϵ 是双曲纯虚单位[5—7]. R_H 中的任一双曲复向量 ω 表示为 $\boldsymbol{\omega} = x^0 + \epsilon\boldsymbol{r}$.

定义 ω 的模长和幅角为

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\omega}) &= |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^*|^{1/2} = |x^{0^2} - \boldsymbol{r}^2|^{1/2} \\ &= |x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2}|^{1/2}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\theta = \operatorname{arctanh}\frac{r}{t}. \tag{3}$$

于是 ω 还可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\theta_0) &= s(\boldsymbol{\omega})\mathrm{e}^{\pm\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta_0} \\ &= s(\boldsymbol{\omega})(\cosh\theta_0 \pm \epsilon\boldsymbol{r}_0\sinh\theta_0), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\cosh\theta_0 = \frac{t}{S(\boldsymbol{\omega})}$, $\boldsymbol{r}_0\sinh\theta_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{S(\boldsymbol{\omega})}$. 若令 $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, 则 ω 可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = t + \epsilon\boldsymbol{r} = t + \epsilon(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z).$$

当 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^* = t^2 - \boldsymbol{r}^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0(<0, = 0)$ 时, 称 ω 为类时(类空、类光)向量. 设 $u(\theta)$ 为 R_H 双曲复空间上使 ω 转动 $\pm\theta$ 角的转动变换, 即

$$\boldsymbol{\omega}'(\theta') = u(\theta)\cdot\boldsymbol{\omega}(\theta_0) = \mathrm{e}^{\pm\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}(\theta_0).$$

这里规定沿逆时针转动 θ 角为正, 顺时针转动 θ 为

* 国家自然科学基金(批准号: 10475036)和辽宁省自然科学基金(批准号: 20032102)资助的课题.

† E-mail: zwyb@mail.dlptt.ln.cn.

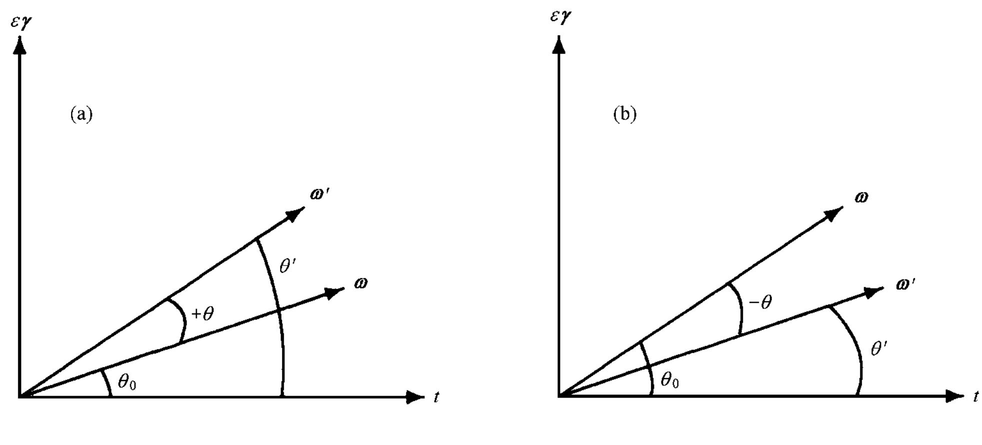

图 1

负(如图 1). 容易证明作用在 $\boldsymbol{\omega}$ 上的转动变换 $u(\theta) = e^{\pm\epsilon r\theta}$ 构成一个阿贝尔西群,称之为双曲相位变换群,用 $U_4(H)$ 表示. $U_4(H)$ 群具有如下性质:若 $u(\theta) = e^{\pm\epsilon r_0\theta} \in U_4(H)$,则

$$u(\theta) = \cosh\theta \pm \epsilon \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u(\theta) &= u(\theta_1) \cdot u(\theta_2) \\ &= u(\theta_1 + \theta_2) \\ &= u(\theta_2) \cdot u(\theta_1), \end{aligned} \tag{6}$$

$$u(\theta) \cdot u^*(\theta) = 1. \tag{7}$$

于是,任一双曲复向量 $\boldsymbol{\omega}(\theta_0) = t + \epsilon \boldsymbol{r} \in R_H$ 在 $u(\theta)$ 的作用下变为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}'(\theta') &= u(\theta) \cdot \boldsymbol{\omega}(\theta_0), \\ \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}'^* &= (u \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot (u \cdot \boldsymbol{\omega})^* \\ &= (u \cdot u^*)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^*) \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^*, \end{aligned}$$

即

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{8}$$

可见,双曲复空间 R_H 中任意向量 $\boldsymbol{\omega} = t + \boldsymbol{r}$ 与四维相对论(Minkowski)时空 M^4 中的任意向量 $r^\mu = (t, \boldsymbol{r})$(这里令光速 $c = 1$)之间存在一一对应关系,且满足 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^* = r^\mu r_\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. 由此说明这两个空间同构,即 $R_H \cong M^4$. 而 R_H 中保持

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^* = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

不变的双曲相位变换群 $U_4(H)$ 正是四维相对论(Minkowski)时空中的 Lorentz 变换群.

下面,利用 $U_4(H)$ 的群性质研究双曲复空间中向量 $\boldsymbol{\omega} = t + \epsilon \boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{\omega}' = t' + \epsilon \boldsymbol{r}'$ 之间的内在联系,从而自然导出四维时空中 Lorentz 坐标变换和速度变换的一般表达式.

3. 四维 Minkowski 时空中一般 Lorentz 变换的导出

如图 2 所示,设 Σ 和 Σ' 系相对于地面观察者分别是静止参考系和运动参考系. $\boldsymbol{v}$ 为 Σ' 系相对于 Σ 系运动速度,$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 分别为某运动质点 P 相对于 Σ 系和 Σ' 系的运动速度. 若该运动质点 P 在 Σ 和 Σ' 中的时空坐标分别为 $(t, \boldsymbol{r})$ 和 $(t', \boldsymbol{r}')$,则对应双曲复空间 R_H 中双曲复向量分别为 $\boldsymbol{\omega} = t + \epsilon \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\omega}' =$

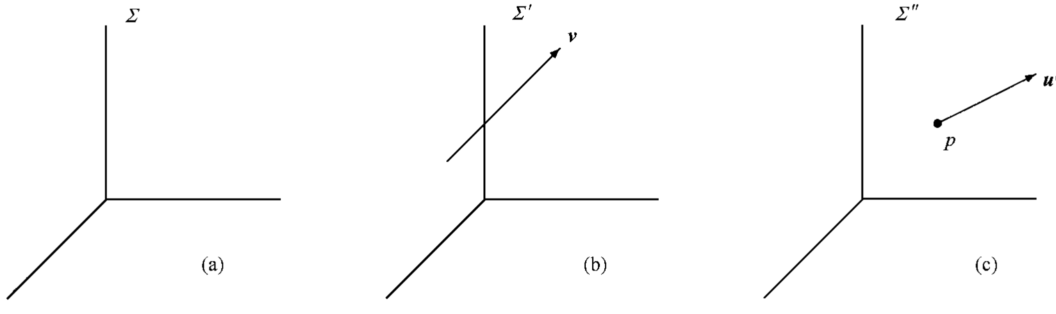

图 2

$t' + \epsilon \boldsymbol{r}'$. 由前面讨论可知，$\omega'$ 可通过 $u \in U_4(H)$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 的 $\pm\theta$ 转动而得到，即

$$\boldsymbol{\omega}' = u \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathrm{e}^{\pm \epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta} \boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

取 $u = \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta}$（将 $\boldsymbol{\omega}$ 顺时针转动），则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}' &= t' + \epsilon \boldsymbol{r}' = \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta} \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}) \\ &= (\cosh\theta - \epsilon \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta) \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}) \\ &= (t\cosh\theta - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta) \\ &\quad + \epsilon (\boldsymbol{r}\cosh\theta - t\boldsymbol{r}_0 \sinh\theta).\end{aligned} \tag{10}$$

于是得

$$t' = t\cosh\theta - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\cosh\theta - t\boldsymbol{r}_0 \sinh\theta, \tag{12}$$

其中 $\cosh\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{r}|^2}}$， $\boldsymbol{r}_0 \sinh\theta = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{r}|^2}}$.

若令 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{t}$，则

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma_v,$$

$$\boldsymbol{r}_0 \sinh\theta = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma_v \boldsymbol{v}. \tag{13}$$

这时(11)和(12)式变为

$$\begin{cases} t' = \gamma_v (t - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{r}' = \gamma_v (\boldsymbol{r} - t\boldsymbol{v}). \end{cases} \tag{14}$$

此关系式由双曲复空间 R_H 中双曲相位变换 $u \in U_4(H)$ 对任一双曲复向量 $\boldsymbol{\omega} \in R_H$ 的作用而得到，使得 $t'^2 - |\boldsymbol{r}'|^2 = t^2 - |\boldsymbol{r}|^2$ 成立. 但条件是 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{t}$，即 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 方向平行. 例如，若 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x$，则 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{t} = \dfrac{x}{t} \boldsymbol{e}_x = v\boldsymbol{e}_x$. 于是，由(14)式可得

$$\begin{cases} t' = \gamma_v (t - vx), \\ x' = \gamma_v (x - tv). \end{cases} \tag{15}$$

此式从几何上看描述了 R_H 空间中，双曲复向量 $\boldsymbol{\omega}'$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的坐标变换关系，但其物理意义却是 1 + 1 维相对论时空中的 Lorentz 坐标变换[7,9]. 不过，一般情况下 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 方向并非平行. 为不失一般性，在下面的讨论中，需将 $\boldsymbol{r}$ 分解为平行于 $\boldsymbol{v}$ 和垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的两个分量 $\boldsymbol{r}_\parallel$ 和 $\boldsymbol{r}_\perp$，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp, \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_\parallel = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel. \tag{17}$$

在此情况下，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= t + \epsilon \boldsymbol{r} \\ &= t + \epsilon (\boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp) \\ &= t + \epsilon \boldsymbol{r}_\parallel + \epsilon (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}' &= t' + \epsilon \boldsymbol{r}' \\ &= u \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= u \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}) \\ &= u \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}_\parallel + \epsilon \boldsymbol{r}_\perp) \\ &= u \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}_\parallel) + \epsilon u \cdot \boldsymbol{r}_\perp \\ &= u \cdot (t + \epsilon \boldsymbol{r}_\parallel) + \epsilon \boldsymbol{r}_\perp \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta_v} \left(t + \epsilon \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) + \epsilon \left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) \\ &= (\cosh\theta_v - \epsilon \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta_v) \cdot \left(t + \epsilon \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) \\ &\quad + \epsilon \left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right).\end{aligned} \tag{19}$$

整理可得

$$\begin{cases} t' = \gamma_v (t - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma_v - 1) \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} - \gamma_v \boldsymbol{v} t, \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\gamma_v = \cosh\theta_v = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$，$\boldsymbol{r}_0 \sinh\theta_v = \gamma_v \boldsymbol{v}$. 关系式(20)正是四维 Minkowski 时空中 Lorentz 坐标变换的一般表达式[13,14].

设 Σ'' 是相对于运动质点 p 静止的参考系，质点 p 的时空坐标为$(t'', \boldsymbol{r}'')$，则与此相对应的双曲复向量为 $\boldsymbol{\omega}'' = t'' + \epsilon \boldsymbol{r}''$. 同理，$\boldsymbol{\omega}''$ 可通过双曲相位变换 $u \in U_4(H)$ 对 $\boldsymbol{\omega}'$ 的作用而得到，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}'' &= u \cdot \boldsymbol{\omega}' \\ &= u \cdot (t' + \epsilon \boldsymbol{r}') \\ &= u \cdot [t' + \epsilon (\boldsymbol{r}'_\parallel + \boldsymbol{r}'_\perp)] \\ &= u \cdot (t' + \epsilon \boldsymbol{r}'_\parallel) + \epsilon u \cdot \boldsymbol{r}'_\perp \\ &= u \cdot (t' + \epsilon \boldsymbol{r}'_\parallel) + \epsilon \boldsymbol{r}'_\perp \\ &= u \cdot (t' + \epsilon \boldsymbol{r}'_\parallel) + \epsilon (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'_\parallel),\end{aligned}$$

取

$$u = \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta_{\mu'}} = \cosh\theta_{\mu'} - \epsilon \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta_{\mu'},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}'' &= t'' + \epsilon \boldsymbol{r}'' \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0 \theta_{\mu'}} \left(t' + \epsilon \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) + \epsilon \left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) \\ &= (\cosh\theta_{\mu'} - \epsilon \boldsymbol{r}_0 \sinh\theta_{\mu'}) \left(t' + \epsilon \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right) \\ &\quad + \epsilon \left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} \right).\end{aligned} \tag{21}$$

联立(20)和(21)式，得

$$\begin{cases} t'' = \gamma_{\mu'}\gamma_v\left[t - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} + \dfrac{(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{v^2} + (\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v})t\right], \\ \boldsymbol{r}'' = \gamma_{\mu'}\gamma_v\left[\boldsymbol{u}'t + \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v} - t\boldsymbol{v}\right] + \boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{r}, \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\cosh\theta_{\mu'} = \gamma_{\mu'} = \sqrt{\dfrac{1}{1-u'^2}}$，$\boldsymbol{r}_0\sinh\theta_{\mu'} = \gamma_{\mu'}\boldsymbol{u}'$，$\boldsymbol{u}'$ 是运动质点 P 相对 Σ' 系的运动速度．进一步，利用双曲相位变换群 $U_4(H)$ 的复合变换特性(6)，容易得到

$$\begin{aligned} \omega'' &= u(-\theta_{\mu'})\cdot\boldsymbol{\omega}' \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta_{\mu'}}\cdot\boldsymbol{\omega}' \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta_{\mu'}}\mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta_{v}}\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0(\theta_{\mu'}+\theta_v)}\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathrm{e}^{-\epsilon \boldsymbol{r}_0\theta_{\mu}\cdot\omega} \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot(t+\epsilon\boldsymbol{r}) \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot[t+\epsilon(\boldsymbol{r}_\parallel+\boldsymbol{r}_\perp)] \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot(t+\epsilon\boldsymbol{r}_\parallel) + \epsilon u(-\theta_\mu)\cdot\boldsymbol{r}_\perp \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot(t+\epsilon\boldsymbol{r}_\parallel) + \epsilon\boldsymbol{r}_\perp \\ &= u(-\theta_\mu)\cdot(t+\epsilon\boldsymbol{r}_\parallel) + \epsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\parallel) \\ &= (\cosh\theta_\mu - \theta\sinh\theta_\mu)\left(t+\epsilon\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v}\right) \\ &\quad + \epsilon\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

进一步化简得

$$\begin{cases} t'' = \gamma_\mu\left[t - \dfrac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}{v^2}\right], \\ \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r} + (\gamma_\mu - 1)\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{v^2}\boldsymbol{v} - \gamma_\mu\boldsymbol{u}t, \end{cases} \tag{24}$$

其中 $\cosh\theta_\mu = \gamma_\mu = \sqrt{\dfrac{1}{1-u^2}}$，$\boldsymbol{r}_0\sinh\theta_\mu = \gamma_\mu\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 是质点 P 相对 Σ 系的运动速度．进一步由(22)和(23)式，并经过冗长的计算可得

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + (\gamma_v - 1)\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v} - \gamma_v\boldsymbol{v}}{\gamma_v(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}, \tag{25}$$

这里 $\gamma_v = \sqrt{\dfrac{1}{1-v^2}}$，$\boldsymbol{v}$ 是 Σ' 系相对 Σ 系的运动速度．此式正是四维 Minkowski 时空中 Lorentz 速度变换的一般表达式[13,14]．不过它是通过利用双曲复空间中双曲相位变换群 $U_4(H)$ 的复合性质而自然导出．

4. 讨　论

在特殊条件下，即当 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{\gamma} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ 时，(20)式化简为

$$\begin{cases} t' = \gamma_v(t - vx), \\ x' = \gamma_v(x - vt), \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases} \tag{26}$$

而(25)式化简为

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v}, \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma_v(1 - u_x v)}, \\ u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma_v(1 - u_x v)}. \end{cases} \tag{27}$$

容易看出(26)和(27)式正是大家熟知的四维 Minkowski 时空中特殊的 Lorentz 变换关系式[13]．

5. 结　论

在 Clifford 代数所定义的双曲复空间 R_H 中，保持任意双曲复向量 $\boldsymbol{\omega} = t + \epsilon\boldsymbol{r} \in R_H$ 模长 $|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^*|^{1/2} = |t^2 - \boldsymbol{r}^2|^{1/2}$ 不变的变换，构成了一个阿贝尔西群，这里称其为双曲相位变换群 $U_4(H)$．从物理意义上看，该群 $U_4(H)$ 正是四维 Minkowski 时空中的 Lorentz 变换群．进一步，利用 R_H 空间中 $U_4(H)$ 群的复合变换性质，自然导出了四维 Minkowski 时空中的一般 Lorentz 速度变换关系式．由此，将几何上的双曲复空间和双曲复群赋予了明确的物理意义．

[1] Kunstatter G，Moffat J W and Malzan J 1983 *J. Math. Phys.* **24** 88
[2] Zhong Z Z 1985 *J. Math. Phys.* **26** 258
[3] Wu Y B and Gui Y X 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 165
[4] Moffat J W 2000 *Phys. Lett.* B **491** 345

[5] Hucks J 1993 *J. Math. Phys.* **24** 5987

[6] Li W M 2000 *Journal of Liaoning Normal University* **23** 356 (in Chinese) [李武明 2000 辽宁师范大学学报 **26** 356]

[7] Wu Y B and Shao Y 2003 *Journal of Liaoning Normal University* **26** 139 (in Chinese) [吴亚波、邵 颖 2003 辽宁师范大学学报 **26** 139]

[8] Gao Y J and Gui Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 420 (in Chinese) [高亚军、桂元星 2000 物理学报 **49** 420]

[9] Wei Y H 2001 *Class. Quan. Grav.* **18** 2163

[10] Wu Y B, Shao Y and Dong Peng 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2846 (in Chinese) [吴亚波、邵 颖、董 鹏 2004 物理学报 **53** 2846]

[11] Wu Y B, Li J L and Li L 2001 *Chin. Phys.* **11** 220

[12] William E and Baylis 1996 *Mathematics and Engineering* (Boston: Birkbouser) 1—4

[13] Jackson J D 1976 *Classical Electrodynamics* (John Wiley Sons) 55—67

[14] Wald R M 1983 *General Relativity* (Chicago: University of Chicaga Press)

Hyperbolic phase transformation group and its applicaton to four-dimensional relativistic spacetime*

Wu Ya-Bo† Deng Xue-Mei Zhao Guo-Ming Li Song Lü Jian-Bo Yang Xiu-Yi

(*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)

(Received 15 March 2005; revised manuscript received 4 April 2005)

Abstract

The hyperbolic complex space R_H defined by the Clifford algebra and the hyperbolic phase transformation group $U_4(H)$ acting on R_H are endowed with definite physical meaning in this paper. The hyperbolic complex space R_H is isomorphic to the 4-dimensional (4D) Minkowski spacetime, and the hyperbolic phase transformation group $U_4(H)$ in R_H is just Lorentz transformation group on 4D relativistic spacetime. Furthermore, the general expressions of Lorentz transformation and the velocity transformation on 4D Minkowski spacetime are naturally derived using the composite transformations of the group $U_4(H)$. Hence, the well-known special Lorentz transformation in the special relativity (SR) is contained as a special case in our discussions.

Keywords: hyperbolic complex numbers, hyperbolic phase transformation, Minkowski spacetime, Clifford algebra

PACC: 0330, 0200, 0220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10475036) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province (Grant No. 20032102).

† E-mail: zwyb@mail.dlptt.ln.cn.