

# 延迟-非线性反馈控制混沌

于洪洁<sup>†</sup>

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

(2005 年 3 月 9 日收到, 2005 年 4 月 4 日收到修改稿)

提出了基于稳定性准则的延迟非线性反馈控制混沌的方法, 即 SC 延迟非线性反馈控制法. 通过对混沌系统的适当分离, 得到一个特殊的非线性函数, 并利用混沌输出信号与其延迟信号的非线性函数的差, 构造了连续反馈输入干扰, 以控制混沌轨到某一期望的不稳周期轨上. 该方法继承了延迟反馈控制方法的优点, 实现了自-控制过程. 另外由于该方法基于线性系统的稳定性准则, 保证了控制的有效性. 控制过程可随时开始, 具有简便、灵活性. 给出耦合 Duffing 振子的例子, 数值模拟结果显示了 SC 延迟反馈方法控制的有效性.

关键词: 稳定性准则, 混沌控制, 延迟反馈, 干扰

PACC: 0545

## 1. 引 言

20 多年来, 混沌控制和同步问题的研究已得到越来越广泛的关注<sup>[1-5]</sup>. 由 Ott, Grebogi 及 Yorke 开始研究的混沌控制问题是很有吸引力的课题<sup>[1]</sup>, 他们建议一个方法( OGY 方法), 以稳定嵌入在混沌吸引子内的不稳周期轨, 该方法对系统外部可调参数, 制作一个与时间相关的小干扰, 以反馈的形式输入, 就能实现控制过程. 其后有许多关于 OGY 方法的扩展及不同的控制混沌方法被开发<sup>[6-12]</sup>. 混沌控制方法已被应用到许多实际系统<sup>[13-18]</sup>.

具有混沌行为的非线性系统对初始条件是很敏感的. 尤其是在具有大 Lyapunov 指数的系统, 小的误差会随时间呈指数放大, 导致控制过程的失效. 这样的误差可能通过非线性系统的线性化、试验测量的不精确和噪声环境而引入. 以往的许多混沌控制方法是在 Poincaré 映射的每个周期修正一次控制参数. 只有一些系统的不稳周期轨能实现稳定过程, 那就是其最大 Lyapunov 指数比参数改变的时间间隔的倒数更小. 对于控制具有大 Lyapunov 指数和高阶不稳周期轨的系统, 小的误差会将系统“踢出”它的可控范围, 噪声波动将导致振荡爆发进入距离期望周期轨较远的范围, 并且那些爆发对大的噪声

将是更频繁的. 因此在这个背景下, 比每个周期  $T$  一次更频繁地调整参数及时间-连续控制的想法似乎更有吸引力.

Pyragas 于 1992 年提出了通过小的时间连续干扰线性反馈控制混沌的两个方法, 一个方法利用了特别设计的外部振子反馈控制混沌, 另一个方法就是没有任何外力的延迟自反馈控制法. 延迟反馈控制法( delay feedback control, DFC)的主要思想是, 利用系统输出信号的一部分经过延迟时间反馈到系统中去, 以代替外部输入. 避免了对目标轨道的确定, 只需预先获得期望不稳周期轨( UPO)的周期, 利用延迟偏差信号稳定混沌系统自身嵌入的 UPO 轨道, 并不改变 UPO 轨道的相关属性, 所需控制能量小. DFC 控制利用持续时间激励, 与 OGY 方法相比, 有助于抑制噪声. Pyragas 利用延迟反馈法从实验上对其设计的二极管共振器中的混沌实现了稳定控制<sup>[19]</sup>.

Yu 和 Liu 于 1994 年提出一个连续-时间非线性干扰反馈的混沌控制方法<sup>[5]</sup>. 基于线性系统的稳定性准则, 保证了这个方法的有效性, 因此称稳定性准则方法( SC control method). 该方法以非线性反馈形式构造一个时间-连续干扰输入. SC 控制方法不要求系统在所要稳定周期轨附近的线性化及计算在不稳周期轨的导数, 也不需要计算 UPO 的最大

\* 国家自然科学基金(批准号: 10272074, 10572086)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yuhongjie@sjtu.edu.cn

Lyapunov 指数,以分析系统的局部稳定性及确定控制参数的范围.这个方法可以随时开启控制过程,而不必如 OGY 等方法要求混沌轨非常靠近 UPO 时才能实施控制,适于高阶周期轨的稳定控制.本文发展了 SC 混沌控制方法,用输出信号的延迟信号代替从外部振子输入的 UPO,我们称为基于稳定性准则的延迟非线性反馈控制方法(SC Delay Nonlinear Feedback Control Method).本文给出耦合 Duffing 振子混沌控制的典型例子,方法的有效性通过数值模拟显示.

## 2. SC(stability criterion) 延迟非线性反馈控制方法

考虑一个连续时间非线性动力系统,具有输入信号干扰,如下描述:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) + u(t), \quad (1)$$

式中  $x \in R^n$  和  $u \in R^n$  分别是系统的状态向量和输入干扰.在没有输入干扰的情况下( $u = 0$ ),系统有一个混沌吸引子  $\Omega$ .适当分离函数  $f(x(t), t)$ ,

$$f(x(t), t) = g(x(t)) + h(x(t), t), \quad (2)$$

式中  $g(x(t)) = Ax(t)$  被适当地分离为函数  $f(x(t), t)$  的线性项,要求矩阵  $A$  是一个常数满秩矩阵,并且  $A$  的所有特征值都具有负实部.因此函数  $h(x(t), t) = f(x(t), t) - Ax$  是函数  $f(x(t), t)$  的非线性项.此时系统(1)可被重新写作

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + h(x(t), t) + u(t). \quad (3)$$

令  $D(x(t), t) = -h(x(t), t)$ , 可以看到  $f + D = f - h$  是关于状态  $x$  的一个线性形式,即

$$(f + D)(x) = Ax. \quad (4)$$

$u(t)$  被考虑为一个控制干扰信号,构造如下:

$$u(t) = \alpha [D(x(t)) - D(x(t-\tau))], \quad (5)$$

$\tau$  是延迟时间,  $x(t-\tau)$  为延迟的输出信号,  $\alpha$  是输入强度因子,是一个常数.如果延迟时间与混沌吸引子内的不稳周期  $-j$  轨的周期一致,即  $\tau = jT$  ( $j = 1, 2, \dots$ ),那么对系统(1)的与这个 UPO(不稳周期轨)相应的解  $x(t) = x(t-jT)$  来说,此时方程(1)中的干扰信号  $u(t)$  变成零.这意味着(5)式定义的扰动  $u(t)$  不会改变系统(1)的不稳周期  $-j$  轨的解.来看一下误差方程的发展

$$\dot{x} - \dot{x}(t-\tau) = Ax - Ax(t-\tau) + (\alpha - 1) [D(x) - D(x(t-\tau))], \quad (6)$$

定义误差为  $e(t) = x(t) - x(t-\tau)$ , 当  $e(t)$  充分小时,其变化规律近似用线性方程表示为

$$\dot{e}(t) = \left[ A + (\alpha - 1) \frac{\partial D}{\partial x} \right] e, \quad (7)$$

$e(t)$  的零点是一个平衡点,当  $\alpha = 1$  时,因为雅克比矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部,按照线性系统的稳定性准则,误差  $e(t)$  的零点是渐进稳定的,当  $t \rightarrow \infty$ ,  $e(t)$  趋于零.此时状态向量  $x(t)$  趋于周期  $-j$  轨线  $x(t-\tau)$ ,  $\tau = jT$  ( $j = 1, 2, \dots$ ),意味着不稳周期轨被稳定了.当所控制系统的状态收敛于 UPO 时,干扰  $u(t)$  收敛于零.当输入强度因子  $\alpha \neq 1$  时,需要计算方程(7)的 Lyapunov 指数,若同步状态具有稳定性,则条件 Lyapunov 指数均为负值.

一些复杂的受周期驱动的系统,和 UPO 在一起的可能还会有多个稳定解属于初始条件的不同吸引盆.此外,一些实验也不希望有干扰的大初始值.为避免这样的情况出现,可给出干扰的限制条件来解决此类问题.通过小的输入值实现混沌轨的控制过程,方程(5)被修正如下:

$$u(t) = \begin{cases} D(x(t)) - D(x(t-\tau)) & |x - x(t-\tau)| \leq \epsilon, \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad (8)$$

式中  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) 误差的限制值,当  $|x - x(t-\tau)| \leq \epsilon$ , 干扰  $u \neq 0$ .这里称本文基于线性系统稳定性准则的延迟反馈扰动控制方法为 SC 延迟非线性反馈干扰方法,其示意方块图见图 1.该方法在实验上易于实行,它不需要为实现稳定 UPO 而设计一个特殊的外部振子,利用输出信号与延迟输出信号的非线性函数差反馈给输入来实现控制,干扰  $u(t)$  是以非线性反馈的形式输入的,这个反馈构成了自控制信号.这里注意到只要能够适当分离系统(1),满足雅克比矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部,就能基于稳定性准则,实现不稳周期轨的稳定.而且如(8)式显示,干扰  $u(t)$  的形式是简单的,不需要计算 UPO 的

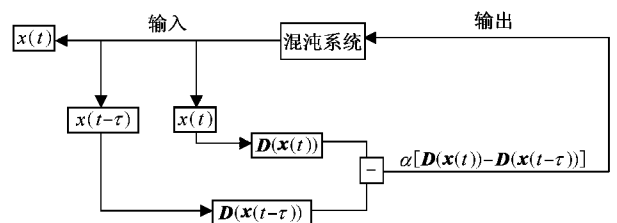


图 1 SC 延迟非线性反馈控制方块图

导数  $df/dx$  ,如在开-闭环(OPCL)方法里要求的导数,也不要求用数值方法或实验方法估计不稳周期轨.

### 3. 延迟非线性反馈控制耦合 Duffing 振子的混沌运动

将 SC 延迟非线性反馈方法应用到非自治高维混沌系统,这里考虑两个耦合 Duffing 振子组成的非自治混沌系统,描述如下:

$$\ddot{\xi} + a\dot{\xi} + \xi^3 = \eta + b \cos t, \tag{9}$$

$$\ddot{\eta} + c\dot{\eta} + \eta^3 = \xi.$$

第一个振子受外部周期力驱使,两个振子通过  $\xi$  和  $\eta$  相互作用,当参数取  $a = 0.2, b = 10.0, c = 0.45$  时,数值积分方程(9),可显示耦合 Duffing 振子的混沌行为,如图 2(a)-(c),分别在 2D 子空间  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_1, x_3)$  显示 Duffing 振子的混沌吸引子. 令  $x_1 = \xi, x_2 = \dot{\xi}, x_3 = \eta$  及  $x_4 = \dot{\eta}$ ,重写方程

(9),即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - x_1^3 + x_3 + b \cos t, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - cx_4 - x_3^3. \end{aligned} \tag{10}$$

按照方程(2),我们适当分解函数  $f(x(t), t)$  为

$$f(x, t) = Ax - D(x, t)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -x_1 \\ x_1^3 - b \cos t \\ -x_3 \\ -x_1 + x_3^3 \end{Bmatrix},$$

式中矩阵  $A$  的特征值为  $(-1, -a, -1, -c)$ ,均为负实数. 按照(8)式,以下输入干扰被构造去稳定嵌

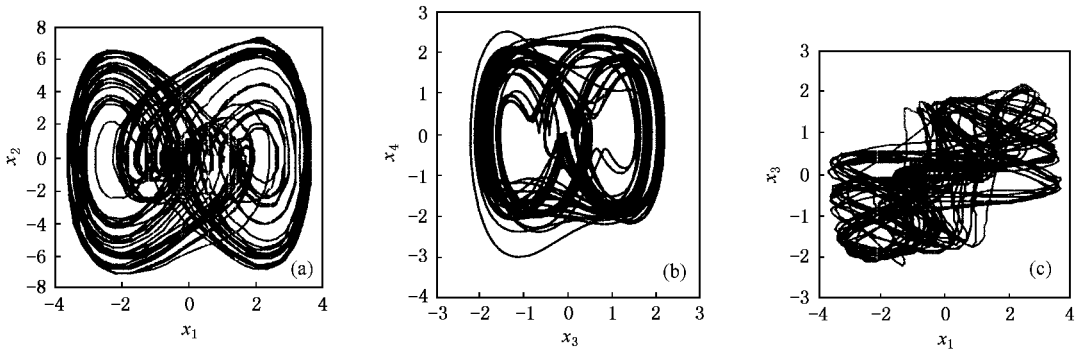


图 2 耦合 Duffing 振子分别在子空间  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_1, x_3)$  的混沌吸引子

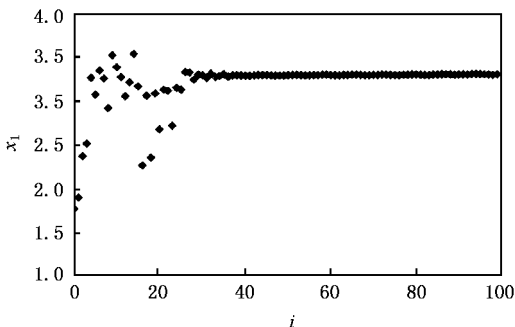


图 3 混沌轨  $x_1$  稳定在周期 -1 轨的 Poincaré 映射

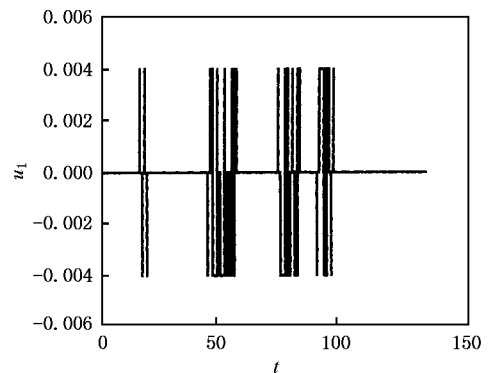


图 4 干扰  $u_1(t)$  的时间历程图

入在方程 (10) 混沌吸引子内的周期 -1 轨 :

$$u(t) = D(x) - D(x(t-\tau))$$

$$= \begin{cases} -x_1(t) + x_1(t-\tau) \\ x_1^3(t) - x_1^3(t-\tau) \\ -x_3(t) + x_3(t-\tau) \\ -x_1(t) + x_3^3(t) + x_1(t-\tau) - x_3^3(t-\tau) \end{cases}$$

$$|x - x(t-\tau)| \leq \varepsilon,$$

= 0 其他.

图 3 至图 6 显示了利用 SC 延迟反馈方法控制混沌轨到不稳周期 -1 轨的稳定结果, 限制条件  $\varepsilon =$

0.06, 初始值  $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 1.0, x_3(0) = 0.1, x_4(0) = 0.1$ . 当  $|x - x(t-\tau)| \leq \varepsilon, \tau = T = 2\pi$ , 输入刺激信号  $u \neq 0$  起到控制调节作用. 图 3 为利用 Poincaré 映射显示混沌轨  $x_1(t = iT)$  很快稳定在周期 -1 轨道上的过程,  $i$  为 Poincaré 映射步,  $t = iT, i = 1, 2, \dots$ . 图 4 是控制干扰  $u_1(t)$  的时间历程图, 在混沌轨稳定到周期 -1 轨道上以后,  $u_1(t)$  趋于零. 图 5(a)~(c) 是混沌轨线在投射平面  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_1, x_3)$  稳定到周期 -1 轨线上的轨迹图.

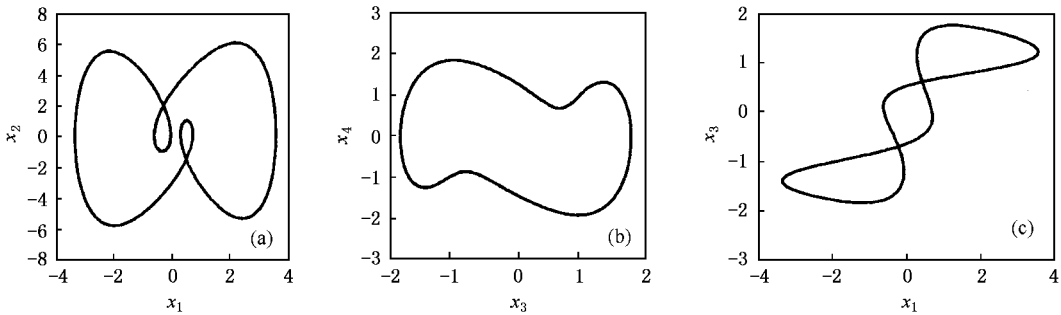


图 5 混沌轨线在投射平面  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_1, x_3)$  稳定到周期 -1 轨线上的轨迹图 (a) 在投射平面  $(x_1, x_2)$ ; (b) 在投射平面  $(x_3, x_4)$  (c) 在投射平面  $(x_1, x_3)$

## 4. 结 论

在 SC 混沌控制方法的基础上, 提出了基于稳定性准则的延迟非线性反馈控制混沌的方法, 即 SC 延迟非线性反馈控制法. 通过对混沌系统的适当分离, 得到一个特殊的非线性函数, 并利用混沌输出信号与其延迟信号的非线性函数的差, 构造了连续反馈输入干扰, 以控制混沌轨到某一期望的不稳周期

轨上. 该方法继承了延迟反馈控制方法的优点, 只需要提供期望 UPO 轨道的周期, 并不需要外部振子提供 UPO 的详细信息, 是自-控制过程. 同时由于该方法基于线性系统的稳定性准则, 同步误差发展方程是渐进稳定的, 保证了控制的有效性. 控制过程可随时开始, 具有简便、灵活性. 给出耦合 Duffing 振子的例子, 数值模拟结果显示了 SC 延迟非线性反馈方法控制的有效性.

- [1] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Pecora L M and Carrol T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [4] Yu H J and Liu Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **314** 292
- [5] Yu H J and Liu Y Z 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066203
- [6] Ushio T 1995 *Phys. Lett. A* **198** 14
- [7] Gao J F, Luo X J et al 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1618 (in Chinese) [高金峰、罗先觉等 1999 物理学报 **48** 1618]
- [8] Shinbrot T, Grebogi C, Ott E and Yorke JA 1993 *Nature* **363** 411
- [9] Yu H J and Lu H X 2003 *Journal of Dalian University of Technology* **43** 132 (in Chinese) [于洪洁、吕和祥 2003 大连理工大学学报 **43** 132]
- [10] Yu H J and Lu H X 2003 *Journal of Vibration Engineering* **16** 212 (in Chinese) [于洪洁、吕和祥 2003 振动工程学报 **16** 212]
- [11] Atlee Jackson E and Grosu I 1995 *Physica D* **85** 1
- [12] Gu C M and Shen K 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 732 (in Chinese) [顾春明、沈柯 1998 物理学报 **47** 732]
- [13] Hunt E R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1953
- [14] Garfinkel A, Spano ML, Ditto WL and Weiss J 1992 *Science* **257** 1230
- [15] Schiff S J, Jerger K, Duong DH et al 1994 *Nature* **370** 615
- [16] Yu H J and Lu H X 2002 *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **38** 91 (in Chinese) [于洪洁、吕和祥 2002 机械工程学报 **38** 91]

- [ 17 ] Huang L Y , Luo X S , Fang J Q *et al* 2005 *Acta . Phys . Sin .* **54** 543 ( in Chinese ) [ 黄良玉、罗晓曙、方锦清 等 2005 物理学报 **54** 543 ]
- [ 18 ] Gao X and Yu J B 2005 *Chin . Phys .* **14** 908
- [ 19 ] Pyragas K and Tamasevicius A 1993 *Phys . Lett . A* **180** 99

## Controlling chaos using time-delay nonlinear feedback \*

Yu Hong-Jie

( *Department of Mechanics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China* )

( Received 9 March 2005 ; revised manuscript received 4 April 2005 )

### Abstract

A method of chaos control using time-delay nonlinear feedback based on stability criterion is proposed. By a suitable separation of the chaotic system , a special nonlinear function is obtained. We use the difference of nonlinear functions of the chaotic output signal and its delayed output signal to construct a continuous feedback input perturbation. The method can stabilize chaotic systems to a desired periodic orbit without using any external force. The method retains the advantages of performing the self-control via delayed feedback control method. Besides , the validity of control is ensured due to the stability criterion. The control can be started at any moment , and it is convenient and flexible. The coupled Duffing oscillator is given as numerical examples. The results of numerical simulation show the validity of the method.

**Keywords** : stability criterion , chaos control , delayed feedback , perturbation

**PACC** : 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10272074 and 10572086 ).