

混沌系统的速度反馈同步*

陶朝海¹⁾ 陆君安²⁾

¹⁾(重庆邮电学院计算机科学与技术学院 重庆 400065)

²⁾(武汉大学数学与统计学院 武汉 430072)

(2005年4月29日收到 2005年6月6日收到修改稿)

从线性反馈同步、广义同步、耦合同步三个方面讨论了混沌系统的速度反馈同步,计算了速度反馈同步所需要满足的反馈系数的条件,并与一般意义下的位移反馈同步系数进行了比较,结果表明速度反馈系数均大幅度减小,从而降低了同步的复杂度和代价。数值仿真表明了该方法有效可行。

关键词:混沌,反馈,同步,最大 Lyapunov 指数

PACC:0545

1. 引言

自从 1963 年 Lorenz 发现混沌吸引子^[1]以来,混沌动力学作为非线性科学的一个重要分支引起了广大科学技术人员的高度重视。由于混沌具有初值敏感性,人们普遍认为混沌同步非常困难,直到 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了驱动响应同步方法^[2],使 Lorenz 混沌系统能够实现同步,混沌同步理论和应用才迅速成为一个新的研究热点^[2-12]。近年来,由于混沌同步在保密通信信号处理电路设计等领域表现出强劲的应用前景,各国科学家和工程师高度重视并投入到这一研究领域中来,使得混沌同步理论和试验得到了蓬勃发展。

除了驱动响应同步方法外,人们还讨论了反馈同步、相同步、脉冲同步、自适应同步等方法,文献[3]讨论了混沌系统的速度反馈控制问题。本文来分析一下速度反馈同步。利用负反馈的思想,通常将驱动系统的输出变量和响应系统的输出变量的差乘以相应的系数作为反馈项加在响应系统相应的方程的右边,从物理学的角度看,我们称之为位移反馈同步。如果将驱动系统的输出变量的导数和响应系统的输出变量的导数的差乘以相应的系数作为反馈项加在响应系统相应的方程的右边,我们称之为速度反馈同步。

1999 年 Chen 发现了一个与 Lorenz 系统类似但不拓扑等价的混沌系统——Chen 系统^[4]。2002 年 Lü 等提出一种新的混沌系统——统一混沌系统^[5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 25\alpha)x + (29\alpha - 1)y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ 是参数。根据 Vaněček 和 Čelikovský 的定义^[6], $\alpha \in [0, 0.8]$ 时系统属于广义的 Lorenz 系统,满足条件 $a_{12}a_{21} > 0$; $\alpha \in (0.8, 1]$ 时系统属于广义的 Chen 系统,满足条件 $a_{12}a_{21} < 0$; 而 $\alpha = 0.8$ 情形正处于上述两者之间,与 Lü 吸引子对应。系统(1)具有良好的动力学性质且具有较强的代表性。本文以统一混沌系统为研究模型,从线性反馈同步、广义同步、耦合同步三个方面来探讨速度反馈同步。

2. 速度反馈同步

2.1. 线性反馈同步

设驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x + (29\alpha - 1)y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z. \end{cases} \quad (2)$$

* 重庆邮电学院青年教师基金(批准号:A2004-17)资助的课题。

† E-mail: mathtch@163.com

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{u} = (25\alpha + 10)(v - u), \\ \dot{v} = (28 - 35\alpha)u + (29\alpha - 1)v - uv - k(\dot{u} - \dot{x}), \\ \dot{w} = uv - \frac{8 + \alpha}{3}w. \end{cases} \quad (3)$$

当反馈系数 k 满足一定的条件时响应系统(3)与驱动系统(2)实现同步,即 $u - x \rightarrow 0, v - y \rightarrow 0, w - z \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$.

由于从理论上证明统一混沌系统速度反馈同步需要涉及到混沌系统的边界估计问题,而混沌系统的一个重要性质就是系统的最大 Lyapunov 指数大于 0,当响应系统和驱动系统实现同步时,响应系统的最大 Lyapunov 指数为负,故当响应系统的最大 Lyapunov 指数趋近于 0 时是实现混沌同步的上极限,从而得到相应的反馈系数的下极限.本文采用计算响应系统的最大 Lyapunov 指数来得到反馈系数的取值范围.当然,响应系统的最大 Lyapunov 指数小于 0 只是实现同步的必要条件.鉴于系统参数的代表性,本文只考虑 $\alpha = 0, \alpha = 0.8, \alpha = 1$ 这三种情形,如表 1.

表 1 显示了反馈系数 k 的下极限 $k_0(\alpha)$ 与驱动系统最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 的关系

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k_0(\alpha)$	0.94	0.40	0.40
$\lambda(\alpha)$	0.90	2.36	2.04

如果系统采用一般意义上的线性反馈同步,即所谓的线性位移反馈同步,其响应系统为

$$\begin{cases} \dot{u} = (25\alpha + 10)(v - u), \\ \dot{v} = (28 - 35\alpha)u + (29\alpha - 1)v - uv - k(v - y) \\ \dot{w} = uv - \frac{8 + \alpha}{3}w. \end{cases}$$

此时,其反馈系数的下极限为下表.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k_0(\alpha)$	2.44	4.08	3.94

很显然采用速度反馈同步时反馈系数的下极限低于位移反馈同步的反馈系数的下极限,从而降低了实现同步的代价(图 1).

2.2. 广义速度反馈同步

设驱动系统为 $\dot{X} = f(X)$, 响应系统为 $\dot{Y} = g(X, Y)$, 其中 $X \in R^n, Y \in R^m, f: R^n \rightarrow R^n, g: R^n \times R^m \rightarrow R^m$. 如果响应系统输出 $Y(t)$ 由驱动信号 $X(t)$

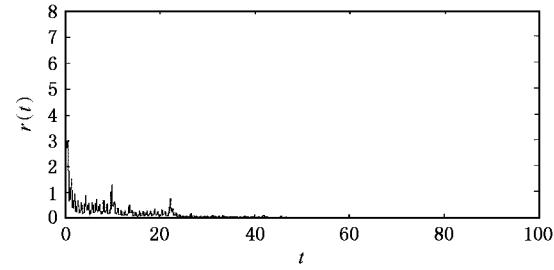


图 1 显示当 $\alpha = 0, k = 4$ 时响应系统(3)与驱动系统(2)实现同步的误差(其中

$$r(t) = \sqrt{(u(t) - x(t))^2 + (v(t) - y(t))^2 + (w(t) - z(t))^2}$$

唯一确定,即满足 $Y = \varphi(X)$, 则这两个混沌态处于广义同步状态. 判断是否实现广义混沌同步的有效方法之一就是建立一个与响应系统完全相同的辅助系统 $\dot{Z} = g(X, Y)$, 并用同样的信号 $X(t)$ 去驱动它, 则 $Y(t)$ 与 $X(t)$ 之间实现稳定广义混沌同步的充要条件是

$$Z(t) - Y(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty).$$

对于驱动系统(2), 构造响应系统(3)和

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)y_1 \\ \quad - x_1 z_1 - k(\dot{x}_1 - \dot{x}), \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \frac{8 + \alpha}{3}z_1. \end{cases} \quad (4)$$

对于系统参数 $\alpha \in [0, 1]$, 存在一个下极限 $k^*(\alpha)$, 当系统控制参数 $k(\alpha) > k^*(\alpha)$ 时, 对于任意不同的初值, 响应系统(4)和(3)很快实现广义同步. $k^*(\alpha)$ 与对应的驱动系统参数 α 的关系类似于表 1 中的情形. 见表 2.

表 2 $k^*(\alpha)$ 与驱动系统参数 α 的关系

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k^*(\alpha)$	0.89	0.40	0.51

如果系统采用一般意义上的广义同步, 即所谓的广义位移反馈同步, 其反馈系数的下极限为下表.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k^*(\alpha)$	2.53	4.20	4.07

很显然采用广义速度反馈同步时反馈系数的下极限低于广义位移反馈同步的反馈系数的下极限, 从而也降低了实现同步的代价(图 2).

2.3. 耦合同步

在前面的混沌同步讨论中, 我们只考虑驱动信

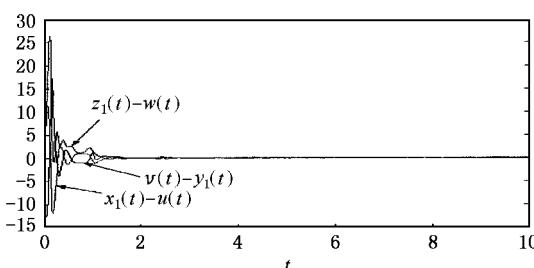


图 2 显示当 $\alpha = 0.8, k = 1$ 时响应系统(4)与(3)实现广义同步的误差

号对响应系统的影响,不考虑响应系统反过来对驱动信号的影响和反馈.当多个子系统耦合形成大系统时,子系统之间的互同步问题在实际中常常至关重要.如果两个相同的混沌振子互相耦合,振子之间的关系可以有两种不同的状态.一是耦合程度很低时,两个振子独立地在各自的混沌吸引子上运动,尽管吸引子是相同的,但各振子在吸引子上的运动轨道不同,两振子的运动不同步.如果耦合结构与系统运动有较好的匹配,同时又有适当的耦合强度时,两振子不仅在同一吸引子上,而且在完全相同的轨道上运动,这时它们之间会形成混沌同步,而且是精确同步.

设驱动系统为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x + (29\alpha - 1)y - xz \\ \quad - k(x - u), \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z. \end{array} \right. \quad (5)$$

响应系统为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = (25\alpha + 10)(v - u), \\ \dot{v} = (28 - 35\alpha)u + (29\alpha - 1)v - uw \\ \quad - k(u - x), \\ \dot{w} = uv - \frac{8 + \alpha}{3}w. \end{array} \right. \quad (6)$$

对于系统参数 $\alpha \in [0, 1]$, 存在一个下极限 $k^{**}(\alpha)$, 当系统控制参数 $k(\alpha) > k^{**}(\alpha)$ 时, 对于任意不同的初值, 响应系统(6)和(5)很快实现耦合同步, 见表 3.

表 3 $k^{**}(\alpha)$ 与驱动系统参数 α 的关系

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k^{**}(\alpha)$	2.14	0.32	0.57

如果系统采用一般意义上的耦合同步,即所谓的耦合位移反馈同步,其反馈系数的下极限为下表.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k^{**}(\alpha)$	2.80	2.20	2.51

很显然采用耦合速度反馈同步时反馈系数的下极限低于耦合位移反馈同步的反馈系数的下极限,从而降低了实现同步的代价(图 3).

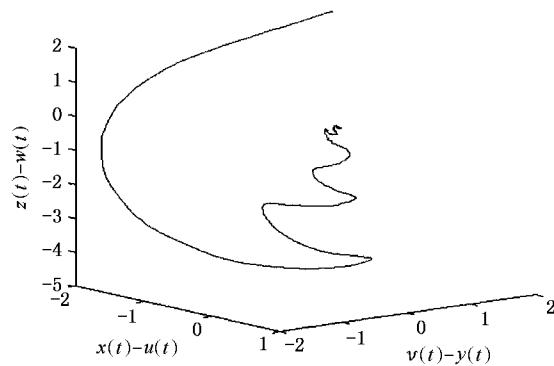


图 3 显示当 $\alpha = 1, k = 2$ 时响应系统(6)与驱动系统(5)实现同步的误差

3. 结 论

本文提出并讨论了混沌系统的速度反馈同步问题,从线性反馈同步、广义同步、耦合同步三个方面分析了速度反馈同步的系数的取值范围,并跟通常意义上的位移反馈同步系数的取值范围进行了比较.结果发现速度反馈同步的系数的下极限明显较低,从而降低了系统同步的代价.在研究统一混沌系统位移反馈同步的时候,我们发现反馈系数 k 的下极限与系统参数 α 满足正相关的关系,但是速度反馈同步的情形显然不再成立,却近似满足负相关的关系,其原理有待于进一步探讨.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Tao C H *et al* 2005 *Chaos Solitons & Fractals* **23** 259
- [4] Chen G R , Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [5] Lü J H , Chen G R , Zhang S C 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [6] Vaněček , Čelikovský 1996 *Control Systems : From Linear Analysis to Synthesis of Chaos*(London :Prentice-Hall)
- [7] Chen G R , Dong X 1998 *From Chaos to Order :Methodologies , Perspectives and Applications*(Singapore :World Scientific)
- [8] Lu J A , Tao C H *et al* 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 632
- [9] Tao C H , Lu J A , Lu J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 in Chinese [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [10] He D H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **49** 833 in Chinese [何岱海 等 2000 物理学报 **49** 833]
- [11] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control*(Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡刚、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海 : 上海科技教育出版社)]
- [12] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaos Control , Synchronization and Its Application* (Beijing : National Defense Industry Publishing House) (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京 国防工业出版社)]

Speed feedback synchronization of a chaotic system^{*}

Tao Chao-Hai¹⁾ Lu Jun-An²⁾

¹⁾ College of Computer Science and Technology , Chongqing University of Posts and Telecommunications , Chongqing 400065 , China)

²⁾ School of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China)

(Received 29 April 2005 ; revised manuscript received 6 June 2005)

Abstract

The speed feedback synchronization of a chaotic system has been studied by using linear feedback synchronization , generalized synchronization and coupled synchronization methods . The coefficients of speed feedback synchronization have been figured out and are smaller than those of the general feedback synchronization , so the complexity and cost is reduced . Numerical simulations show the effectiveness of the methods .

Keywords : chaos , feedback , synchronization , the maximum Lyapunov exponent

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Young Teacher Foundation of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Grant No. A2004 – 17).