

基于参数展开的同伦分析法在强非线性 随机动力系统中的应用*

徐 伟^{1)†} 孙中奎¹⁾ 杨晓丽^{1) 2)}

¹⁾ 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

²⁾ 陕西师范大学数学系, 西安 710062)

(2004 年 12 月 7 日收到, 2005 年 4 月 25 日收到修改稿)

将基于参数展开的同伦分析法(PE-HAM)进行了推广,使之适用于谐和激励与随机噪声联合作用下的强非线性随机动力系统. 通过构造合适的同伦映射,将对强非线性随机动力系统响应的求解转化为对一组线性随机微分方程的求解. 进一步研究了受到谐和与 Gauss 白噪声激励的强非线性 Duffing 振子,由 PE-HAM 得到了该系统的解过程和稳态概率密度的解析表达式. 数值模拟的结果说明了 PE-HAM 方法的精确性.

关键词: PE-HAM 方法, 强非线性随机动力系统, 稳态概率密度, 解过程, 随机激励

PACC: 0547, 0290, 0365D

1. 引 言

对于非线性问题,摄动方法^[1,2]是一类广泛应用的解析工具. 通过摄动技术,许多重要的性质和有趣的现象被揭示出来. 本质上,摄动方法是建立在小参数或者小变量存在的基础上,正是这种依赖性限制了摄动方法的应用范围. 因此,如何扩大经典摄动法的应用范围或者提出一种新的、不依赖于小参数的方法就显得异常必要和迫切. 目前,一些方法被用来对不含有小参数的所谓强非线性动力系统进行分析:例如谐波平衡法^[3-5]、KBM 法^[1,2]、加权线性化法^[6]、参数变换法^[7]、改进的 LP 方法^[8]等等,然而如何提高上述方法的精度仍然是一个有待解决的问题. 1992 年, Liao^[9]将同伦理论运用到非线性动力系统中,提出了同伦分析技术(HAM),并用它研究了著名的 Blasius 方程,得到了高精度的近似解. 1999 年 Liao^[10]运用改进的同伦分析技术再次研究了 Blasius 方程. 2003 年 Liao^[11]通过将系统状态展开成 $(1 + \lambda t)^{-m} \sin(\omega t) (1 + \lambda t)^m \cos(\omega t) | m \geq 1, n \geq 0$ 的级数形式用 HAM 研究了不带激励项的自

治系统. He^[12]结合摄动法和同伦理论提出了同伦摄动法(HPM). 已有的算例说明了同伦理论在确定性非线性动力系统的有效性和潜力. 但是,当系统同时受到谐和激励与随机激励时,不管 HAM 还是 HPM 都不再适用. 众所周知,对非线性随机动力系统响应的研究,现在正吸引着越来越多学者的注意,并逐渐成为国际上一个新的研究热点和前沿,一些方法^[13,14],例如,平均法^[15,16]、等效线性化法^[17,18]、多尺度法^[19]、数值分析方法^[20-22]等已经被用来解决随机问题,然而对小参数的依赖限制了摄动方法在强非线性随机动力系统中的应用. 因此,对强非线性随机动力系统响应的研究就显得非常有必要.

最近,作者基于同伦理论和 HAM 思想,提出了一种新的解析方法,PE-HAM,该方法不依赖于系统内含有的参数,克服了摄动法的缺点,在系统内含有小参数或不含有小参数时都可以用来对非线性动力系统进行精确分析;而且 PE-HAM 具有坚实的理论基础(微分拓扑中的同伦理论),从理论上保证了该方法的合理性. 根据 PE-HAM,作者研究了强非线性保守 Duffing 振子和谐和激励下耗散的 Duffing 振子的响应问题,得到了很好的结果^[23]. 本文是前面研

* 国家自然科学基金(批准号:10472091、10332030)陕西省自然科学基金(批准号 2003A03)资助的课题.

† E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

究工作的继续.作者将 PE-HAM 方法推广到强非线性随机动力系统情形,通过构造同伦映射,成功得到了 Gauss 白噪声和谐和激励下的强非线性 Duffing's 振子的解过程和稳态概率密度的解析表达式.本文介绍了 PE-HAM 法的基本思想,运用此方法研究了随机激励和谐和激励联合作用下耗散的强非线性 Duffing 振子的响应,得到了解过程和稳态概率密度的解析表达式,将本文结果与四阶 Runge-Kutta 数值解以及 Wu 和 Lin 所得同一系统的精确平稳解^[13]进行了比较,理论结果与数值结果符合非常好.

2. PE-HAM 的基本思想

考虑如下非线性系统

$$L(u) + N(u) = F(t) + \xi(t), \quad (1)$$

其中 $L(\cdot)$ 为线性微分算子; $N(\cdot)$ 为非线性微分算子; $F(t)$ 为谐和激励; $\xi(t)$ 为随机激励. 这里并不要求系统 (1) 中的参数为小参数.

首先,构造同伦映射 $H: x(t) \rightarrow x(t, p, \gamma)$, 满足

$$H(t, p, \gamma) = (1 - \gamma p [L(u) - L(u_0)] + \gamma p [L(u) + N(u) - F(t)] - \gamma^q p^q \xi(t)), \quad (2)$$

这里 p 和 γ 为嵌入参数,且 $\gamma \in R \setminus \{0\}, p \in [0, 1/\gamma], q \in Z$, 显然,当 $\gamma \gg 1$ 时 $p \ll 1$. 令 $H(t, p, \gamma) = 0$ (2) 式化为

$$\begin{cases} \hat{L}(u_0) = 0, \\ -\chi(k+1)\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{L}(u_0)^{(k+1)} = -\chi(k+1)[\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{N}(u_0)^{(k)} - \hat{F}(\tau)], & k = 0, \\ -\chi(k+1)\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{L}(u_0)^{(k+1)} = -\chi(k+1)[\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{N}(u_0)^{(k)}], & 0 < k \neq q-1, \\ -\chi(k+1)\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{L}(u_0)^{(k+1)} = -\chi(k+1)[\hat{L}(u_0)^{(k)} + \hat{N}(u_0)^{(k)}] + q! \gamma^q \hat{\xi}(\tau), & k = q-1, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\hat{L}(u)^{(k)} = \frac{\partial^k \hat{L}(u)}{\partial p^k}, \hat{N}(u)^{(k)} = \frac{\partial^k \hat{N}(u)}{\partial p^k}$. 方程

(7) 称为 k 阶变形方程 (deformation equation), $\hat{L}(u)^{(k)}, \hat{N}(u)^{(k)}$ 称为第 k 阶变形导数. 显然, 方程 (7) 为一组线性随机微分方程. $\hat{\xi}(\tau)$ 首先出现在第 $q+1$ 方程中, 例如, 如果令 $q=1, \hat{\xi}(\tau)$ 将首先出现在方程 (7) 的第二个方程中, 因此可以通过选择 q 的值来决定 $\hat{\xi}(\tau)$ 首次出现的位置.

最后, 我们将 $\hat{u}(\tau, p)$ 在 $p=0$ 展开成 Taylor 展

$$(1 - \gamma p [L(u) - L(u_0)] + \gamma p [L(u) + N(u) - F(t)] - \gamma^q p^q \xi(t)) = 0, \quad (3)$$

$u_0(t)$ 是方程 $L(u) = 0$ 在 $p=0$ 时的解. 易知, 当 $p=0$ 时 (3) 式退化为一线性微分方程, 当 $p=1/\gamma$ 时 (3) 式就是系统 (1). 当嵌入参数 p 从 0 变化到 $1/\gamma$ 时 (3) 式的解 $u(t, p, \gamma)$ 从 $u_0(t)$ 连续变化到系统 (1) 的解 $u(t)$, 即 $\lim_{p \rightarrow 1/\gamma} u(t, p, \gamma) = u(t)$.

其次, 将 ω^2 展开为 p 的级数^[7,8,24] (若 $F(t) = 0, \xi(t) = 0$)

$$\omega^2(p) = \omega_0^2 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \omega_3 p^3 + \dots \quad (4)$$

在 $F(t) \neq 0, \xi(t) \neq 0$ 时, 我们可以展开 Ω 为 p 的级数 (Ω 是 $F(t)$ 的频率).

引入变换

$$\tau = \Omega t, \quad (5)$$

将 (4) (5) 式代入 (3) 式, 得到

$$(1 - \gamma p [L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p [L(u) + N(u) - \hat{F}(\tau)] - \gamma^q p^q \hat{\xi}(\tau)) = 0 \quad (6)$$

这里 $\hat{L}(u) = L(u(\tau, p))$ 是一线性微分算子; $\hat{N}(u) = N(u(\tau, p))$ 是非线性微分算子; $\hat{F}(\tau) = F(t)|_{\tau=\Omega t}, \hat{\xi}(\tau) = \xi(t)|_{\tau=\Omega t}$. 易证 (6) 式和 (3) 式是等价同解的.

为了求解 (6) 式, 我们对 p 计算 k 阶偏导数, 并令 $p=0$ 得到

式, 再令 $p \rightarrow 1/\gamma$ 则可以得到

$$\begin{aligned} \hat{u}(\tau) &= \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} \hat{u}(\tau, p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{(k)}}{k!} p^k \right) \\ &= u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{(k)}}{k!} \frac{1}{\gamma^k}. \end{aligned} \quad (8)$$

将 $u_0^{(k)}$ 和 $\tau = \Omega t$ 代入 (8) 式, 就可以得到原系统的 k 阶近似解.

3. Duffing 振子的响应研究

考虑受谐和与 Gauss 白噪声激励下强非线性 Duffing 振子

$$\ddot{u} + \beta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = \lambda_1 \cos \Omega t + \lambda_2 W(\Omega t), \quad (9)$$

这里“ \cdot ”表示对 t 求导, α 和 β 分别表示阻尼项和非线性项的强度, ω_0 是自然频率, λ_1 和 λ_2 是参数, $W(t)$ 为 Gauss 白噪声, 相关函数为 $E[W(t)W(t+\tau)] = 2\delta(\tau)$ 其中 $\delta(\tau)$ 是 Dirac 函数. 将系统 (9) 改写为算子形式

$$L(u) + N(u) = F(t) + \xi(t),$$

这其中 $L(u) = \ddot{u} + \beta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u$, $N(u) = \alpha u^3$, $F(t) = \lambda_1 \cos \Omega t$, $\xi(t) = \lambda_2 W(\Omega t)$, 令 $A(u) = L(u) + N(u) - F(t)$. 下面运用 PE-HAM 方法研究系统 (9) 的响应, 分为以下四步.

步骤 1 首先构造同伦映射 $H: u(t) \rightarrow u(t, p, \gamma)$, 满足以下方程:

$$H(t, p, \gamma) = (1 - \gamma p [L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p [L(u) + N(u) - F(t)] - \gamma^q p^q \xi(t), \quad (10)$$

这里 $L_0(u_0) = \omega_0^2 \ddot{u}_0 + \beta\omega_0^2 \dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0$.

步骤 2 将频率 Ω 展开为 p 的级数

$$\Omega(p) = \omega_0 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \omega_3 p^3 + \dots \quad (11)$$

将 $\tau = \Omega t$ 代入系统 (9), 得

$$\Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = \lambda_1 \cos \tau + \lambda_2 W(\tau), \quad (12)$$

这里“ $'$ ”表示对 τ 求导. 将 (12) 式改写成算子形式

$$L(u) + N(u) = F(t) + \xi(t),$$

其中

$$L(u) = \Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u,$$

$$N(u) = \alpha u^3,$$

$$F(\tau) = \lambda_1 \cos \tau, \xi(\tau) = \lambda_2 W(\tau),$$

则

$$H(\tau, p, \gamma) = (1 - \gamma p [\Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u - (\omega_0^2 u''_0 + \beta \omega_0^2 u'_0 + \omega_0^2 u_0)] + \gamma p [\Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u + \alpha u^3 - \lambda_1 \cos \tau] - \gamma^q p^q \lambda_2 W(\tau)). \quad (13)$$

步骤 3 令 $H(\tau, p, \gamma) = 0$, $q = 1$ 就有

$$(1 - \gamma p [\Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u - (\omega_0^2 u''_0 + \beta \omega_0^2 u'_0 + \omega_0^2 u_0)] + \gamma p [\Omega^2(p) u'' + \beta \Omega(p) \omega_0 u' + \omega_0^2 u + \alpha u^3 - \lambda_1 \cos \tau] - \gamma p \lambda_2 W(\tau) = 0, \quad (14)$$

变形式 (14) m 次, 并令 $p = 0$ 则有

$$\begin{aligned} \omega_0^2 u_0^{(k+1)} + \beta \omega_0^2 u_0^{(k+1)} + \omega_0^2 u_0^{(k+1)} = & -\chi(k+1) \left[\alpha \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_k^i C_i^j u^{(j)} u^{(i-j)} u^{(k-i)} \right] \\ & - \left[\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_i^j (i-j)! \omega_i \omega_{i-j} u_0^{(k-i+1)} + \beta \omega_0 \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i i! \omega_i u_0^{(k-i+1)} \right], \\ & k \geq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

步骤 4 考虑到精度和简单性, 在 (15) 式中, 只取 $m = 2$, 则有

$$\begin{cases} u_0'' + \beta u_0' + u_0 = 0, \\ u_0^{(1)} + \beta u_0' + u_0^{(1)} = -\chi(u_0'' + \beta u_0' + u_0 + \frac{\alpha}{\omega_0^2} u_0^3 - \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \cos \tau - \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} W(\tau)) - \frac{2\omega_1}{\omega_0} u_0'' - \frac{\beta\omega_1}{\omega_0} u_0', \\ u_0^{(2)} + \beta u_0' + u_0^{(2)} = -\gamma \frac{6\alpha}{\omega_0^2} u_0^2 u_0^{(1)} - \frac{4\omega_1}{\omega_0} u_0^{(1)} - \frac{2\beta\omega_1}{\omega_0} u_0' - \frac{\chi(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)}{\omega_0^2} u_0'' - \frac{2\beta\omega_2}{\omega_0} u_0', \end{cases} \quad (16)$$

初始条件为 $u_0(0) = a_0$, $u_0^{(k)}(0) = 0$, $k \geq 1$, a_0 为常数.

根据初始条件和 (16) 式的第一个方程, 可以得到原系统的零阶近似解为

$$u_0^{(0)}(\tau) = e^{\phi_1 \tau} (a_0 \cos \phi_2 \tau + b_0 \sin \phi_2 \tau), \quad (17)$$

其中 $\phi_1 = -\beta/2$, $\phi_2 = \sqrt{4 - \beta^2}$, $u_0(0) = a_0$, b_0 将在

下面通过消除久期项和化简确定.

将 (17) 式代入 (16) 式的第二个方程, 可以得到

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} + \beta u_0^{(1)} + u_0^{(1)} = & - \left[\frac{\alpha}{\omega_0^2} \gamma e^{3\phi_1 \tau} (a_0^3 \cos^3 \phi_2 \tau \right. \\ & + 3a_0^2 b_0 \cos^2 \phi_2 \tau \sin \phi_2 \tau \\ & \left. + 3a_0 b_0^2 \cos \phi_2 \tau \sin^2 \phi_2 \tau \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + b_0^3 \sin^3 \phi_2 \tau) \\
 & - \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \cos \tau - \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} W(\tau)] \\
 & - \frac{2\omega_1}{\omega_0} u_0'' - \frac{\beta\omega_1}{\omega_0} u_0', \quad (18)
 \end{aligned}$$

消除久期项或者化简方程,可以得到 $b_0 = 0, \omega_1 = 0$.

则(18)式化简为

$$\begin{aligned}
 & u_0^{(1)} + \beta u_0^{(1)} + u_0^{(1)} \\
 & = -\frac{3\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1} \cos \phi_2 \tau - \frac{\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1} \cos 3\phi_2 \tau \\
 & + \frac{\lambda_1 \gamma}{\omega_0^2} \cos \tau + \frac{\lambda_2 \gamma}{\omega_0^2} W(\tau). \quad (19)
 \end{aligned}$$

显然(19)式是一线性随机微分方程,其通解为

$$u_0^{(1)} = \bar{u}_0^{(1)} + u_{\text{os1}}^{(1)} + u_{\text{os2}}^{(1)} + u_{\text{os3}}^{(1)} + u_{\text{os4}}^{(1)} \quad (20a)$$

$$\bar{u}_0^{(1)} = e^{\phi_1 \tau} (a_1 \cos \phi_2 \tau + b_2 \sin \phi_2 \tau), \quad (20b)$$

$$\bar{u}_{\text{os1}}^{(1)} = e^{3\phi_1 \tau} (A_1 \cos \phi_2 \tau + B_2 \sin \phi_2 \tau), \quad (20c)$$

$$\bar{u}_{\text{os2}}^{(1)} = e^{3\phi_1 \tau} (A_2 \cos 3\phi_2 \tau + B_2 \sin 3\phi_2 \tau), \quad (20d)$$

$$\bar{u}_{\text{os3}}^{(1)} = A_3 \cos \tau + B_3 \sin \tau, \quad (20e)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_1 = & -\frac{9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1}{(9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \\
 & \times \frac{3\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2}, \quad (21a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 = & -\frac{6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2}{(9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \\
 & \times \frac{3\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2}, \quad (21b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1}{(9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (18\phi_1\phi_2 + 3\beta\phi_2)^2} \\
 & \times \frac{\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2}, \quad (21c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = & -\frac{18\phi_1\phi_2 + 3\beta\phi_2}{(9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (18\phi_1\phi_2 + 3\beta\phi_2)^2} \\
 & \times \frac{\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2}, \quad (21d)
 \end{aligned}$$

$$A_3 = 0, B_3 = \frac{\lambda_2 \gamma}{\beta\omega_0^2}, a_1 = -A_1 - A_2. \quad (21e)$$

最后一项 $u_{\text{os4}}^{(1)}$ 是下面随机微分方程的解

$$u_0^{(1)} + \beta u_0^{(1)} + u_0^{(1)} = \lambda_2 \gamma W(\tau) / \omega_0^2. \quad (22)$$

将上式改写为下列等价的 Itô 随机微分方程形式

$$\begin{cases} du_1 = u_2 d\tau, \\ du_2 = (-\beta u_2 - u_1) d\tau + \gamma \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} \sqrt{2} dB(\tau). \end{cases} \quad (23)$$

因此^[25]

$$u_{\text{os4}}^{[1]} = \mathcal{H}(\tau_0, \tau) \left[u(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \phi^{-1}(\tau_0, \tau) \mathcal{H}(\tau) dB(\tau) \right].$$

这里 $\mathcal{H}(\tau_0, \tau) = \exp(m(\tau - \tau_0))$, τ_0 是初始时间,一

般取 $\tau_0 = 0$, 而且 $\sigma(\tau) = \left[0, \gamma \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} \sqrt{2} \right]^T$, $m =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix}.$$

为了确定 b_1 和 ω_2 , 将(17)(20a)–(20e)式代入(16)式的第三方程,消除长期项并化简,可以得到

$b_1 = 0, \omega_2 = 0$. 所以系统(9)的一阶近似解为

$$u(\tau) = u_0^{(0)} + u_0^{(1)} / \gamma. \quad (24)$$

再将上式等价变形 $u_0^{(1)} = \gamma(u(\tau) - u_0^{(0)})$, 并代入

(19)式,整理可得

$$\begin{aligned}
 u'' + \beta u' + u = & -\frac{3\alpha a_0^3}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos \phi_2 \tau - \frac{\alpha a_0^3}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos 3\phi_2 \tau \\
 & + \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \cos \tau + \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} W(\tau). \quad (25)
 \end{aligned}$$

对应 Itô 随机微分方程为

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\beta u_2 - u_1 - \frac{3\alpha a_0^3}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos \phi_2 \tau \\ \quad - \frac{\alpha a_0^3}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos 3\phi_2 \tau \\ \quad + \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \cos \tau + \frac{\lambda_2}{\omega_0^2} W(\tau). \end{cases} \quad (26)$$

所以原系统的稳态概率密度($\tau \rightarrow \infty$)可以解出为^[25]

$$\begin{aligned}
 & p(u_1, u_2, \tau) \\
 & = c \exp \left[-\left(\beta I - \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \sqrt{2\omega_0} I \cos \delta \right) \mathcal{Y} \left(\frac{\lambda_2}{\omega_0^2} \right)^2 \right] \quad (27)
 \end{aligned}$$

这里 $\delta = \theta - \omega_0 \tau$, $\theta = \arcsin(u_1 / (\sqrt{2I/\omega_0}))$, c 为归一化常数.

当 $\lambda_1 = 0, \beta = \lambda_2^2, \alpha = \epsilon$ 时,系统(9)化为 $\ddot{u} + \beta \dot{u} + u + \epsilon u^3 = \sqrt{\beta} W(t)$, Wu 和 Lin^[13] 研究过此方程,并且给出了稳态概率密度

$$p(u_1, u_2) = c \exp \left[-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} - \frac{\epsilon u_1^4}{4} \right], \quad (28)$$

其中 c 为归一化常数,

$$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} \left[\exp \left(\frac{1}{8\epsilon} \right) K_{1/4} \left(\frac{1}{8\epsilon} \right) \right]^{-1},$$

$K_{1/4}$ 为修正的 Bessel 函数.

4. 数值分析

有关随机过程数值模拟的方法可见文献 [25]. 本节在三组参数值下, 将第 3 节所得结果分别与数值解和 Wu 与 Lin 的精确解^[13]进行了比较. 在 $a_0 = 0.1, \omega_0 = 1, \alpha = 15, \beta = 0.2, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0$ 参数下系统只受到谐和力的作用, 用四阶龙格-库塔法对原系统进行数值求解, 并与本方法所得近似解(24)式

进行了比较, 见图 1; 为了考察随机力对系统的影响, 在 $a_0 = 0.24, \omega_0 = 1, \alpha = 5, \beta = 0.1, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.01$ 参数下用四阶龙格-库塔法对原系统进行数值求解, 见图 2; 从图 1 和图 2 中可以看出在随机力作用下系统的响应从一周期解变为一拟周期解, 相轨图也从一极限环变为一扩散的极限环. 为了验证本文所得近似平稳概率密度的精确度, 将本文所得结果(27)与 Wu 与 Lin 的精确平稳解(28)进行了比较, 见图 3—5.

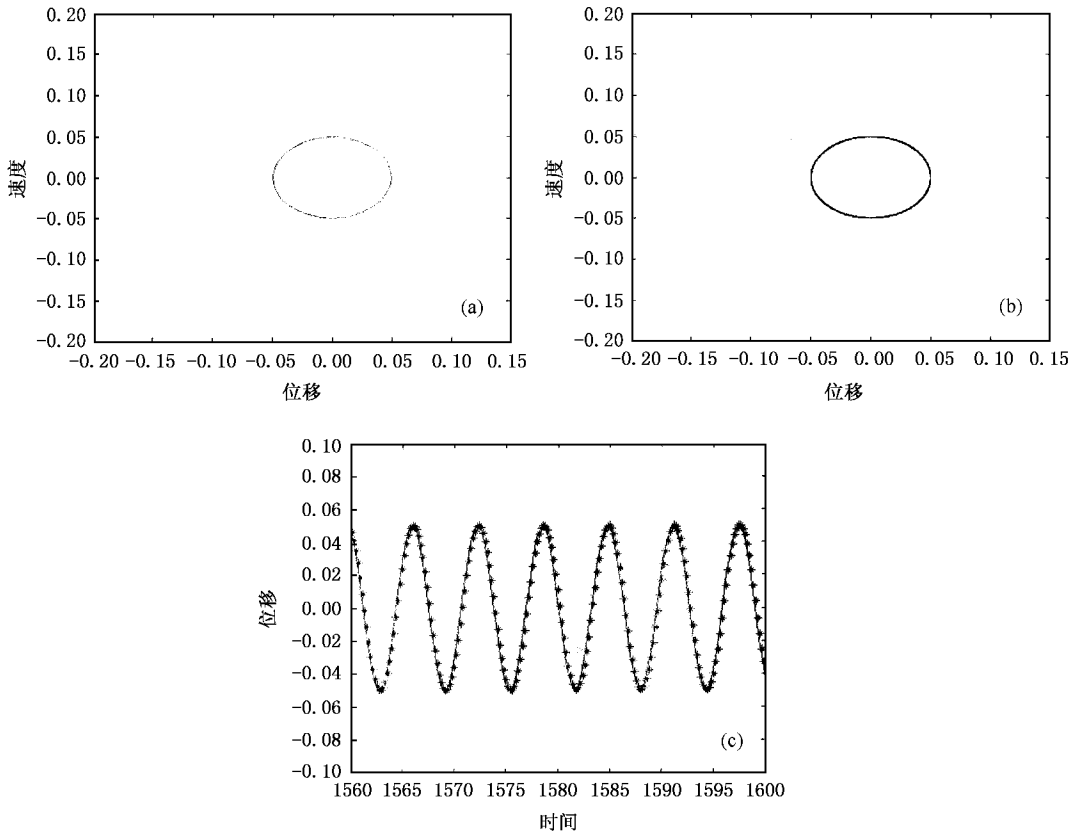


图 1 方程(9)的相轨图和时间历程图 (a)数值解;(b)PE-HAM方法;(c)***为PE-HAM方法,一为数值解

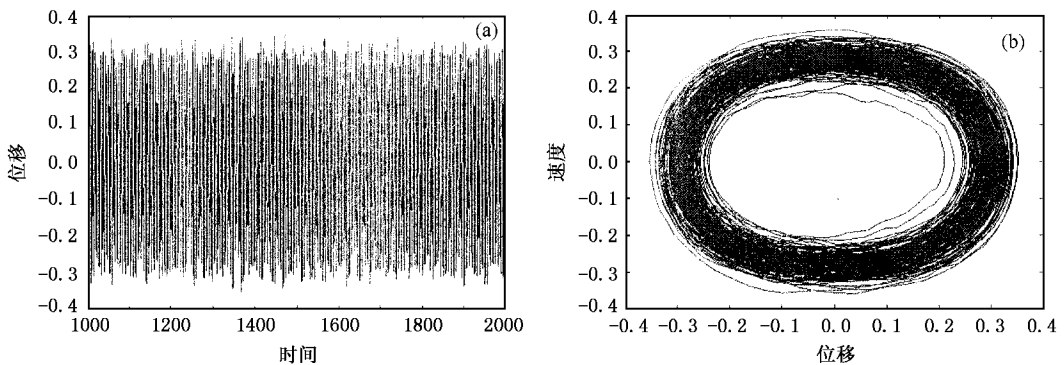


图 2 方程(9)的时间历程图和相轨图 (a)系统的时间历程图 (b)系统的相轨图

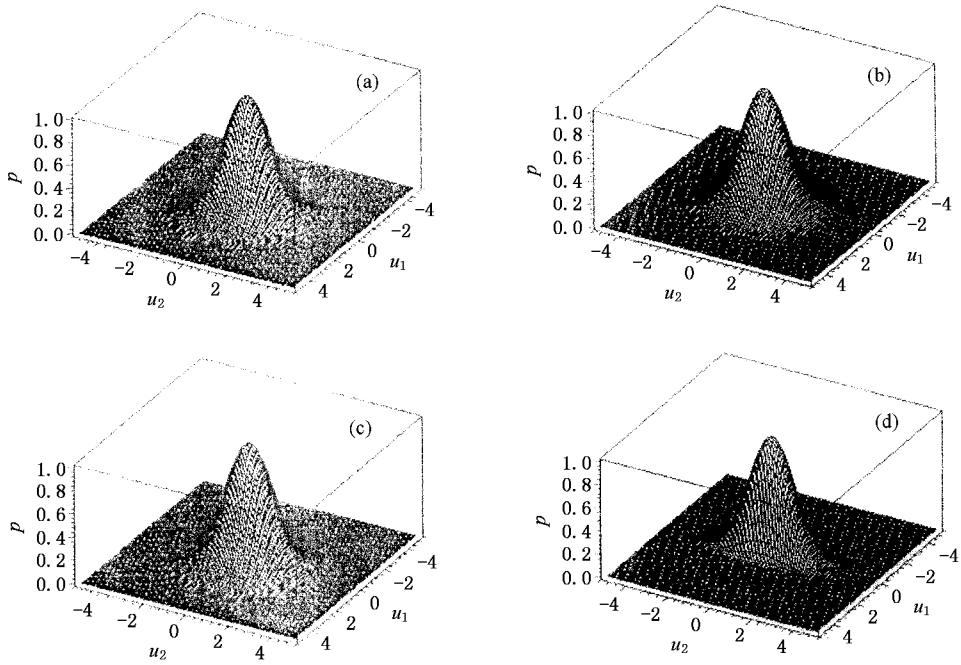


图 3 稳态概率密度 (a) PE-HAM 方法 ($\alpha = 0.1$) (b) Wu 和 Lin ($\alpha = 0.1$) (c) PE-HAM 方法 ($\alpha = 10$) (d) Wu 和 Lin ($\alpha = 10$)

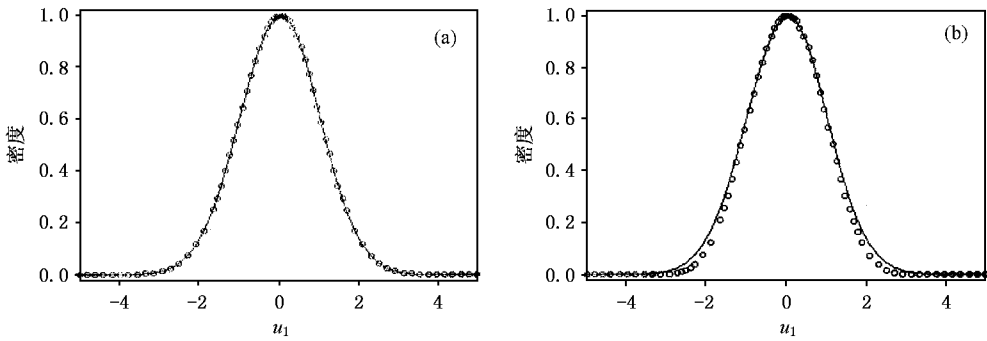


图 4 稳态概率密度(在 $u_2 = 0$ 处) — 为 PE-HAM 方法, \circ 为 Wu 和 Lin (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha = 0.1$

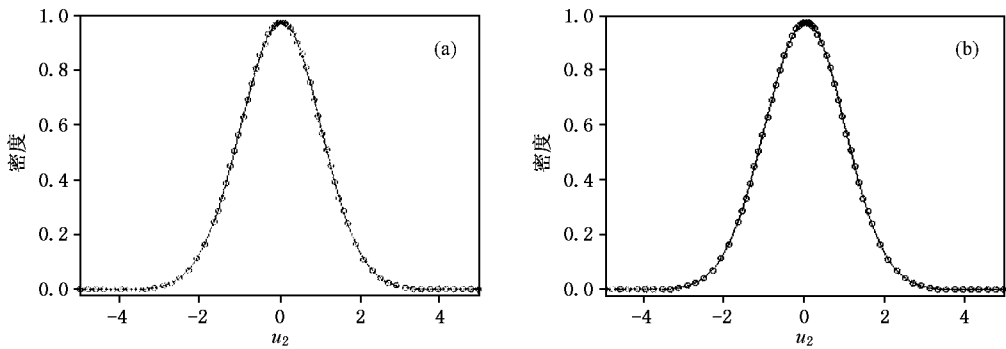


图 5 稳态概率密度(在 $u_1 = 0.2$ 处) — 为 PE-HAM 方法, \circ 为 Wu 和 Lin (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 5$

5. 结论与讨论

本文通过构造特殊的同伦映射,推广了PE-HAM方法的应用范围,研究了谐和与高斯白噪声联合作用下强非线性 Duffing 振子的响应问题,得到了系统的解过程和稳态概率密度的解析表达式,通过与数值解和 Wu 和 Lin 所得稳态概率密度的比较,说明了 PE-HAM 方法在求解强非线性随机动力系统响应问题的有效性和潜力. 需要说明的是,虽然本文用 PE-HAM 方法只研究了随机 Duffing 系统,但 PE-HAM 方法可以适用于一大类复杂的确定性系统和随机系

统,限于篇幅本文未展开论述. 而且,PE-HAM 方法不依赖于系统内含有的参数,克服了摄动法的缺点,在系统含有小参数或不含有小参数时,都可以得到高精度的解析近似解,数值模拟结果也很好的说明了这一点;且 PE-HAM 具有坚实的理论基础(微分拓扑中的同伦理论),从理论上保证了该方法所得结果的合理性. 当然,作为一种新方法 PE-HAM 还存在不足,如何确定 Taylor 展开级数,也就是(8)式的收敛半径等等,作者会在以后的研究中尽量完善此方法.

感谢上海交通大学廖世俊教授的指点和建设性建议

-
- [1] Nayfeh A H 2000 *Perturbation Methods* (New York : John Wiley & Sons , Inc) p1
- [2] Nayfeh A H 1985 *Problems in Perturbation Methods* (New York : Wiley) p1
- [3] Delamotte B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3361
- [4] Denman H , Howard J and Liu Y K 1964 *Quarterly of Appl. Math.* **21** 325
- [5] Denman H , Howard J and Liu Y K 1965 *Quarterly of Appl. Math.* **22** 273
- [6] Agrwal V P and Denman H 1985 *J. Sound Vib.* **57** 463
- [7] Burton T D and Rahman Z 1986 *Int. J. Nonlinear Mech.* **21** 135
- [8] Cheung Y K , Chen S H and Lan S L 1991 *Int. J. Nonlinear Mech.* **26** 367
- [9] Liao S J 1992 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai Jiaotong University) p1 (in Chinese) [廖世俊 1992 博士论文(交通大学)第 1 页]
- [10] Liao S J 1999 *Int. J. Nonlinear Mech.* **34** 759
- [11] Liao S J 2003 *Int. J. Nonlinear Mech.* **38** 1173
- [12] He J H 1999 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer.* **178** 257
- [13] Lin Y K and Cai G Q 1995 *Probabilistic Structural Dynamics* (2nd edition) (New York : McGraw-Hill) p286
- [14] Zhu W Q 1992 *Stochastic Vibration* (2nd edition) (Beijing : Science Press , China) p1
- [15] Deng M L , Hong M C , Zhu W Q and Wang Y M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2029 (in Chinese) [邓茂林、洪明潮、朱位秋、汪元美 2004 物理学报 **53** 2029]
- [16] Xiong J J , Gao Z T , Liu X B and Sun X F 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 49 (in Chinese) [熊峻江、高镇同、刘先斌、孙训方 2000 物理学报 **49** 49]
- [17] Lyon R H , Heckl M and Hazelgrove C B 1961 *J. Acoust. Soc. Am.* **33** 1404
- [18] Richard K and Anand G V 1983 *J. Sound Vib.* **86** 85
- [19] Nayfeh A H and Serhan S J 1990 *Int. J. Nonlinear Mech.* **25** 493
- [20] Xu W , He Q , Rong H W and Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [21] Xie W X *et al Acta Phys. Sin.* (in Chinese) (in press) [谢文贤等 物理学报 (出版中)]
- [22] Xiao F H and Yan G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 396 (in Chinese) [肖方红、闫桂荣 2004 物理学报 **53** 396]
- [23] Sun Z K , Xu W and Yang X L 2005 *Acta Mech. Sin.* in press (in Chinese) [孙中奎、徐 伟、杨晓丽 2005 力学学报 校印]
- [24] Burton T D 1984 *Int. J. Nonlinear Mech.* **39**(5) 19
- [25] Zhu W Q 2003 *The stochastic nonlinear dynamics and control* (Beijing : Science Press) p98 (in Chinese) [朱位秋 2003 非线性随机动力学与控制 (北京 科学出版社) 第 98 页]

Application of homotopy technique with the parameter expansion to strongly nonlinear stochastic dynamic systems *

Xu Wei¹⁾ Sun Zhong-Kui¹⁾ Yang Xiao-Li^{1 2)}

¹⁾Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

²⁾Department of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 7 December 2004; revised manuscript received 25 April 2005)

Abstract

This paper extends the method of PE-HAM to strongly nonlinear stochastic dynamic system under harmonic and Gauss white noise excitations. By constructing an appropriate homotopy mapping, the original system is transformed into a set of linear stochastic differential equations. In addition, the strongly nonlinear Duffing oscillator subjected to harmonic and Gauss white noise excitations is investigated using the proposed method, and its approximate analytically solution process and steady-state probability density are obtained. Numerical simulation is employed to verify the theoretical result and good agreement is found.

Keywords: PE-HAM method, strongly nonlinear stochastic dynamic systems, steady-state probability density, stochastic solution, stochastic excitation

PACC: 0547, 0290, 0365D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030), and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant No. 2003A03).