第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/5189-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.11,November,2005

强非局域非线性介质中光束传输的空间光孤子解*

张霞萍 郭 旗[†] 胡 巍
(华南师范大学信息光电子科技学院激光传输实验室,广州 510631)
(2004 年 12 月 7 日收到;2005 年 4 月 25 日收到修改稿)

利用 1+2 维 Snyder-Mitchell 模型讨论了柱坐标系下光束传输过程,得到了强非局域非线性介质中光束稳定传输的拉盖尔高斯型解,即空间光孤子解,并得到了入射光束稳定传输的临界功率.图示展现了几个低阶光孤子解,并发现了强非局域非线性介质中存在圆环形光孤子.

关键词:强非局域非线性介质,拉盖尔高斯(Laguerre-Gauss)解,高阶空间光孤子
PACC:4265S

1.引 言

在自聚焦非线性介质中传输的光束由于它自身诱导的导波作用会产生自陷形成空间孤子[1—3].非局域空间光孤子是种类繁多的空间光孤子的一种.顾名思义,非局域空间光孤子是空间非局域非线性介质中传输的空间光孤子.所谓空间非局域非线性介质,是指介质对光场的非线性响应,不仅与该点的光场有关而且与空间中其他点的光场有关[2,4].材料的空间非局域性起源于物质内对光场响应的单元(电子、分子或激子等[5])的空间相关性.如果材料的这种相关性为零,则这种材料是局域性材料.局域非线性介质中传输的空间光孤子是局域空间光孤子,其诱导的导波只传输一种模式场(例如 Kerr 介质).在非局域介质中,会存在不同的模式场,那样的孤子成为多模孤子,它们的能量分布呈现出多峰结构[6].1+1 维的单峰和双峰结构的光孤子在参数选择很大范围内可以稳定传输.

Snyder 和 Mitchell 提出的非局域线性模型[3](被称为 Snyder-Mitchell 模型[4]),是在光束束宽远远小于材料相关长度的强非局域条件[7]下,描述光束在非局域非线性介质中传输的线性方程.将非线性问题巧妙地转化为线性问题处理,这是一个革命性的创举[4].此举引发了沈元壤博士所预期的"新一轮的光孤子研究热潮".文献[2]已对截至 2003 年底前的非局域空间孤子研究状况进行了总结和综述评论.2004 年初郭旗等人提出了强非局域模型,并用此模型研究了傍轴高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性,得到了"大相移"的结果[8].郭旗的小组还给出了[9,10]从强非局域模型[8]到 Snyder-Mitchell 模型[3]的转化过程,讨论了(1+1)维平行垂直入射双孤子相互作用时的相位演化和控制问题[10],得到了(1+2)维共面平行垂直入射双孤子相互作用问题的精确解析解[2].他们还进一步讨论了偏离束腰入射的高斯光束在非局域非线性介质中的传输特性[11],以及 1+1 维和 1+2 维直角坐标系下的 Hermite-Gauss 解[12].他们还讨论了椭圆高斯光束在具有圆对称响应的强非局域介质中的传输特性[13]和数值模拟了不同非局域程度下光孤子的传输特性[14].Assanto 的小组从理论[15,16]和实验[17]均已证明,向列相液晶(nematic liquid crystals)是目前唯一发现的具有强非局域性的非线性介质.

本文将讨论柱坐标下强非局域非线性介质中 Laguerre-Gauss 解,得到高阶空间光孤子的特性.正是因为强非局域非线性介质的真实存在,才使得对该介质中高阶模空间孤子的研究更有价值.文章根据 Snyder-Mitchell 模型得到了柱坐标系下高阶光孤子解.Hutsebaut 等用实验在液晶中得到了高阶孤子波,这为高阶模光孤子的应用展现了广阔的前景[17].

* 国家自然科学基金(批准号:10474023)、广东省自然科学基金重点项目(批准号:04105804)资助的课题.

† E-mail:guoq@scnu.edu.cn

2. 傍轴条件下光束的拉盖尔高斯解

在 $1+2$ 维强非局域非线性介质中光束传输满足方程[2,3]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\nabla_{\perp}\varphi-\frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2\varphi=0, \tag{1}$$

其中 $\varphi=\varphi(x,y,z)$ 是傍轴光束，$\mu=1/2k$，$\rho=k\eta$，k 为介质中光波的波数($k=\omega n_0/c$，n_0 为介质的线性折射率)．η 为材料常数，$\eta>0$，$\eta<0$ 分别相应于聚焦介质和散焦介质．z 为沿传输方向的纵向坐标．$\nabla_{\perp}=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，为横向拉普拉斯算符．

在圆柱坐标系 (r,ϕ,z) 中，该方程的形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}-\frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2\varphi=0. \tag{2}$$

用复指数函数表示准单色场，令方程(2)的解为[18]

$$\varphi=F(r,z)\exp(-\mathrm{i}\beta z)\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}. \tag{3}$$

为保证方程解的角向周期性，n 取零或正整数．

将方程(3)代入方程(2)，有

$$\mathrm{i}\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\mu n^2}{r^2}F+\beta F-\frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2 F=0. \tag{4}$$

当 $n\neq0$ 时，轴上场必为零，由此可设[18]

$$F=r^n G(r,z). \tag{5}$$

将方程(5)代入方程(4)整理得

$$\mathrm{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+(2n+1)\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}r}{\mu}\frac{\partial G}{\partial z}+\left(\frac{\beta r}{\mu}-\frac{\rho\gamma P_0 r^3}{2\mu}\right)G=0, \tag{6}$$

该方程可分离变量，令

$$G=M(r)Z(z). \tag{7}$$

将方程(6)分离变量得

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}+\frac{2n+1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}+\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{\rho\gamma P_0 r^2}{2\mu}+p\right)M=0, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}-\mathrm{i}\mu pZ=0, \tag{8b}$$

p 为任意常数．

对方程(8a)进一步做变换，将 $M(r)$ 写成某多项式和高斯函数的乘积[19]，令 $M(r)=\Delta(r)\exp(-r^2/2w^2)$．此处我们研究稳定传输情况下的解析解，即 w 不随传输距离变化而变化．有

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2}+\left(\frac{2n+1}{r}-\frac{2r}{w^2}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{2n+1}{w^2}+\frac{r^2}{w^4}-\frac{\rho\gamma P_0 r^2}{2\mu}+p\right)\Delta=0. \tag{9}$$

令 $\xi=r/w$，方程(9)变换为

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi^2}+\left(\frac{2n+1}{\xi}-2\xi\right)\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}+\left[\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{2n+1}{w^2}+p\right)-\left(1-\frac{\rho\gamma P_0 w^4}{2\mu}\right)\xi^2\right]\Delta=0. \tag{10}$$

当 $P_c=P_0=2\mu/\rho\gamma w_0^4$ 时，该方程有精确的解析解，此时入射光束的功率为光束保持稳定传输时的临界功率．

为了将上式左侧各项系数归结为特殊函数的非线性方程[19]，可设 $\zeta=\xi^2$，方程(10)改写为

$$\zeta\frac{\partial^2\Delta}{\partial\zeta^2}+(n+1-\zeta)\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta}+\frac{w^2}{4}\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{2}{w^2}-\frac{2n}{w^2}+p\right)\Delta=0. \tag{11}$$

该方程为合流超几何方程，令 $\vartheta=n+1$，$\eta=(\beta/\mu-2/w^2-2n/w^2+p)w^2/4$，方程(11)的解可写成

$$F(\eta,\vartheta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta)_n}{n!(\vartheta)_n}z^n, \tag{12}$$

其中 $F(\eta,\vartheta,z)$ 为合流超几何函数[19]．

如果 $(\beta/\mu-2/w^2-2n/w^2+p)w^2/4=f$，即 p 的取值为 $(4f+2n+2)/w^2-\beta/\mu$，其中 $f=0,1,2,\cdots$ 时，方程(11)可改写成如下形式：

$$\zeta\frac{\partial^2\Delta}{\partial\zeta^2}+(n+1-\zeta)\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta}+f\Delta=0. \tag{13}$$

方程(13)为拉盖尔方程的标准形式[19]，其解为

$$\Delta(\zeta)=L_f^n(\zeta), \tag{14}$$

$L_f^n(\zeta)$ 为伴随拉盖尔多项式

$$L_f^n(\zeta)=\frac{\Gamma(n+1+f)}{f!\Gamma(n+1)}F(-f,n+1,\zeta). \tag{15}$$

由此我们得到光场的解为

$$u(r,\phi,z)=C_{fn}L_f^n(r^2/w^2)\frac{r^n}{w^n}\exp(-r^2/2w^2)\times\exp[-\mathrm{i}\mu(4f+2n+2)z/w^2]\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}, \tag{16}$$

其中 C_{fn} 为归一化常数，使得传输光束的总功率守恒．光场的角向分布可选择 $\cos n\phi$ 和 $\sin n\phi$ 的线性组合，n 表征角向分布．径向分布则由 n 和 f 共同决定．光场的径向分布受角向分布影响，这是拉盖尔高

斯分布的一个特点[17].

3. 强非局域非线性介质中圆环形光孤子的形成

由方程(16)可以知道,光场的径向零点和极值点的位置由下列方程分别确定:

$$L_f^n(r^2/w^2)\frac{r^n}{w^n}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[L_f^n(r^2/w^2)\frac{r^n}{w^n}\exp(-r^2/2w^2)\right]=0. \tag{18}$$

图 1 给出了 $n=0$ 时不同 f 值对应的光场振幅横向分布.由图可以看出,拉盖尔高斯场是一个衰减场,这与厄米高斯场不同[16].图 2 描述了 $f=2$ 时正交于传输轴线截面上光束的光场分布以及强度分布,其中光束中心点位于传输轴线上.

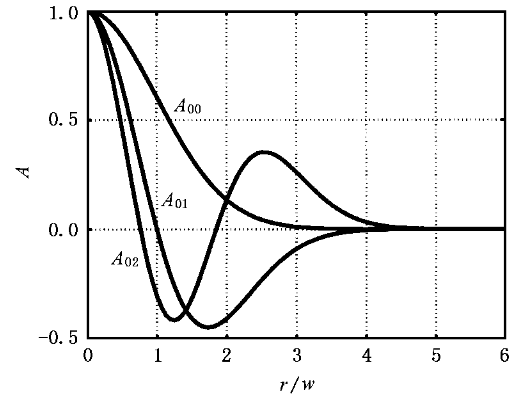

图 1　$n=0$ 时垂直于传输轴线截面上几个低阶拉盖尔高斯光场振幅的横向分布,光场沿横向快速衰减

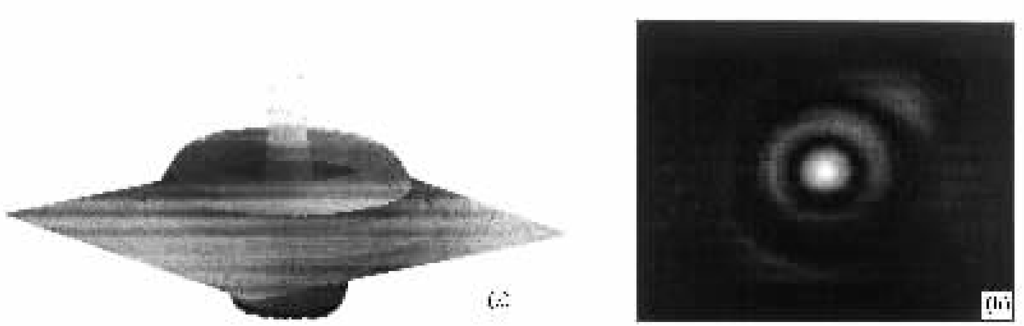

图 2　$n=0,f=2$ 时光束截面上的光场分布(a)和光束的强度分布(b)

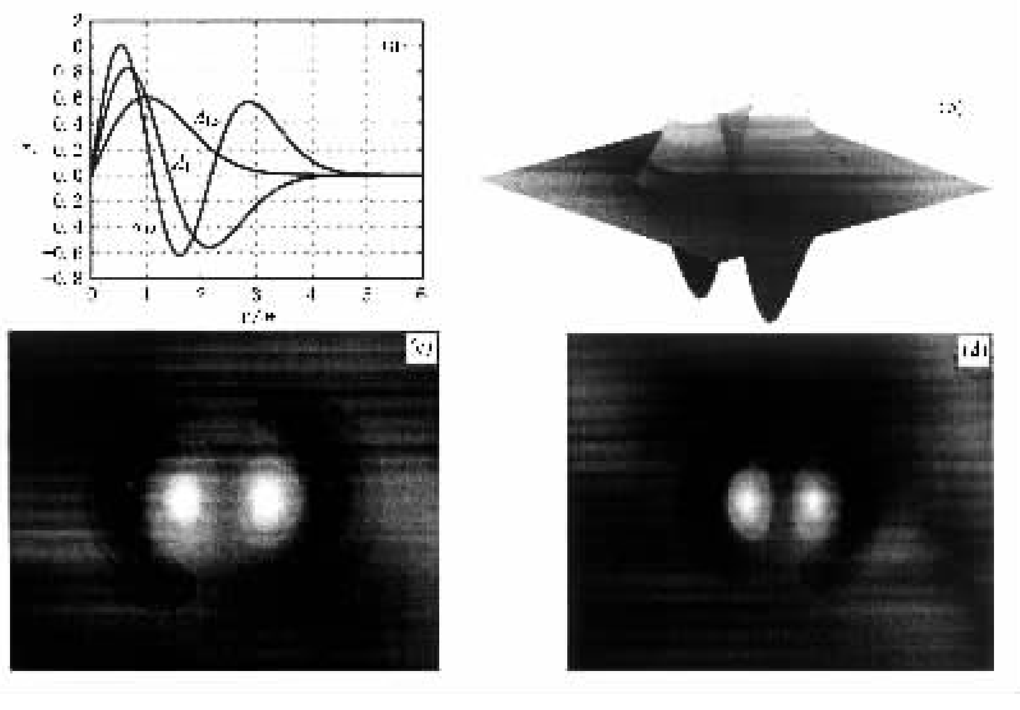

图 3　$n\neq0$ 时光束截面上沿横向的几个低阶拉盖尔高斯光场　(a)为光场振幅沿横向的变化规律;(b)描述的是 $n=2,f=0$ 时截面上的光场分布;(c),(d)分别相应于 $n=1,f=1$ 时和 $n=1,f=2$ 时截面上光束强度分布

对于不同的 f 值，场沿径向有 f 个零点，$f+1$ 个极值点，其中 $n=0$，$f=0$ 为基模高斯光束.

当 $n\neq 0$ 时场沿角向有 $2n$ 个零点和 $2n$ 个极值点，沿径向有 $f+1$ 个零点和 $f+1$ 个极值点. 图 3(a) 描述了 $n\neq 0$ 时几个低阶拉盖尔高斯光场的振幅横向分布. 图 3(b) 给出了 $n=2$，$f=0$ 时的光场分布. 图 3(c)，(d) 为光场正交于传输轴线的强度分布图，轴线上强度为零.

由方程(17)，(18) 可知，当 $f=0$ 时，对于 $n=0$ 情况，光场沿径向没有零点，$n\neq 0$ 时只有一个零点.

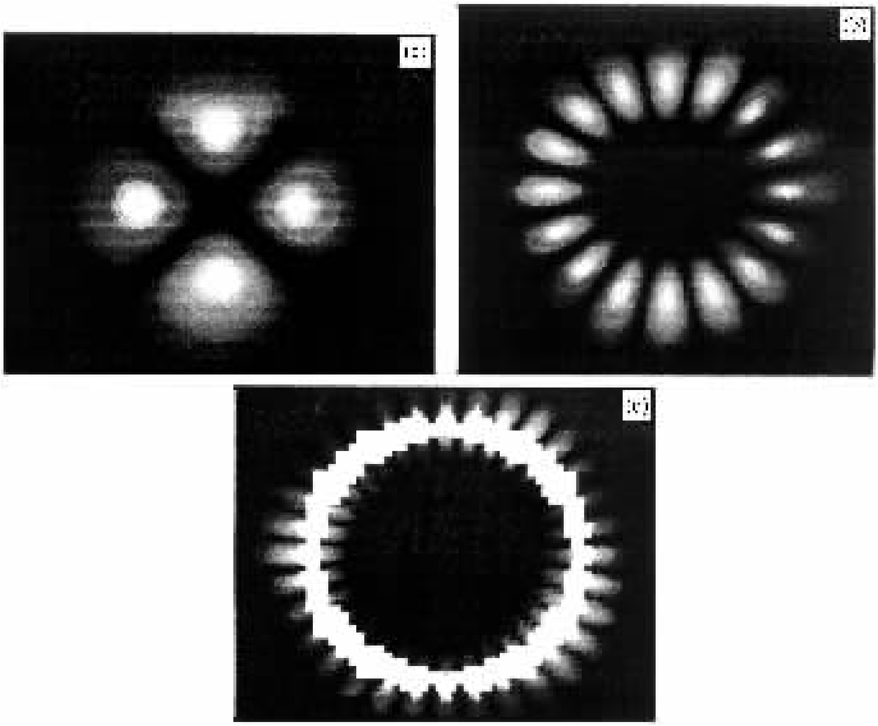

图 4 当 $f=0$ 时，光束截面上光斑的强度分布随 n 取值的变化而变化 (a)，(b)，(c) 分别相应于 n 取 2，8，16. 可以看出，当 n 的取值较大时，光斑将演化为圆环形

极值点位置位于 $r=\sqrt{n}w$ 处. 如图 4 所示，随着 n 取值的增大，角向光斑呈现规律性变化，当 n 取足够大时，光斑将演化为圆环形.

4. 结 论

本文利用强非局域非线性介质中光束传输所满足的 Snyder-Mitchell 模型得到了柱坐标系下 1+2 维传输光束的稳态解，给出了基模高斯解(即最低阶光孤子)和拉盖尔高斯解(即高阶模光孤子)，并由此得到了入射光束的临界功率. 文章分析了高阶模光孤子的演化规律，一定条件下空间光孤子将演化成圆环形.

[1] Snyder A W and Kivshar J 1997 *Opt. Soc. Am.* B **11** 3025

[2] Guo Q 2003 in Proceedings of APOC2003 (Asia-Pacific Optical an Wireless Communicatons Conference) Edited by C F Lam, C Fan, N Hanik, and K Oguchi 2004 *Optical Transmission, Switching, ab Subsystems* Proc. SPIE 5281 (SPIE-The International Society for Optical Engineering, Washington, USA) p.581

[3] Snyder A W and Mitcher D J 1997 *Science* **276** 1538

[4] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520

[5] Shen Y R . 1984 *The Principles of Nonlinear Optics* (New York: Wiley) p286 (in English)

[6] Yuri S Kivshar and George I Stegeman 2002 *Opt. Photonics News* **2** 59

Poccianti M, Brzdakiewicz K A and Assanto G 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335

[7] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J and Wyller J. 2001 *Phys. Rev.* E **64** 016612

[8] Guo Q ,Luo B, Yi F *et al* 2004 *Phys*. *Rev*. E **69** 016602

[9] Xie Y Q and Guo Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3020 (in Chinese) [谢逸群、郭 旗 2004 物理学报 53 3020]

[10] Xie Y Q and Guo Q 2004 *Opt*. *Quant*. *Electron* **36** 1335

[11] Guo Q and Xu C B 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3025 (in Chinese) [郭 旗、许超彬 2004 物理学报 53 3025]

[12] Zhang X P and Guo Q *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3178 (in Chinese) [张霞萍、郭 旗 2004 物理学报 54 3178]

[13] Wang X H and Guo Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3183 (in Chinese) [王形华、郭 旗 2005 物理学报 54 3183]

[14] Cao J N and Guo Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3688 (in Chinese) [曹觉能、郭 旗 2005 物理学报 54 3688]

[15] Conti C, Poccianti M and Assanto G 2003 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **91** 073901

[16] Conti C, Poccianti M and Assanto G R 2004 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **92** 113902

[17] Hutsebaut X, Haelterman M, Adamski A and Neyts K 2004 *Optics Communications* **233** 211

[18] Zhang K Q and LI D J 2001 *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics* (Beijing: Publishing Company of Electronics Industry) p572 (in Chinese) [张克潜,李德杰 2001 微波与光电子学中的电磁理论(北京:电子工业出版社)第 590 页]

[19] Hu S Z and Ni G J 2002 *Technique of the maths and physics* (Beijing: Publishing Company of Higher Education) p572 (in Chinese) [胡嗣柱,倪光炯 2002 数学物理方法(北京:高等教育出版社)第 167 页]

Analytical solution to the spatial optical solitons propagating in the strong nonlocal media*

Zhang Xia-Ping Guo Qi† Hu Wei

(*Laboratory of Light Transimission Optics*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

(Received 7 December 2004; revised manuscript received 25 April 2005)

Abstract

This paper discusses the optical beam (1 + 2D) of suitable input power propagating in the strong nolocal nonlinear media, which is governed by the Snyder-Mitchell model in the cylindrical coordinate. An exact analytical solution in Laguerre-Gaussian form is obtained. It is shown that the solution in the Gaussian form is the lowest-order mode. It is found for the first time that the necklace-ring spatial soliton exists in the strong nonlocal media.

Keywords: strong nonlocal media, Laguerre-Gaussian, high-order mode solitons

PACC: 4265S

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10474023), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant No. 04105804).

† E-mail: guoq@scnu.edu.cn