

# 经典 Kerr 黑洞和量子 Kerr 黑洞系统的微正则系综理论描述与统计“自举”条件\*

王丽萍<sup>1,2)</sup> 朱建阳<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 阜阳师范学院物理系, 阜阳 236041)

<sup>2)</sup> 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2005 年 1 月 6 日收到, 2005 年 4 月 27 日收到修改稿)

分别从 Kerr 黑洞的经典谱和量子谱出发, 建立了一个居于微正则系综理论描述的系统态密度的不等式, 并由此证明了 Kerr 黑洞满足统计“自举(bootstrap)”条件. 其主要结论是对于由大量 Kerr 黑洞组成的体系, 在高能极限下, 最可能的构型是一个黑洞将获得系统所有的质量和全部的角动量, 而且转动不会破坏黑洞的“自举”性质.

关键词: Kerr 黑洞, 统计“自举”问题

PACC: 9760L, 0420C

## 1. 引 言

自从 Bekenstein<sup>[1]</sup>和 Hawking<sup>[2-4]</sup>的开创性工作之后, 黑洞热力学和黑洞统计力学已成为黑洞物理中最受人关注的研究领域.

我们知道, 热现象的本质是温度和由温度所导致的热辐射, 黑洞的热辐射是 Hawking<sup>[2]</sup>在 1974 年的重要理论发现并且经过不同研究者利用不同方法进行了理论验证. 由于辐射, 黑洞视界面上入射的纯态演化为出射的具有热粒子的混合态(热态), 在此情况下, 量子相干性将会在黑洞的衰变中丢失, 量子力学的么正性原理也将会被违背<sup>[5-7]</sup>. 试图解决这个问题的方法之一是考虑“量子毛发(quantum hair)”效应<sup>[8,9]</sup>. 也就是说, 由引力塌缩而形成的黑洞除了像黑洞“无毛定理(no hair theorem)”所表述的包含质量、角动量和电荷少量的信息外, 还应有一系列的微观态, 其态密度  $\Omega(E)$  的对数即为黑洞的熵<sup>[10-12]</sup>. “量子毛发”效应能显著且定量地影响着黑洞的热力学行为, 而且我们期望黑洞能够包含大量的“量子毛发”, 以产生足够大的影响来恢复量子相干性. 另外, t 'Hooft<sup>[13]</sup>提出, 黑洞的行为就好像是一些特殊模式的“弦”, 所以在某种意义上, 黑洞可以被认为是由“弦”组成的. 由于“弦”携带了大量的激发态, 在那

里, 许多的“量子毛发”就可以恢复量子相干性.

据我们所知, 微正则系综理论描述中的统计“自举”条件对于某种“弦”来说是满足的<sup>[14-17]</sup>, 即有

$$\frac{\Omega(E)}{\rho(E)} \rightarrow 1, \quad \text{当 } E \rightarrow \infty \text{ 时}, \quad (1)$$

其中  $\Omega(E)$  是微正则系综的态密度,  $\rho(E)$  为“弦”态的简并度. 如果黑洞真的能够被认为是由“弦”组成, 那么考察黑洞系统是否遵守“自举”条件将是件很有意义的事情. 受粒子物理早期的“强子”模型<sup>[14-17]</sup>的启发, Harns 与 Leblanc<sup>[18,19]</sup>把黑洞看作由大量其他黑洞组成的复合物, 提出了黑洞的统计力学描述. 这种统计力学描述, 对处理现今的黑洞“熵”的问题, 有着一定的意义<sup>[20]</sup>.

最近, Huang<sup>[21]</sup>在 Harns 和 Leblanc<sup>[18,19]</sup>进行的研究的基础上, 分别研究了由球对称的 Schwarzschild 黑洞和 Reisser-Nordstrom 带电黑洞所构成的微正则体系的统计“自举”问题. 在 Huang 的研究中, 微观态的简并度取为

$$\rho \propto \exp(S), \quad S = A/4, \quad (2)$$

其中  $S$  为 Bekenstein-Hawking 熵,  $A$  为视界面积, 分别考虑了  $A$  具有经典谱和量子谱的两种情况. 其结果是, 这种球对称黑洞体系的最可能的构型是, 一个黑洞将获得系统所有的质量和全部的电荷, 而且带电不会破坏黑洞的“自举”性质.

\* 国家自然科学基金(批准号: 10375008)和国家重点基础研究发展计划(973 计划, 批准号 2003CB71630)资助的课题.

† E-mail: zhujy@bnu.edu.cn

作为以上情况的进一步的扩展, 我们感兴趣对转动黑洞进行研究. 在经典和量子情况下, 转动黑洞体系是否也满足“自举”条件? 本文考虑具有轴对称的 Kerr 黑洞, 对于由大量 Kerr 黑洞所组成的理想体系, 我们将建立一个有用的微正则态密度的不等式, 并用它来证明, 在极高能极限下 Kerr 黑洞体系的最稳定的结构模式是一个黑洞将获得全部的能量和所有的转动. 也就是说考虑到黑洞的转动后, 转动因子依然不会破坏黑洞的“自举”条件.

## 2. 具有连续谱(经典情况)的 Kerr 黑洞体系的微正则系综理论描述

Kerr 黑洞是不带电但具有转动的黑洞, 在经典情况下, 视界面积具有连续谱(自然单位  $\hbar = c = G = 1$ )

$$A(m, J) = 8\pi(m^2 + \sqrt{m^4 - J^4})^2, \quad (3)$$

$m$  是黑洞的质量,  $J$  为转动角动量.

如果体系是由大量无相互作用的 Kerr 黑洞所组成的, 则体系总的态密度为<sup>[18, 19, 22]</sup>

$$\Omega(E, V, J) = \sum_{N=1}^{\infty} \Omega_N(E, V, J). \quad (4)$$

其中  $\Omega_N(E, V, J)$  正是具有确定的粒子数(一个黑洞作为一个粒子) $N$ 、确定的能量  $E$ (含角动量  $J$ ) 和确定的体积  $V$  的微正则系综的态密度, 可表示为

$$\begin{aligned} \Omega_N(E, V, J) &= \frac{V^N}{N(2\pi\hbar)^{3N}} \prod_{i=1}^N \int_{m_0}^{\infty} dm_i \\ &\times \int_{-m_i}^{m_i} dJ_i \alpha(m_i, J_i) \int_{-\infty}^{\infty} dP_i^3 \\ &\times \delta(E - \sum_i E_i) \delta(\sum_i P_i) \\ &\times \delta(J - \sum_i J_i), \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $m_0$  为黑洞的最轻的质量,  $\alpha(m, J)$  为该体系的微观态的简并度

$$\begin{aligned} \alpha(m, J) &= C \exp(A(m, J)/4) \\ &= C \exp[2\pi(m^2 + \sqrt{m^4 - J^4})^2]. \quad (6) \end{aligned}$$

我们假设黑洞符合色散关系,  $m_i^2 = E_i^2 - P_i^2$ , 因此有

$$\begin{aligned} \alpha(m_i, J_i) &= C \cdot \exp\{2\pi[E_i^2 - P_i^2 \\ &+ \sqrt{(E_i^2 - P_i^2)^2 - J_i^4}]\}. \quad (7) \end{aligned}$$

由于在极高能态下(5)式中动量积分可以忽略<sup>[18, 19]</sup>, 于是(5)式变为  $N$  重高斯积分, 即

$$\begin{aligned} \Omega_N(E, V, J) &= \frac{V^N}{N(2\pi\hbar)^{3N}} \prod_{i=1}^N \int_{m_0}^{\infty} dE_i \\ &\times \int_{-E_i}^{E_i} dJ_i \alpha(m_i, J_i) \delta(E - \sum_i E_i) \\ &\times \delta(J - \sum_i J_i). \quad (8) \end{aligned}$$

我们现在来分析微正则态密度(8)式, 当  $N = 1$  时, 有

$$\Omega_1(E, V, J) = \frac{CV}{(2\pi\hbar)^3} \exp[2\pi(E^2 + \sqrt{E^4 - J^2})^2]. \quad (9)$$

当  $N = 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \Omega_2(E, V, J) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{CV}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 \left\{ \int_{m_0}^{\infty} dE_1 \int_{m_0}^{\infty} dE_2 \int_{-E_1}^{E_1} dJ_1 \right. \\ &\times \int_{-E_2}^{E_2} dJ_2 \exp[2\pi(E_1^2 + \sqrt{E_1^4 - J_1^2})^2 \\ &+ (E_2^2 + \sqrt{E_2^4 - J_2^2})^2] \\ &\times \delta(E - E_1 - E_2) \\ &\left. \times \delta(J - J_1 - J_2) \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

由于  $E = E_1 + E_2$  以及  $J = J_1 + J_2$ , 我们有下列不等式关系:

$$\begin{aligned} &(E_1^2 + \sqrt{E_1^4 - J_1^2})^2 + (E_2^2 + \sqrt{E_2^4 - J_2^2})^2 \\ &= E_1^4 + E_2^4 + (E_1^2 - J_1^2) + (E_2^2 - J_2^2) \\ &\quad + 2E_1^2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2} + 2E_2^2 \sqrt{E_2^4 - J_2^2} \\ &< E_1^4 + E_2^4 + (E^2 - J^2) + 2E^2 \sqrt{E^4 - J^2} \\ &\quad - 2E_1^2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2}, \quad (11) \end{aligned}$$

其中, 我们考虑了以下两个不等式(见附录 A, B)

$$E_1^4 - J_1^2 + E_2^4 - J_2^2 < E^4 - J^2, \quad (12)$$

$$\sqrt{E_1^4 - J_1^2} + \sqrt{E_2^4 - J_2^2} < \sqrt{E^4 - J^2}. \quad (13)$$

由附录 C 和 D, 我们知道有不等式

$$\begin{aligned} &\int_0^{E_1^2} dJ_1 \int_0^{E_2^2} dJ_2 \exp(-4\pi E_2^2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2}) \delta(J - J_1 - J_2) \\ &\leq \int_0^{E_1^2} dJ_1 \exp(-4\pi(J - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}) \leq H(J), \quad (14) \end{aligned}$$

和不等式

$$\begin{aligned} &\int_{m_0}^{\infty} dE_1 \int_{m_0}^{\infty} dE_2 \exp(2\pi(E_1^4 + E_2^4)) \delta(E - E_1 - E_2) \\ &< \int_0^{\infty} dE_1 \exp(2\pi(E_1^4 + (E - E_1)^4)) < e^{2\pi E^4} \alpha(E) \quad (15) \end{aligned}$$

成立, 其中

$$H(J) \equiv \int_0^J dJ_1 \exp(-4\pi(J - J_1) \sqrt{J^2 - J_1^2}) < h_0$$

$$\approx 0.195, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} G(E) &\equiv E \int_0^1 dx \exp\left\{4\pi E^4 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{16}\right]\right\} \\ &< \frac{4}{\pi E^3} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{4}\pi E^4\right)\right] < g_0 \\ &\approx 0.621. \quad (17) \end{aligned}$$

对函数  $G(E)$  的简单的分析和计算发现, 函数  $G(E)$  在自变量  $E$  为  $[0, 0.801]$  的区间内是增函数, 其函数值从 0 增加到最大值  $g_0 \approx 0.621$ ; 当  $E$  继续增大时,  $G$  减小并趋于  $4/\pi E^3$ .

将 (11) 式的结果代入 (10) 式, 并考虑 (15) (16) 不等式, 可以得到  $N=2$  时, 体系的态密度满足

$$\begin{aligned} \Omega_N(E, V, J) &< \frac{1}{2} \left[ \frac{CV}{(2\pi)^3} \right]^2 \exp[2\pi(E^2 \\ &+ \sqrt{E^4 - J^2})] \cdot 4h_0 \cdot G(E) \quad (18) \end{aligned}$$

从 (18) 式可以看出, 对于由具有连续谱的 Kerr 黑洞组成的具有确定能量和体积的系统中, 两个黑洞组成的微正则系综的态密度总小于一个黑洞的微正则系综态密度与能量依赖的函数  $G(E)$  的乘积. 由于  $G(E)$  总小于 1 的, 并且随能量的增加而趋于 0, 我们总可以找到一个能量  $E'$ , 使得当体系的能量大于  $E'$  时, 一个黑洞的微正则系综态密度总大于两个黑洞的微正则系综的态密度. 下面我们将证明在高能条件下, 具有连续谱的  $(N-1)$  个黑洞的微正则系综的态密度总大于  $N$  个黑洞的微正则系综的态密度, 进而证明, 在由 Kerr 黑洞组成的确定能量和体积的体系中, 1 个黑洞所具有的微正则态密度大于 2 个到无穷个黑洞的微正则系综的态密度之和.

当  $N > 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \Omega_N(E, V, J) &< \frac{1}{N!} \left[ \frac{CV}{(2\pi)^3} \right]^N \left\{ \int_0^\infty dE_1 \int_0^\infty dE_2 \dots \right. \\ &\times \int_0^\infty dE_N \int_{-E_1}^{E_1} dJ_1 \int_{-E_2}^{E_2} dJ_2 \dots \int_{-E_N}^{E_N} dJ_N \\ &\times \exp[2\pi(E_1^2 + \sqrt{E_1^4 - J_1^2})^2 + \dots \\ &+ (E_N^2 + \sqrt{E_N^4 - J_N^2})^2] \\ &\times \delta(E - \sum_i E_i) \\ &\times \delta(J - \sum_i J_i) \left. \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

多次运用 (12) 和 (13) 式, 可得

$$\begin{aligned} &(E_1^2 + \sqrt{E_1^4 - J_1^2})^2 + (E_2^2 + \sqrt{E_2^4 - J_2^2})^2 \\ &+ \dots + (E_N^2 + \sqrt{E_N^4 - J_N^2})^2 \\ &< \sum_{i=1}^N E_i^4 + (E^4 - J^2) + 2E^2 \sqrt{E^4 - J^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2\sqrt{E_1^4 - J_1^2} \sum_{i \neq 1} E_i^2 - 2\sqrt{E_2^4 - J_2^2} \sum_{i \neq 2} E_i^2 \\ &- \dots - 2\sqrt{E_{N-1}^4 - J_{N-1}^2} \sum_{i \neq N-1} E_i^2, \quad (20) \end{aligned}$$

将 (20) 式代入 (19) 式, 对角动量部分积分, 有

$$\begin{aligned} &\int_{-E_1}^{E_1} dJ_1 \int_{-E_2}^{E_2} dJ_2 \dots \int_{-E_N}^{E_N} dJ_N \\ &\times \exp\left[-4\pi\left(\sqrt{E_1^4 - J_1^2} \sum_{i \neq 1} E_i^2\right.\right. \\ &\left.\left.- \dots - \sqrt{E_{N-1}^4 - J_{N-1}^2} \sum_{i \neq N-1} E_i^2\right)\right] \\ &\times \delta\left(J - \sum_{i=1}^N J_i\right) \\ &< 2^N \int_0^{E_1} dJ_1 \int_0^{E_2} dJ_2 \dots \int_0^{E_N} dJ_N \\ &\times \exp\left[-4\pi\left(\sqrt{E_1^4 - J_1^2} \sum_{i \neq 1} J_i\right.\right. \\ &\left.\left.- \dots - \sqrt{E_{N-1}^4 - J_{N-1}^2} \sum_{i \neq N-1} J_i\right)\right] \\ &\times \delta\left(J - \sum_{i=1}^N J_i\right) \\ &= 2^N \int_0^{E_1} dJ_1 \exp[-4\pi\sqrt{E_1^4 - J_1^2}(J - J_1)] \\ &\times \int_0^{E_2} dJ_2 \exp[-4\pi\sqrt{E_2^4 - J_2^2}(J - J_2)] \times \dots \\ &\times \int_0^{E_{N-1}} dJ_{N-1} \exp[-4\pi\sqrt{E_{N-1}^4 - J_{N-1}^2}(J - J_{N-1})] \\ &< 2^N (h_0)^{N-1}, \quad (21) \end{aligned}$$

对能量部分积分, 有

$$\begin{aligned} &\int_{m_0}^\infty dE_1 \int_{m_0}^\infty dE_2 \dots \int_{m_0}^\infty dE_N \\ &\times \exp\left(2\pi \sum_{i=1}^N E_i^4\right) \delta\left(E - \sum_{i=1}^N E_i\right) \\ &< \int_0^{E_1} dE_1 \int_0^{E-E_1} dE_2 \dots \int_0^{E-E_1-\dots-E_{N-2}} dE_{N-1} \\ &\times \exp\left\{2\pi\left[\sum_{i=1}^{N-1} E_i^4 + \left(E - \sum_{i=1}^{N-1} E_i\right)^4\right]\right\} \\ &< e^{2\pi E^4} \int_0^E dE_1 \int_0^{E-E_1} dE_2 \dots \int_0^{E-E_1-\dots-E_{N-2}} dE_{N-1} \\ &\times \exp\left\{4\pi\left[\left(E_1 - \frac{E}{2}\right)^4 - \frac{E^4}{16}\right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( E_2 - \frac{1}{2}(E - E_1) \right)^4 - \frac{(E - E_1)^4}{16} \\
& + \dots + \left( E_{N-1} - \frac{1}{2} \left( E - \sum_{i=1}^{N-2} E_i \right) \right)^4 \\
& - \frac{\left( E - \sum_{i=1}^{N-2} E_i \right)^4}{16} \left. \right\} \\
& < e^{2\pi E^4} (g_0)^{N-2} \cdot \frac{4}{\pi E^3} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{4}\pi E^4\right) \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

所以 (19) 式可以表示为

$$\begin{aligned}
\Omega_N(E, V, J) & < \frac{1}{N!} \left( \frac{2CVg_0 h_0}{(2\pi)^3} \right)^N \\
& \times \exp\left[ 2\pi \left( E^2 + \sqrt{E^4 - J^2} \right) \mathbb{I}(g_0 h_0) \right]^2 \\
& \times \left\{ \frac{4}{\pi E^3} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{4}\pi E^4\right) \right] \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

重复以上的推导,可以得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{N=2}^{\infty} \Omega_N(E, V, J) \\
& < \exp\left[ 2\pi \left( E^2 + \sqrt{E^4 - J^2} \right) \right] \\
& \times (h_0 g_0)^{-2} \cdot \left[ \frac{4}{\pi E^3} \left( 1 - e^{-\frac{1}{4}\pi E^4} \right) \right] \\
& \times \exp\left( \frac{2CV}{(2\pi)^3} g_0 h_0 \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

因此,在高能极限下,即

$$E \gg \left[ \frac{32\pi^2}{CV} (h_0 g_0)^{-2} \exp\left( \frac{2CV}{(2\pi)^3} g_0 h_0 \right) \right]^{1/3} \quad (25)$$

时,有不等式

$$\Omega_1(E, V, J) > \sum_{N=2}^{\infty} \Omega_N(E, V, J) \quad (26)$$

成立.所以,Kerr 黑洞系统的总的态密度可近似写成

$$\begin{aligned}
\Omega(E, V, J) & \approx \Omega_1(E, V, J) \\
& = \frac{CV}{(2\pi)^3} \exp\left[ 2\pi \left( E^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{E^4 - J^2} \right) \right]. \quad (27)
\end{aligned}$$

(27) 式说明,对于由大量的具有连续谱的 Kerr 黑洞组成的体系,在高能极限下,系统总的态密度可以用一个黑洞的态密度来近似表示.这也表明了,由连续谱的 Kerr 黑洞所组成的,具有确定能量和体积的系统的,最可能的结构模式是  $N=1$ ,即一个 Kerr 黑洞获得系统的几乎全部的质量和所有的转动角动量;“自举”条件被遵守.以上我们证明了,在连续谱下,Kerr 黑洞的转动不会破坏“自举”条件.下面将讨论具有分立谱的 Kerr 黑洞,看其是否也满足“自举”条件?

### 3. 具有分立谱(量子情况)的 Kerr 黑洞体系的微正则系综理论描述

将 Kerr 黑洞的视界量子化<sup>[23,24]</sup>,面积谱可以写成

$$A(n, m) = 8\pi \left( n + m + \frac{1}{2} \right), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$n$  和  $m$  分别表征黑洞的质量和转动的量子数.其中转动量子数  $m$  与转动算符  $J_{cl}$  的关系是  $J_{cl} = \hbar m$ .所以,微观态的简并度为

$$\rho(n, l) = C e^{2\pi(n+m)}. \quad (29)$$

体系的总的态密度可以写成

$$\Omega(E, V, J) = \sum_{N=1}^{\infty} \Omega_N(E, V, J), \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned}
\Omega_N(E, V, J) & = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=1}^{\infty} \sum_{m_i=1}^{\infty} \rho(n_i, m_i) \\
& \times \delta\left(E, \sum_{i=1}^N \sqrt{n_i}\right) \cdot \delta\left(J, \sum_{i=1}^N m_i\right) \\
& = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=1}^{\infty} \sum_{m_i=1}^{\infty} C e^{2\pi(n_i+m_i)} \\
& \times \delta\left(E, \sum_{i=1}^N \sqrt{n_i}\right) \\
& \times \delta\left(J, \sum_{i=1}^N m_i\right). \quad (31)
\end{aligned}$$

当  $N=1$  时,

$$\Omega_1(E, V, J) = C e^{2\pi(E^2+J)}. \quad (32)$$

当  $N=2$  时,

$$\begin{aligned}
\Omega_2(E, V, J) & = \frac{C^2}{2!} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \\
& \times \exp\left[ 2\pi(n_1 + m_1 + n_2 + m_2) \right] \\
& \times \delta\left(E, \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2}\right) \cdot \delta\left(J, m_1 + m_2\right) \\
& = \frac{C^2}{2} e^{2\pi(J+E^2)} \cdot K(E), \quad (33)
\end{aligned}$$

其中,我们定义

$$K(E) = \sum_{n_1=1}^{(E-1)^2} \exp\left[ 4\pi \cdot (n_1 - E\sqrt{n_1}) \right]. \quad (34)$$

简单的计算发现, $K(E)$  是一个关于自变量  $E$  的锐减函数.例如  $K(2) \approx 10^{-6}$ ,  $K(6) \approx 10^{-27}$ ,  $K(12) \approx 10^{-60}$ .由于能量依赖的函数  $K(E)$  总小于 1,且随着能量的增大趋于零,因此,在高能情况下,对于分离

谱的 Kerr 黑洞,总可以证明两个黑洞组成的微正则系综的态密度小于一个黑洞的微正则态密度.

$$\begin{aligned}
 & \text{当 } N > 2 \text{ 时,} \\
 & \Omega_N(E, V, J) \\
 &= \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=1}^{\infty} \sum_{m_i=1}^{\infty} C \exp[2\pi(n_i + m_i)] \\
 & \times \delta\left(E, \sum_{i=1}^N \sqrt{n_i}\right) \delta\left(J, \sum_{i=1}^N m_i\right) \\
 &= \frac{C^N}{N!} e^{2\pi J} \sum_{n_1=1}^{(E-1)^2} \exp(2\pi n_1) \times \sum_{n_2=1}^{(E-1-\sqrt{n_1})^2} \exp(2\pi n_2) \dots \\
 & \quad \left(E-1-\sum_{i=1}^{N-2} \sqrt{n_i}\right)^2 \\
 & \times \sum_{n_{N-1}=1} \exp(2\pi n_{N-1}) \\
 & \times \exp[2\pi(E - \sqrt{n_1} - \sqrt{n_2} - \dots - \sqrt{n_{N-1}})] \\
 &= \frac{C^N}{N!} e^{2\pi(J+E)} \sum_{n_1=1}^{(E-1)^2} \exp[4\pi(n_1 - \sqrt{n_1}E)] \\
 & \quad \left(E-1-\sqrt{n_1}\right)^2 \\
 & \times \sum_{n_2=1} \exp\{4\pi[n_2 - \sqrt{n_2}(E - \sqrt{n_1})]\} \\
 & \quad \left(E-1-\sum_{i=1}^{N-2} \sqrt{n_i}\right)^2 \\
 & \times \dots \times \sum_{n_{N-1}=1} \exp\{4\pi[n_{N-1} \\
 & \quad - \sqrt{n_{N-1}}(E - \sqrt{n_1} - \dots - \sqrt{n_{N-2}})]\} \\
 & < \frac{C^N}{N!} \exp[2\pi(J + E^2)] \cdot K(E)^{N-1} \\
 & < \frac{C^N}{N!} \exp[2\pi(J + E^2)] \cdot K(E). \quad (35)
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \sum_{N=2}^{\infty} \Omega_N(E, V, J) &< K(E) e^{2\pi(J+E^2)} \left(\frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \dots\right) \\
 &< K(E) (e^C - 1) e^{2\pi(J+E^2)}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

由于  $K(E)$  是  $E$  的锐减函数且小于 1,只要系统的能量足够大,总可以得到

$$\sum_{N=2}^{\infty} \Omega_N(E, V, J) < \Omega_1(E, V, J). \quad (37)$$

于是, Kerr 黑洞体系的总的态密度可以近似为

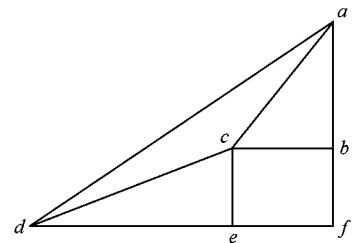
$$\Omega(E, V, J) \approx \Omega_1(E, V, J) = C e^{2\pi(E^2+J)}. \quad (38)$$

因此,对于量子化形式的 Kerr 黑洞组成的具有确定体积和能量的黑洞体系,只要系统的能量足够大,其最有可能的结构模式仍是  $N=1$ ,这意味着一个黑洞将获得体系的几乎全部的质量和所有的转动,“自举”条件仍然被遵守.

## 4. 结 论

本文运用黑洞的微正则系综理论,讨论了具有连续谱和量子谱的 Kerr 黑洞的统计性质.结果表明, Kerr 黑洞也满足“自举”条件,转动并不破坏黑洞的“自举”性质.在文中,我们建立了的  $N$  个 Kerr 黑洞组成的微正则系综态密度的不等式,并依据定义的一个能量  $E$  依赖的中间函数(这个中间函数恒小于 1,且在高能区域,函数值趋于零)来证明  $N+1$  个黑洞组成的微正则系综的态密度总是小于  $N$  个黑洞的态密度.一旦这个函数关系建立起来,重复使用这个关系式,就可以得到,在高能极限下,由大量 Kerr 黑洞组成的具有确定能量和体积的系统的总的态密度可以用一个 Kerr 黑洞的态密度来近似表示.这就意味着,在高能极限下,体系的最可能的结构模式是  $N=1$ ,一个 Kerr 黑洞获得体系几乎全部的质量和所有的角动量,“自举”条件被满足.

## 附录 A



如上图,令  $ac = E_1^2, cd = E_2^2, ab = J_1, ce = J_2$ , 则

$$\begin{aligned}
 & (E_1^4 - J_1^2) + (E_2^4 - J_2^2) \\
 &= (ac^2 - ab^2) + (cd^2 - ce^2) \\
 &= cb^2 + de^2 < (cb + de)^2 = df^2 \\
 &= ad^2 - af^2 < (ac + cd)^2 - (ab + bf)^2 \\
 &= (E_1^2 + E_2^2) - J^2 < E^4 - J^2. \quad (A1)
 \end{aligned}$$

## 附录 B

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{E_1^4 - J_1^2} + \sqrt{E_2^4 - J_2^2} \\
 & \equiv \sqrt{ac^2 - ab^2} + \sqrt{cd^2 - ce^2} \\
 &= cb + de = ef + de = df = \sqrt{ad^2 - af^2} \\
 & < \sqrt{(ac + cd)^2 - af^2} = \sqrt{(E_1^2 + E_2^2)^2 - J^2} \\
 & < \sqrt{E^4 - J^2}. \quad (B1)
 \end{aligned}$$

## 附录 C

由于  $E_2^2 \geq J_2$  所以

$$\begin{aligned} & \int_0^{E_1^2} dJ_1 \int_0^{E_2^2} dJ_2 \exp(-4\pi E_2^2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2}) \delta(J - J_1 - J_2) \\ & \leq \int_0^{E_1^2} dJ_1 \int_0^{E_2^2} dJ_2 \exp(-4\pi J_2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2}) \delta(J - J_1 - J_2). \\ & = \int_0^{E_1^2} dJ_1 \exp[-4\pi(J - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}], \end{aligned}$$

当  $J \geq E_1^2$  时 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{E_1^2} dJ_1 \exp[-4\pi(J - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}] \\ & \leq \int_0^{E_1^2} dJ_1 \exp[-4\pi(E_1^2 - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}] \\ & = H(E_1^2). \end{aligned}$$

当  $J \leq E_1^2$  时, 由于  $J_2 = J - J_1 > 0$ , 可以把  $J_1$  的积分区间限制在  $[0, J]$  则

$$\begin{aligned} & \int_0^{E_1^2} dJ_1 \exp[-4\pi(J - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}] \\ & \leq \int_0^J dJ_1 \exp[-4\pi(J - J_1) \sqrt{E_1^4 - J_1^2}] \\ & \leq \int_0^J dJ_1 \exp[-4\pi(J - J_1) \sqrt{J^2 - J_1^2}] \\ & = H(J). \end{aligned}$$

因此, 有不等式

$$\begin{aligned} & \int_0^{E_1^2} dJ_1 \int_0^{E_2^2} dJ_2 \exp(-4\pi E_2^2 \sqrt{E_1^4 - J_1^2}) \\ & \times \delta(J - J_1 - J_2) \leq H(J) \end{aligned} \quad (C1)$$

成立. 对函数  $H(J)$  简单的分析和计算表明, 函数  $H(J)$  在自变量  $J$  为  $[0, 0.358]$  的区间内是增函数, 函数值将从 0 增加到最大值  $h_0 \approx 0.195$  之后,  $H$  随  $J$  的增加而减小.

## 附录 D

$$\begin{aligned} & \int_{m_0}^{\infty} dE_1 \int_{m_0}^{\infty} dE_2 \exp[2\pi(E_1^4 + E_2^4)] \delta(H - E_1 - E_2) \\ & < \int_0^{\infty} dE_1 \int_0^{\infty} dE_2 \exp[2\pi(E_1^4 + E_2^4)] \delta(H - E_1 - E_2) \\ & = \int_0^E dE_1 \exp[2\pi(E_1^4 + (E - E_1)^4)] \\ & = \int_0^1 E dx \exp[2\pi E^4(x^4 + (1-x)^4)] \\ & = e^{2\pi E^2} E \int_0^1 dx \exp[4\pi E^4(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x)], \end{aligned}$$

由于在  $[0, 1]$  区间内, 有不等式  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x < (x - 1/2)^4 - 1/16$  成立. 所以

$$\begin{aligned} & \int_{m_0}^{\infty} dE_1 \int_{m_0}^{\infty} dE_2 \exp[2\pi(E_1^4 + E_2^4)] \delta(H - E_1 - E_2) \\ & < e^{2\pi E^2} E \int_0^1 dx \exp\{4\pi E^4[(x - 1/2)^4 - 1/16]\}, \end{aligned}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned} G(E) & = E \int_0^1 dx \exp\left\{4\pi E^4 \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{16} \right]\right\} \\ & = 2E e^{-\frac{1}{4}\pi E^4} \int_0^{1/2} dy \exp(4\pi E^4 y^4) \\ & < 2E e^{-\frac{1}{4}\pi E^4} \int_0^{1/2} dy \exp(\pi E^4 y/2) \\ & = \frac{4}{\pi E^3} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{1}{4}\pi E^4\right) \right\}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_{m_0}^{\infty} dE_1 \int_{m_0}^{\infty} dE_2 \exp[2\pi(E_1^4 + E_2^4)] \\ & \times \delta(E - E_1 - E_2) < e^{2\pi E^4} G(E). \end{aligned} \quad (D1)$$

对函数  $G(E)$  进行简单的分析和计算, 容易得到函数  $G(E)$  在  $[0, 0.801]$  区间是增函数, 对应的函数值  $G$  从 0 增加到最大值  $g_0 \approx 0.621$  当  $E$  继续增大时,  $G$  趋于  $4/\pi E^3$ .

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **13** 191

[2] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[3] Hawking S W 1975 *Commun. Phys.* **43** 199

[4] Hawking S W 1976 *Phys. Rev. D* **13** 191

[5] Hawking S W 1976 *Phys. Rev. D* **14** 2460

[6] Preskill J, Schwarz P, Shapere A, Trivedi S and Wilczek F 1991 *Mon. Phys. Lett. A* **6** 2353

[7] Coleman S, Preskill J and Wilczek F 1992 *Nucl. Phys. B* **378** 175

[8] Krauss L M and Wilczek F 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1221

[9] Coleman S, Schwarz J and Wilczek F 1992 *Nucl. Rev. B* **378** 175

[10] Wan L F and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 109

[11] Luo Z J and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 935 (in Chinese)

[罗志坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 935]

[12] Zhao Z and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558 (in Chinese)

[赵 峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]

[13] 't Hooft G 1990 *Nucl. Phys. B* **335** 138

[14] Bowick M and Wijewardhana L 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2485

[15] Hagedorn R 1965 *Nuovo Cimento Suppl.* **3** 147

[16] Frautschi S 1971 *Phys. Rev. D* **3** 2821

[17] Carlitz R D 1972 *Phys. Rev. D* **5** 3231

[18] Harms B and Leblanc Y 1992 *Phys. Rev. D* **46** 2334

[19] Harms B and Leblanc Y 1992 *Phys. Rev. D* **47** 2438

[20] Prolov V P and Fursaev D V 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 2041

[21] Huang W H 2000 *Phys. Rev. D* **62** 043002

[22] Casadio R, Harms B and Leblanc Y 1998 *Phys. Rev. D* **57** 1309

[23] Barvinsky A, Das S and Kunstatler G 2001 *Class. Quant. Grav.* **18** 4845

[24] Gour G and Medved A J M 2003 *Class. Quant. Grav.* **20** 2261

# Microcanonical statistics of Kerr black holes and the bootstrap condition <sup>\*</sup>

Wang Li-Ping<sup>1,2)</sup> Zhu Jian-Yang<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*Department of Physics, Fuyang Normal College, Fuyang 236041, China*

<sup>2)</sup>*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

( Received 6 January 2005 ; revised manuscript received 27 April 2005 )

## Abstract

The microcanonical statistics of the Kerr black holes is analyzed. We have set up an inequality in the microcanonical density for both continuous spectrum and discrete spectrum, and have verified that Kerr black holes obey the statistical bootstrap condition. It is then used to show that the most probable configuration in the gases of Kerr black holes is that one black hole acquires all of the mass and all of the rotation at the high-energy limit, so rotation does not break the bootstrap property.

**Keywords :** Kerr black holes, statistical bootstrap problem

**PACC :** 9760L, 0420C

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10375008 ) and The National Key Program of Basic Research Development in China ( Grant No. 2003CB71630 ).