第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5511-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.12, December, 2005

机电动力系统的动量依赖对称性和非 Noether 守恒量*

郑世旺[1)] 傅景礼[1)2)3)] 李显辉[3)]

1)(商丘师范学院物理系, 商丘 476000)

2)(浙江理工大学物理系, 杭州 310018)

3)(青岛大学物理系, 青岛 266071)

(2004 年 12 月 10 日收到; 2005 年 6 月 27 日收到修改稿)

研究了 Lagrange-Maxwell 机电动力系统的 Hamilton 正则方程及动量依赖对称性的定义、判据、结构方程和守恒量的形式. 研究表明, 结构方程中的函数 ψ 只需是对称群的不变量. 得到求解机电动力系统守恒量的新方法, 并给出了应用实例.

关键词: 机电动力系统, Lie 群分析, 对称性, 守恒量

PACC: 0320

1. 引 言

Noether[1] 指出: 动力学系统的对称性与守恒量是一一对应的. 通过研究系统的某种对称性质给出系统的第一积分已成为解决实际问题的一个重要方法[2—7]. 寻求系统的守恒量有三种现代方法: 基于系统的 Hamilton 作用量在无限小变换下的 Noether 方法、基于系统的微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 方法和无限小变换下物理量满足的微分方程形式不变的梅方法(形式不变性方法). 力学系统 Noether 对称性的理论研究已趋于完善[8—10], 应用研究在不断发展[11—13]. Lie 方法始于挪威数学家 Lie 的工作, 1979 年 Lutzky 将 Lie 的扩展群方法引入力学领域, 提出了力学系统的微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 对称性概念[14,15]. 在此后力学系统的 Lie 对称性研究沿着两个方向迅速发展: 一是利用 Noether 等式寻求系统 Lie 对称性 Noether 型守恒量研究, 也就是我们通常所称的 Lie 对称性[16—18]; 二是非 Noether 型的 Lie 对称性, 该 Lie 对称性不能保护系统的作用量积分, 我们称之为非 Noether 对称性. Lutzky, Hojman 等对非 Noether 对称性作了一系列的研究, 直接导出了非 Noether 守恒量[19—25]. 1992 年 Hojman 给出一个定理——Hojman 定理, 该定理不用 Lagrange 函数和 Hamilton 函数而直接导出系统的非 Noether 守恒量[26]. 接着, 梅凤翔[27, 28] 研究了相空间中的非 Noether 守恒量. 最近, 我们得到了非保守系统 Lutzky 形式的非 Noether 守恒量和非完整系统速度依赖对称性的非 Noether 守恒量[29,30], 并且对文献[27,28]作了进一步推广, 给出了寻求 Hamilton 正则系统非 Noether 守恒量的新方法[31]. 现在, 关于非 Noether 对称性的研究取得了一些重要结果, 但仅限于约束力学系统[32—37]. 梅凤翔提出梅方法并导出约束力学系统梅对称性的 Noether 型守恒量和非 Noether 守恒量[38—40].

本文将非 Noether 对称性研究引入机电动力系统, 建立机电动力系统的动量依赖对称性理论, 直接导出系统的非 Noether 守恒量, 为非 Noether 对称性理论应用于其他研究领域打下了基础.

2. 机电耦合系统的 Hamilton 正则方程

当系统的力学过程和电学过程互相关联时, 称这个系统为机电动力系统. N 个粒子构成的机械运动部分我们用力学模型来描述. 如果系统受到 d 个理想的双面完整约束, 系统的空间位置用 $n=3N-$

* 国家自然科学基金(批准号: 10372053)和河南省自然科学基金(批准号: 0311011400)资助的课题.

d 个广义坐标来确定. 电路和磁路构成的电动部分用电学模型来描述,如果系统有 m 个回路,那么系统的电磁运动用 m 个广义电量来确定. 假定机电系统的每一个回路有线性导体和电容构成,回路之间没有关系,回路的电磁过程是互相依赖的. 对于第 k 个电回路,我们用 i_k 表示电流,V_k 表示电动势,e_k 表示电容中的电量($\dot{e}_k = i_k$),R_k 表示电阻,C_k 表示电容量,那么,机电系统的 Lagrange 函数为

$$L = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q}) + W_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{e}) - W_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{e}), \tag{1}$$

式中,

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\frac{e_k^2}{C_k}, \quad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_{kr}i_k i_r \quad (k, r = 1,\cdots,m) \tag{2}$$

是第 m 个回路的电场能量和磁场能量. 这里 $C_k = C_k(q_s)$是第 k 个回路的电容,$L_{kr}(q_s) = L_{rk}(q_s)$($k \neq r$)是第 k 个回路和第 r 个回路的互感系数,并且 L_{kk} 是第 k 个回路的自感系数. 系统的 Lagrange-Maxwell 运动方程为[41]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = Q_s \quad (s = 1,\cdots,n),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{e}_k} = u_k \quad (k = 1,\cdots,m). \tag{3}$$

它们是关于广义坐标和广义电量的二阶 $n + m$ 维微分方程组. 在方程(3)中,

$$F = F_{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{e}}) + F_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{4}$$

这里

$$F_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}R_k i_k^2 = \frac{1}{2}R_k \dot{e}_k^2 \quad (k = 1,\cdots,m) \tag{5}$$

是通常的电耗散函数,F_{m} 是黏滞阻尼力的耗散函数. 我们称 $-\partial F/\partial \dot{q}_s$ 和 $-\partial F/\partial \dot{e}_k$ 为耗散力,Q_s 为非势广义力.

将空间坐标和广义电量用统一的广义坐标 q_s($s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m$)来表示,其中 q_s($s = 1,\cdots,n$)表示空间坐标分量,q_s($s = n+1,\cdots,n+m$)表示电学分量. 机电动力系统的 Lagrange-Maxwell 方程(3)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = Q_s \quad (s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m), \tag{6}$$

式中 Q_s($s = 1,\cdots,n$)为非势广义力,Q_s($s = 1,\cdots,n$)为广义电动势. 当满足 $Q_s - \partial F/\partial \dot{q}_s = 0$ 时,我们称该系统为 Lagrange 机电动力系统,方程(6)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m), \tag{7}$$

我们称方程(7)为机电动力系统的 Lagrange 方程.

假定机电动力系统的广义动量为

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m), \tag{8}$$

引入该系统的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= p_s\dot{q}_s - L \\ &= p_s\dot{q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) - L(t,q_s,\dot{q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) \\ &= H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{9}$$

从方程(6)我们得到 Lagrange-Maxwell 机电动力系统的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_s = \left.\frac{\partial H}{\partial p_s}\right|_{\dot{q}_s = \dot{q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s - \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}\right|_{\dot{q}_s = \dot{q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}. \tag{10}$$

从方程(7)我们得到 Lagrange 机电动力系统的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_s = \left.\frac{\partial H}{\partial p_s}\right|_{H = H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}, \quad \dot{p}_s = -\left.\frac{\partial H}{\partial q_s}\right|_{H = H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}. \tag{11}$$

方程(10)和(11)中,$\boldsymbol{q} = \{q_1,\cdots,q_n,q_{n+1},\cdots,q_{n+m}\}$,$\boldsymbol{p} = \{p_1,\cdots,p_n,p_{n+1},\cdots,p_{n+m}\}$分别表示机电动力系统的广义坐标和广义动量. 将方程(10)表示成显形式,

$$\dot{q}_s = h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), \quad \dot{p}_s = g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), \quad (s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m). \tag{12}$$

3. 机电动力系统广义 Hamilton 正则方程的动量依赖对称性

引入关于广义坐标和广义动量的无限小变换

$$q_s^*(t) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), \quad p_s^*(t) = p_s(t) + \varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), \quad (s = 1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m). \tag{13}$$

这里,ε 是一个小参数,ξ_s,η_s 是无限小变换生成元.

如果方程(12)在单参数无限小变换 Lie 群(13)式下保持不变,那么,无限小生成元 $\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 和 $\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足确定方程

$$\begin{aligned}\xi_s &= X^{(0)}(h_s),\\ \eta_s &= X^{(0)}(g_s),\end{aligned} \tag{14}$$
$$(s=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m),$$

式中算符 $X^{(0)}$ 是对称群的生成元,形式为

$$X^{(0)} = \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{15}$$

它的一次扩展形式为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \dot{\xi}_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \dot{\eta}_s\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}. \tag{16}$$

如果矢量场

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + h_s\frac{\partial}{\partial q_s} + g_s\frac{\partial}{\partial p_s} \tag{17}$$

表示沿着曲线方程(10)的全导数,那么对于任意的函数 ϕ,有

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + h_s\frac{\partial\phi}{\partial q_s} + g_s\frac{\partial\phi}{\partial p_s}. \tag{18}$$

基于方程(10)在无限小变换(13)式下的不变性,我们给出定义 1.

定义 1　如果无限小变换(13)式能使方程(10)的形式保持不变,但不能保持系统的 Hamilton 作用量不变,那么称这个不变性为 Lagrange-Maxwell 机电正则系统的动量依赖对称性.

按照 Lutzky 的提法,在状态空间中方程(6)在无限小变换

$$q_s^*(t) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$
$$(s=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m)$$

下的不变性被称为系统的速度依赖对称性,那么,在相空间中方程(10)在无限小变换(13)式下的不变性,我们称为该系统的动量依赖对称性.

判据 1　当无限小变换生成元 ξ_s 和 η_s 满足确定方程(14),但不能保持系统的 Hamilton 作用量不变时,这个对称性为 Lagrange-Maxwell 机电正则系统的动量依赖对称性.

证明　方程(10)在无限小变换(13)式下的不变性可表示为

$$\begin{aligned}X^{(1)}(\dot{q}_s - h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) &= 0,\\ X^{(1)}(\dot{p}_s - g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) &= 0,\end{aligned} \tag{19}$$

在方程(19)中用(12),(15)和(16)式得到方程(14),这个不变性为 Lagrange-Maxwell 机电正则系统的 Lie 对称性.当这个对称性不满足

$$\Delta S = \Delta\int_{t_1}^{t_2} H(t,q,p)\,\mathrm{d}t = 0$$

时,该对称性称为 Lagrange-Maxwell 机电正则系统的动量依赖对称性.

定理 1　对于 Lagrange-Maxwell 机电动力系统(12),规范函数 $G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 能从

$$\frac{\partial h_s}{\partial q_s} + \frac{\partial g_s}{\partial p_s} + \dot{G} = \psi$$
$$(s=1,\cdots,n,n+1,s\cdots,n+m) \tag{20}$$

中找到,这里 ψ 是这个对称群的不变量.如果无限小变换生成元 $\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 和 $\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 是系统(12)的动量依赖对称性,那么这个系统存在一个守恒量

$$I = X^{(0)}(G) + \frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} + \frac{\partial\eta_s}{\partial p_s}. \tag{21}$$

我们称方程(20)为 Lagrange-Maxwell 机电正则系统的结构方程,并且该系统存在非 Noether 守恒量(21)式.

对于这个定理,$X^{(0)}(\psi)=0$ 意味着 $\dot{I}=0$,这可以通过对 I 求导数来证明.

4. 机电动力系统广义 Hamilton 正则方程动量依赖对称性的逆问题

对于 Lagrange-Maxwell 机电正则系统,我们给出动量依赖对称性的逆问题.

定理 2　如果 Lagrange-Maxwell 机电正则系统存在守恒量

$$I = I(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \mathrm{const}, \tag{22}$$

那么该系统存在动量依赖对称性 ξ_s,η_s 由结构方程(20)和下列公式给出:

$$\xi_s = \frac{\partial I}{\partial p_s}, \tag{23}$$

$$X^{(0)}(G) + \frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} + \frac{\partial\eta_s}{\partial p_s} = I(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}). \tag{24}$$

这里 G 为规范函数.

定理 2 的证明方法见文献[30].

类似于上述研究,对于 Lagrange 机电正则系统(11),在无限小变换(13)式下,我们可以得到该系统动量依赖对称性的判据、定理和逆问题.

5. 例　　子

图 1 为 RLC 电路,其中电容 C 由上下电极板组

成.单位质量的电极板被悬挂在一个刚度系数为 k 的弹簧上.电极板在重力、弹性力和电场力的作用下沿着垂直方向振动.A 是电极板面积,S 是距离,L_1($L_1=1$)是一个单位电感,R 是电阻,电场力 $E=\dot{e}$.下面我们研究电容器极板运动的动量依赖对称性.

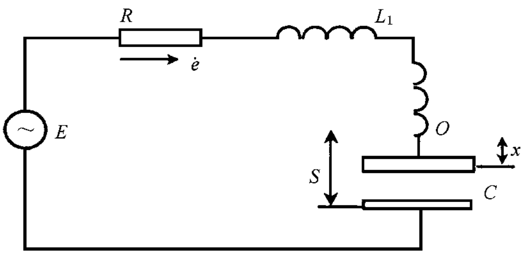

图 1 RLC 电路

图 1 所示电容器有两个自由度.我们选择电容器的活动极板的平衡位置 O 为坐标原点,空间坐标 x 和电量 e 作为广义坐标.$T=\dot{q}^2/2$ 是系统的动能,$W_{\mathrm{m}}=\dot{e}^2/2$ 是系统的电能,$V=kq^2/2$ 是弹性势能,$W_{\mathrm{e}}=Ae^2/2$ 是电容器储存的能量.系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{e}^2-\frac{1}{2}kq^2-\frac{1}{2}Ae^2. \tag{25}$$

电耗散函数为

$$F=F_e=\frac{1}{2}R\dot{e}^2. \tag{26}$$

电容器两端的电压为

$$u_r=R\dot{e}. \tag{27}$$

该机电动力系统的广义动量为

$$\begin{aligned}p_1&=\dot{q},\\ p_2&=\dot{e}.\end{aligned} \tag{28}$$

Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{e}^2+\frac{1}{2}kq^2+\frac{1}{2}Ae^2\\ &=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2}kq^2+\frac{1}{2}Ae^2.\end{aligned}$$

Hamilton 正则方程为

$$\begin{aligned}\dot{q}=p_1&=h_1,\\ \dot{e}=p_2&=h_2,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_1&=-kq=g_1,\\ \dot{p}_2&=-Ae+Rp_2-Rp_2=-Ae=g_2.\end{aligned} \tag{30}$$

在无限小对称变换群 $\xi(t,\boldsymbol{q}),\eta(t,\boldsymbol{q})$ 下,相应方程(29)和(30)的确定方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1&=\eta_1,\\ \dot{\xi}_2&=\eta_2,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1&=-k\xi_1,\\ \dot{\eta}_2&=-A\xi_2.\end{aligned} \tag{32}$$

确定方程(45),(46)有解,

$$\begin{aligned}\xi_1&=\sqrt{k}\sin\sqrt{k}t,\\ \eta_1&=k\cos\sqrt{k}t,\\ \xi_2&=\sqrt{A}\sin\sqrt{A}t,\\ \eta_2&=A\cos\sqrt{A}t.\end{aligned} \tag{33}$$

下面我们给出系统的非 Noether 守恒量.将(29),(30)和(33)式代入结构方程(20)得到

$$\dot{G}=\psi. \tag{34}$$

这里 ψ 是该对称群的不变量,即

$$\begin{aligned}X^{(0)}(\psi)&=\sqrt{k}\sin\sqrt{k}t\frac{\partial\psi}{\partial q}+\sqrt{A}\sin\sqrt{A}t\frac{\partial\psi}{\partial e}\\ &\quad+k\cos\sqrt{k}t\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+A\cos\sqrt{A}t\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=0.\end{aligned} \tag{35}$$

我们取 $\psi=0$,则有

$$\begin{aligned}G&=\exp\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}kq^2\right)\\ &\quad+\exp\left(\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2}Ae^2\right).\end{aligned} \tag{36}$$

系统存在非 Noether 守恒量

$$\begin{aligned}I&=(k\sqrt{k}q\sin\sqrt{k}t+kp_1\cos\sqrt{k}t)\\ &\quad\times\exp\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}kq^2\right)\\ &\quad+(A\sqrt{A}e\sin\sqrt{A}t+Ap_2\cos\sqrt{A}t)\\ &\quad\times\exp\left(\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2}Ae^2\right).\end{aligned} \tag{37}$$

当取 $\psi=f(t)$ 时,有

$$X^{(0)}(\psi)=0.$$

我们得到规范函数

$$\begin{aligned}G&=\exp\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}kq^2\right)+\exp\left(\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2}Ae^2\right)\\ &\quad+\int f(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\exp\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}kq^2\right)+\exp\left(\frac{1}{2}p_2^2+\frac{1}{2}Ae^2\right)\\ &\quad+F(t).\end{aligned} \tag{38}$$

这时系统仍存在非 Noether 守恒量(37)式.

[1] Noether E 1918 *Math*. *Phys*. **KI** 235
[2] Lakshmanan M，Senthil V M 1992 *J*. *Math*. *Phys*. **33** 4068
[3] Stephen C A，Bluman G 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **78** 2869
[4] Ibragimov N H，Kara A H，Mahoame F M 1998 *Nonlin*. *Dyn*. **15** 115
[5] Hakioglu T，Dragt A J 2001 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **34** 6603
[6] Relungwetwattana A，Toyama S 2001 *Mult*. *Sys*. *Dyn*. **6** 267
[7] King J R 1990 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **23** 5441
[8] Rosen J 1972 *Ann*. *Phys*. **69** 349
[9] Sarlet W，Cantrijn F 1981 *SIAM Rev*. **23** 467
[10] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebra to Constrained Mechanical Systems* (Beijing：Science Press) (in Chinese)［梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)］
[11] Baker T W，Tavel M A 1974 *Amer*. *T*. *Phys*. **42** 857
[12] Soh C W，Mahomed F M 1999 *Class*. *Quan*. *Grav*. **16** 3553
[13] Crâsmãreanu M 2000 *J*. *Nonlin*. *Mech*. **35** 947
[14] Lutzky M 1978 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **11** 249
[15] Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **12** 973
[16] Leach P G L 1981 *J*. *Math*. *Phys*. **22** 465
[17] Laksmanan M，Santhil V M 1992 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **25** 1259
[18] Aleynikov D V，Tolkackev E A 2003 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **36** 2251
[19] Lutzky M 1979 *Phys*. *Lett*. A **72** 86
[20] Lutzky M 1982 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **15** L87
[21] Hojman S，Harheston H 1981 *J*. *Math*. *Phys*. **22** 1414
[22] Hojman S 1984 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **17** 2399
[23] Crampin M 1983 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **95** 209
[24] Jose F 1983 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **16** 1
[25] Lutzky M 1995 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **28** L637
[26] Hojman S 1992 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **25** L291
[27] Mei F X 2002 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **47** 1544 (in Chinese)［梅凤翔 2002 科学通报 **47** 1544］
[28] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048 (in Chinese)［梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048］
[29] Fu J L，Chen L Q 2003 *Phys*. *Lett*. A **317** 255
[30] Fu J L，Chen L Q，Yang X D 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 287
[31] Fu J L 2004 *Ph*. *D*. *Thesis* (Shanghai：Shanghai University) (in Chinese)［傅景礼 2004 博士学位论文(上海：上海大学)］
[32] Zhang H B，Chen L Q，Gu S L *et al* 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2489 (in Chinese)［张宏彬、陈立群、顾书龙等 2005 物理学报 **54** 2489］
[33] Luo S K，Mei F X，Guo Y X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413 (in Chinese)［罗绍凯、梅凤翔、郭永新 2004 物理学报 **53** 2413］
[34] Zhang Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4026 (in Chinese)［张　毅 2004 物理学报 **53** 4026］
[35] Fang J H，Zhang P Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4041 (in Chinese)［方建会、张鹏玉 2004 物理学报 **53** 4041］
[36] Qiao Y F，Li R J，Sun D N 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 490 (in Chinese)［乔永芬、李仁杰、孙丹娜 2005 物理学报 **54** 490］
[37] Mei F X，Xu X J 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 449
[38] Mei F X 2000 *J*. *BIT* **9** 120
[39] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177
[40] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)［梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)］
[41] Qiu J J 1992 *Analysis Mechanics of Mechanico-Electrical System* (Beijing：Scince Press) (in Chinese)［邱家俊 1992 机电分析动力学(北京 科学出版社)］

Momentum-dependent symmetries and non-Noether conserved quantities for mechanico-electrical systems*

Zheng Shi-Wang[1] Fu Jing-Li[1)2)3)] Li Xian-Hui[3]

1) (*Department of Physics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

2) (*Department of Physics, Zhejiang University of Sciences, Hangzhou* 310018, *China*)

3) (*Department of Physics, Qingdao University, Qingdao* 266071, *China*)

(Received 10 December 2004; revised manuscript received 27 June 2005)

Abstract

The Hamiltonian canonical equation of the systems, the definition, criterion, structure equation and conserved quantities of momentum-dependent symmetries for Lagrange-Maxwell mechanico-electrical systems were presented. This work shows that the function ψ in the structure equation is only an invariant on the symmetry group. A new method to deduce conserved quantities of mechanico-electrical systems is obtained. An example is designed to illustrate these results.

Keywords: mechanico-electrical system, Lie group analysis, symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372053) and the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 0311011400).