第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5540-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.12, December, 2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

构造孤子方程的 Weierstrass 椭圆函数解的一个新方法*

李德生[1)2)†]　张鸿庆[2)]

1)(燕山大学数学系，秦皇岛　066004)
2)(大连理工大学应用数学系，大连　116024)

(2005 年 2 月 5 日收到；2005 年 7 月 15 日收到修改稿)

利用具有 Weierstrass 椭圆函数解的方程，首先获得了投影 Riccati 方程的两组新解．由于投影 Riccati 方程可用于多种具孤子解的非线性演化方程的求解，因而得到了一个可以构造这些方程的 Weierstrass 椭圆函数解的新方法．

关键词：Weierstrass 椭圆函数解，投影 Riccati 方程，非线性演化方程
PACC：0340K，0290，1190

1. 引　　言

求解非线性偏微分方程是一个古老而在理论和实践上都很重要的课题．在过去的半个世纪中，虽已提出了一系列有效的构造非线性演化方程精确解的方法，如反散射方法、Bäcklund 变换法、Hirota 变换法、Darboux 变换法[1—3]、双曲函数方法[4]、齐次平衡法[5,6]、Painlevé 分析法[7]和分离变量法[8—11]等．但目前仍无一个统一的方法来给出一个方程的所有精确解，因此寻找更为有效的求解方法仍是人们关注的热点之一．

近年来，人们对于构造非线性演化方程的双周期解产生了很大的兴趣，提出了构造诸如 Jacobi 椭圆函数解、Weierstrass 椭圆函数解的多种方法[12—25]．仔细阅读这些文献不难发现所给出的方法仅对一类特殊的非线性演化方程是可行的(即所谓的同秩方程[25])，而对于其他方程上述方法似乎都已失效．然而我们都清楚这样的事实，即每一个孤波解都可以由一个相对应的 Jacobi 椭圆函数解或 Weierstrass 椭圆函数解在退化状态下获得．这自然地引导考虑这样的问题：对所有具孤子解的方程是否存在一个某种双周期解的统一求解方法．

本文通过对投影 Riccati 方程的进一步研究，利用方程 $\mathscr{P}'^2(\xi)=4\mathscr{P}^3(\xi)-g_2\mathscr{P}(\xi)-g_3$ 获得了投影 Riccati 方程的两组新解：Weierstrass 椭圆函数解．由于投影 Riccati 方程求解法[26—30]已大量地应用于许多有着重要物理意义的非线性演化方程，因而本文给出了一个可以获得孤子方程的一类双周期解的新方法．

2. 投影 Riccati 方程的两组新解：Weierstrass 椭圆函数解

对于投影 Riccati 方程

$$F' = pF(\xi)G(\xi), \tag{1}$$

$$G'(\xi) = q + pG^2(\xi) - rF(\xi), \tag{2}$$

不难验证，当 $F(\xi)$，$G(\xi)$满足关系

$$G^2(\xi) = \frac{2r}{p}F(\xi) - \frac{q}{p} \tag{3}$$

时，具有如下一组 Weierstrass 椭圆函数解：

$$F(\xi) = \frac{q}{6r} + \frac{2}{pr}\mathscr{P}(\xi),$$
$$G(\xi) = \frac{\frac{2}{p^2}\mathscr{P}'(\xi)}{\frac{q}{6}+\frac{2}{p}\mathscr{P}(\xi)}. \tag{4}$$

---

* 国家重点基础研究发展规划(批准号：2004CB318000)资助的课题．

† E-mail：deshengli_868@yahoo.com.cn

当 $F(\xi)$，$G(\xi)$满足关系

$$G^2(\xi)=-\frac{q}{p}+\frac{2r}{p}F(\xi)-\frac{24r^2}{25pq}F^2(\xi) \tag{5}$$

时,具有如下一组 Weierstrass 椭圆函数解：

$$\begin{aligned} F(\xi)&=\frac{5q}{6r}+\frac{5pq^2}{72r\mathscr{P}(\xi)},\\ G(\xi)&=-\frac{q\mathscr{P}'(\xi)}{12\mathscr{P}^2(\xi)+pq\mathscr{P}(\xi)}.\end{aligned} \tag{6}$$

这里 Weierstrass 椭圆函数 $\mathscr{P}(\xi)=\mathscr{P}(\xi;g_2,g_3)$满足方程

$$\mathscr{P}'^2(\xi)=4\mathscr{P}^3(\xi)-g_2\mathscr{P}(\xi)-g_3, \tag{7}$$

式中，

$$g_2=\frac{p^2q^2}{12},$$

$$g_3=\frac{p^3q^3}{216}.$$

下面我们将分别以 Burgers 方程和色散的耗散方程为例来说明方法的有效性.

3. 最简单的非线性演化方程:Burgers 方程的新精确解

Burgers 方程

$$u_t+uu_x-u_{xx}=0. \tag{8}$$

尽管这是一个最简单的非线性偏微分方程,但它是一个不同秩方程(所谓同秩方程是指出现在方程中每一项的未知函数,其各阶导数与次数之积的和同为奇数或同为偶数,具体定义可见文献[25]).

先作行波变换 $u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=k(x-\lambda t)$,并经过一次积分,则方程(8)被约化为

$$ku'=C-\lambda u+\frac{1}{2}u^2, \tag{9}$$

式中 C 为积分常数.设

$$u(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+b_1G(\xi). \tag{10}$$

将(10)式代入到(9)式并利用(1)—(3)式,得到

$$\begin{aligned} &ku'-C+\lambda u-\frac{1}{2}u^2\\ &=-\frac{a_1^2F^2}{2}+\left(-a_0a_1+krb_1-\frac{r}{p}b_1^2+\lambda a_1\right)F\\ &\quad+(-a_1b_1+ka_1)GF+(-a_0b_1+\lambda b_1)G\\ &\quad-C-\frac{a_0^2-b_1^2}{2}+\lambda a_0=0.\end{aligned} \tag{11}$$

由此可得一代数方程组

$$\begin{aligned} &\frac{a_1^2}{2}=0,\\ &-a_0a_1+krb_1-\frac{r}{p}b_1^2+\lambda a_1=0,\\ &-a_1b_1+ka_1=0,\\ &-a_0b_1+\lambda b_1=0,\\ &-C-\frac{a_0^2-b_1^2}{2}+\lambda a_0=0.\end{aligned} \tag{12}$$

求解此代数方程组可得下列一组解：

$$b_1=kp,$$

$$\lambda=\pm\sqrt{2C-k^2pq},$$

$$a_1=0,$$

$$a_0=\pm\sqrt{2C-k^2pq}.$$

所以,对任意的满足条件 $2C-k^2pq>0$ 的常数 C,k,p,q,Burgers 方程具有如下的 Weierstrass 椭圆函数解：

$$u(x,t)=\pm\sqrt{2C-k^2pq}+\frac{2k\mathscr{P}'(\xi)}{\frac{pq}{6}+2\mathscr{P}(\xi)}. \tag{13}$$

方程(7)的解与 Jacobi 椭圆函数有如下关系：

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}(\xi;g_2,g_3)\\ &=e_2-(e_2-e_3)\mathrm{cn}^2(\sqrt{e_1-e_3}\,\xi;m),\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $m^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$为 Jacobi 椭圆函数的模数,$e_i$($i=1,2,3$;$e_1\geqslant e_2\geqslant e_3$)是方程 $4z^3-g_2z-g_3=0$ 的根.这样 Burgers 方程的解又可写为

$$u(x,t)=\pm\sqrt{2C-k^2pq}-\frac{4k(e_2-e_3)R\,\mathrm{cn}(\sqrt{e_1-e_3}\,\xi;m)\,\mathrm{sn}(R\xi;m)\,\mathrm{dn}(R\xi;m)}{\frac{pq}{6}+2[e_2-(e_2-e_3)\mathrm{cn}^2(R\xi;m)]}. \tag{13′}$$

这里 $R=\sqrt{e_1-e_3}$.

由于当 $m\to1$,即 $e_2\to e_1$ 时,$\mathrm{cn}(\xi;m)\to\mathrm{sech}(\xi)$,$\mathrm{sn}(\xi;m)\to\tanh(\xi)$,$\mathrm{dn}(\xi;m)\to\tanh(\xi)$,于是得到 Burgers 方程的一个新的孤波解,

$$u(x,t)=\pm\sqrt{2C-k^2pq}-\frac{4k(e_1-e_3)^{3/2}\mathrm{sech}(\sqrt{e_1-e_3}\,\xi)\tanh^2(\sqrt{e_1-e_3}\,\xi)}{\frac{pq}{6}+2[e_1-(e_1-e_3)\mathrm{sech}^2(\sqrt{e_1-e_3}\,\xi)]}. \tag{15}$$

4. 色散的耗散方程的新精确解

色散的耗散方程[31]

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - (u_t + \beta uu_x)_x = 0. \quad (16)$$

使用类似的行波变换得到

$$k^2\alpha u'' + k(\lambda - \beta u)u' + \frac{u^2}{2} - \lambda u - C = 0. \quad (17)$$

这里 C 也为积分常数.设

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + b_1 G(\xi), \quad (18)$$

将(18)式代入到(17)式并利用(1)—(3)式,得到

$$\begin{aligned}
&k^2\alpha u'' + k(\lambda - \beta u)u' + \frac{u^2}{2} - \lambda u - C\\
&= -(-6k^2\alpha a_1 p^2 r - a_1^2 p + 6k\beta a_1 b_1 rp\\
&+ 2k\beta a_1^2 p^2 G)\frac{F^2}{2p} - [-a_0 a_1 p - b_1^2 r\\
&+ \lambda a_1 p + kb_1 p(\beta a_0 r - \lambda r - \beta a_1 q)\\
&+ k^2\alpha a_1 p^2 q + (k\beta a_0 a_1 p^2 - k\lambda a_1 p^2 - a_1 b_1 p\\
&- k^2\alpha b_1 p^2 r + k\beta b_1^2 rp)G]\frac{F}{p}\\
&- (2\lambda a_0 p + b_1^2 q - a_0^2 p + 2Cp\\
&- 2a_0 b_1 Cp + 2\lambda b_1 Cp)/2p = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

由此可得下列代数方程组:

$$\begin{aligned}
&2k\beta a_1^2 p^2 = 0,\\
&-6k^2\alpha a_1 p^2 r - a_1^2 p + 6k\beta a_1 b_1 rp = 0,\\
&k\beta a_0 a_1 p^2 - k\lambda a_1 p^2 - a_1 b_1 p\\
&- k^2\alpha b_1 p^2 r + k\beta b_1^2 rp = 0,\\
&-a_0 a_1 p - b_1^2 r + \lambda a_1 p + kb_1 p(\beta a_0 r\\
&- \lambda r - \beta a_1 q) + k^2\alpha a_1 p^2 q = 0,\\
&-2a_0 b_1 p + 2\lambda b_1 p = 0,\\
&2\lambda a_0 p + b_1^2 q - a_0^2 p + 2Cp = 0.
\end{aligned} \quad (20)$$

求解此代数方程组可得一组解,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\alpha}{\beta(\beta - 1)},\\
b_1 &= \frac{k\alpha p}{\beta},\\
a_1 &= 0,\\
a_0 &= \frac{\alpha}{\beta(\beta - 1)},\\
C &= -\frac{\alpha^2(1 + qk^2 p - 2qk^2 p\beta + qk^2 p\beta^2)}{2\beta^2(\beta - 1)^2}.
\end{aligned}$$

由此可见,该方程也具有与 Burgers 方程同类型的 Weierstrass 椭圆函数解(13),(13′)及孤波解(15).

5. 结 论

通过构造投影 Riccati 方程的满足 $\mathscr{P}'^2(\xi) = 4\mathscr{P}^3(\xi) - g_2\mathscr{P}(\xi) - g_3$ 的 Weierstrass 椭圆函数解,给出了一个构造一般孤子方程的一类 Weierstrass 椭圆函数解的统一方法,并以 Burgers 方程和色散的耗散方程为例对方法进行了说明.该方法为一适用范围更广的方法,因为它既适用于同秩方程也适用于形如方程(8)和(16)这样的不同秩方程.另外,以 Burgers 方程为例进行说明,还是基于以下的事实.

Riccati 方程[32—34]

$$\phi'(\xi) = R + \phi^2(\xi),$$

可用来构造几乎所有的具有多项式形式的孤子方程的多种精确解.而经过行波约化后的 Burgers 方程恰为一推广的 Riccati 方程,

$$ku' = C - \lambda u + \frac{1}{2}u^2.$$

文中已经证实该方程具有 Weierstrass 椭圆函数解,故由各种形式的 Riccati 方程求解法[32—34]可知,对几乎所有的具有多项式形式的孤子方程以及通过某种变换可以化为多项式形式的孤子方程,均可利用本文的方法求得它们所具有的由方程(7)确定的 Weierstrass 椭圆函数解,并发现新的孤波解.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Miura M R 1978 *Bäcklund Transformation* (Berlin: Springer-Verlag)

[3] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Malfliet W 1992 *Amer. J. Phys.* **60** 650

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett.* A **216** 67

[7] Weiss J, Tabor M, Carnevale G 1983 *J. Math. Phys.* **24** 522

[8] Lou S Y, Lu J Z 1996 *J. Phys. A* **29** 4209

[9] Zeng Y B 1991 *Phys. Lett.* A **169** 541

[10] Chen Y, Li Y S 1991 *Phys. Lett.* A **157** 22

[11] Chen L L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1201 (in Chinese) [陈黎丽 1999 物理学报 **48** 1201]

[12] Patrick D V 1973 *Elliptic Function and Elliptic Curves* (Cambrige: Cambrige University Press)

[13] Lawden D F 1989 *Elliptic Functions and Applications* (New York: Springer-Verlag)

[14] Porubov A V 1996 *Phys. Lett.* A **221** 391

[15] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[16] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达等 2002 物理学报 **51** 10]

[17] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘适达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[18] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **289** 69

[19] Fu Z T, Liu S K, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **290** 72

[20] Yan Z Y 2002 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **38** 143

[21] Yan Z Y 2002 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **38** 400

[22] Yan Z Y 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **15** 575

[23] Yan Z Y 2002 *Comput. Phys. Commun.* **148** 30

[24] Yan Z Y 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 291

[25] Zhang S Q, Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1066 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[26] Conte R, Musett M 1992 *J. Phys. A* **33** 5609

[27] Bountis T, Papageorgiou V, Winternitz P 1986 *J. Math. Phys.* **27** 1215

[28] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2002 *Sci. China* A **30** 1103

[29] Yan Z Y 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 759

[30] Fu Z T, Liu S D, Liu S K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **20** 301

[31] Isidore N 1996 *J. Phys. A* **29** 3679

[32] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[33] Fan E G 2001 *Z. Naturforsch.* A **56** 312

[34] Yan Z Y 2001 *Phys. Lett.* A **292** 100

A new method to construct Weierstrass elliptic function solutions for soliton equations *

Li De-Sheng[1)2)†]　Zhang Hong-Qing[2)]

1) (*Department of Mathematics, Yanshan University, Qinghuangdao* 066004, *China*)

2) (*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

(Received 5 February 2005; revised manuscript received 15 July 2005)

Abstract

Utilizing the equation that has Weierstrass elliptic function solutions, we have obtained two groups of new solutions of projection Riccati equation. Because the projection Riccati equation can be used to solve nearly all kinds of non-linear evolution equations, thus we have given a method for constructing. Weierstrass elliptic function solutions for nearly all equations with soliton solutions.

Keywords: Weierstrass elliptic function solutions, projective Riccati equation, non-linear evolution equations

PACC: 0340K, 0290, 1190

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2004CB318000).

† E-mail: deshengli_868@yahoo.com.cn