第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5581-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.12,December,2005

广义 Landau-Ginzburg-Higgs 方程孤子解的扰动理论*

莫嘉琪[1)2)] 王 辉[3)] 林一骅[4)]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)
2)(湖州师范学院数学系,湖州 313000)
3)(中国气象科学研究院,北京 100081)
4)(中国科学院大气物理研究所,北京 100029)

(2005 年 3 月 1 日收到;2005 年 6 月 16 日收到修改稿)

利用扰动方法研究了一类广义 Landau-Ginzburg-Higgs 方程.引入一个同伦映射,将原方程的解表示为渐近展开式,然后用相应的线性方程的解来近似地表示.讨论了方程的解与得到的近似解的关系.

关键词:孤子,扰动,同伦映射
PACC:0545

1.引 言

非线性孤子理论存在于物理学、力学和其他自然科学的许多领域的应用中,是当前国际上十分关注的研究对象.近几年来许多学者在激波[1—3]、光波散射[4]、量子力学[5]、大气物理[6—9]、神经网络[10]、爆炸与燃烧[11]等方面都作了一些研究.非线性孤子理论的各种定量和定性方法也大量地涌现.作者和一些学者利用微分不等式、变分迭代、不动点原理方法也研究了一系列非线性孤子和相应的问题[12—21].本文是利用同伦映射方法研究了一类广义 Landau-Ginzburg-Higgs(LGH)扰动方程.

迄今为止,孤子理论大体可以分为两大类.一类是基于逆散射变换的孤子微扰论,它已形成了比较系统和完整的体系[22].另一类是孤子微扰论的渐近方法,其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为线性方程求解.这类理论完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法[23].本文使用的同伦映射方法就是属于后一类.本方法的优点在于思路简捷、计算简单、可得到解的较高近似度.另外还有一个突出的优点是这样求得的扰动解保留了相应的解析特性,因而不但能对得到的结果直接进行定量方面的分析,而且还能进一步进行更深入的定性方面的解析分析.不但如此,本方法还可适用于其他非线性问题,具有较广泛的研究前景.

典型的 LGH 方程近来已有所研究[24],这是一个标准的非线性方程,它代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩.从进一步深入研究的角度看,它已经不能满足当前科学发展的需要,故有必要来研究更能代表真实自然现象的广义 LHG 扰动方程.本文就是在这样的背景下提出来的.

现讨论如下一类广义 LGH 扰动方程:

$$u_{tt} - u_{xx} - m^2 u + k^2 u^3 = g(u,\varepsilon), \qquad (1)$$

式中,m,k,ε 为参数;g 为扰动项,是其变量的解析函数.

在方程(1)中,当 $g = 0$ 时,就是典型的 LGH 方程.这时它具有如下单孤子解[24]:

$$u(x,t) = \frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}} \times (x - x_0 + \beta t) \qquad (\beta^2 < 1), \qquad (2)$$

式中参数 β 和 x_0 分别表示孤子的运动速度和初始位置.

2.同伦映射

为了进一步求得广义 LGH 扰动方程(1)的解,

* 国家自然科学基金(批准号:90111011,10471039)、国家重点基础研究发展规划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304)、中国科学院知识创新工程重大项目(批准号:KZCX3-SW-221)和浙江省自然科学基金(批准号:Y604127)资助的课题.

首先引入如下一个 $R\times[0,1]\to R$ 的同伦映射[25]：

$$H[u,p]=L[u]+k^2\bar{u}^3-N_0[\bar{u}]+p\{N_0[\bar{u}]-g[u,\varepsilon]\},\qquad(3)$$

式中 $\bar{u}$ 为原方程(1)的初始近似,算子 $L[u]$，$N_0[\bar{u}]$分别定义为

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-m^2u,$$

$$N_0[\bar{u}]\equiv\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}-m^2\bar{u}+k^2\bar{u}^3.$$

令

$$u(x,t,p)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t)p^i.\qquad(4)$$

将映射关系式(3)代入(4)式,按 p 的幂展开相应的非线性项,合并 $p^i(i=0,1,2,\cdots)$的同次幂,并分别令其系数为零.依次可得

$$L[u_0]+k^2\bar{u}^3-N_0[\bar{u}]=0,\qquad(5)$$

$$L[u_1]=-k^2\bar{u}^3-N_0[\bar{u}]+g(u_0,\varepsilon),\qquad(6)$$

$$L[u_2]=[g_u(u_0,\varepsilon)]u_1,\qquad(7)$$

$$L[u_i]=G_i(x,t)\qquad(i=3,4,\cdots).$$

这里

$$G_i(x,t)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial p^i}g\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_ip^i,\varepsilon\right)\right]_{p=0}\quad(i=3,4,\cdots).\qquad(8)$$

由(2)式知,方程(5)有孤子解

$$u_0(x,t)=\bar{u}=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t)\quad(\beta^2<1).\qquad(9)$$

由映射关系式(3)不难看出,$H[u,p]=0$ 的解 $u(x,t,p)$当 $p\to1$ 的极限情形就是方程(1)的解.

3. 解的计算

考虑到(9)式,再由(6)式可得

$$L[u_1]=-k^2u_0^3+g(u_0,\varepsilon).\qquad(10)$$

由 Fourier 变换和偏微分方程理论不难得到线性双曲型方程(10)的解为

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}G_1(x-\xi,\tau)\times[f(\xi,t-\tau)-f(\xi,-(t-\tau))]\mathrm{d}\xi,\qquad(11)$$

式中

$$G_1(x-\xi,\tau)=-k^2[u_0(x-\xi,\tau)]^3+g(u_0(x-\xi,\tau),\varepsilon),$$

而 $f(x,t-\tau)$为$\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\exp(\sqrt{m^2-\lambda^2}(t-\tau))$关于 λ 的 Fourier 逆变换,即

$$f(x,t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda^2}}\times\exp[\sqrt{m^2-\lambda^2}(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda x]\mathrm{d}\lambda.$$

由(7)式可得

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}G_2(x-\xi,\tau)\times[f(\xi,t-\tau)-f(\xi,-(t-\tau))]\mathrm{d}\xi,$$

其中

$$G_2(x-\xi,\tau)=[g_u(u_0(x-\xi,\tau),\varepsilon)]u_1(x-\xi,\tau).$$

这里的 $u_1(x-\xi,\tau)$由(11)式表示.

用同样的方法,可以逐次地得到 $u_i(x,t)(i=3,4,\cdots)$,

$$u_i(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}G_i(x-\xi,\tau)\times[f(\xi,t-\tau)-f(\xi,-(t-\tau))]\mathrm{d}\xi,\quad(i=3,4,\cdots),$$

其中 $G_i(x,\tau)(i=3,4,\cdots)$,由相应的关系式(8)表示,它们可依次地被确定.

由上述计算,我们便得到非线性广义 LGH 扰动方程(1)的孤子解,

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\left[\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t)p^i\right]_{p=1}\\&=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}G_i(x-\xi,\tau)[f(\xi,t-\tau)-f(\xi,-(t-\tau))]\mathrm{d}\xi\right]\quad(\beta^2<1).\end{aligned}\qquad(12)$$

4. 微扰理论

若在广义 LGH 扰动方程(1)中的扰动项是微扰的,即 $g(u,\varepsilon)=\varepsilon\bar{g}(u)$,其中 ε 为正的小参数,这时相应的微扰方程为

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+k^2u^3=\varepsilon\bar{g}(u)\quad(0<\varepsilon\ll1).\qquad(13)$$

由上述计算,不难得到 LGH 微扰方程(13)的孤子扰动解 $u_\varepsilon(x,t)$,

$$u_\varepsilon(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\bar{G}_i(x-\xi,\tau)\right.$$

$$\times\left[f(\xi,t-\tau)-f(\xi,-(t-\tau))\right]\mathrm{d}\xi\Big]$$

$$(\beta^2<1,0<\varepsilon\ll 1),\qquad(14)$$

式中参数 β 和 x_0 分别表示孤子的运动速度和初始位置，而

$$\bar{G}_1(x-\xi,t)$$
$$=\frac{k^2}{\varepsilon}[u_0(x-\xi,t)]^3+\bar{g}(u_0(x-\xi,t)),$$
$$\bar{G}_2(x-\xi,t)$$
$$=[\bar{g}_u(u_0(x-\xi,t))]u_1(x-\xi,t),$$
$$\bar{G}_i(x-\xi,t)$$
$$=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial p^i}\bar{g}\left(\sum u_i p^i,\varepsilon\right)\right]_{p=0}$$
$$(i=3,4,\cdots).$$

上述 $\bar{G}_i(x-\xi,t)$均可依次被确定.

5. 讨论和结论

1)由广义 LGH 扰动方程(1)的左端项的结构及扰动项关于其变元的性态以及由本文引入的同伦映射关系式(3)的解析性，可以证明由 $H[u(x,t),p]=0$ 所决定的解 $u(x,t,p)$ 是关于 p 在[0,1]上的解析函数. 因此，由本文方法确定的级数(4)式，在 $p\in[0,1]$上是收敛的，所以本文用同伦映射的方法决定的孤子解(12)和(14)式均收敛有效.

2)用同伦映射方法得到孤子解的收敛快慢，关键是取决于初始近似的选取. 本文初始近似 $u_0(x,t)$的选取是采用非扰动情形下的典型 LGH 方程的孤子解(9)式. 它保证了对应于扰动情形下的 LGH 方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解，特别是对微扰方程(13). 因而，能快速而有效地得到孤子渐近解(14)式.

3)本文主要是对广义 LGH 扰动方程提供一个数学基本求解方法的理论依据，从而可进一步求得对应物理模型各物理量的近似值. 本文并没有涉及更具体的物理模型，因而不能对具体模型的实际情况和模拟结果作比较. 对于这方面更具体的研究，在本文中未作探讨.

---

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805
[3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 14 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 14]
[4] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]
[5] Pan L X, Liu J L, Li S S *et al* 2002 *Sci. China* A **32** 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深等 2002 中国科学 A **32** 556]
[6] Feng G L, Dong W J, Jia X J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181]
[7] Feng G L, Dai X G, Wang A H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]
[8] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Natur. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌 2002 自然科学进展 **12** 102]
[9] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. China* E **32** 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488]
[10] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1688 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩等 2003 物理学报 **52** 1668]
[11] Lin Y H, Ji Z Z, Zhen Q C 1999 *Prog. Natur. Sci.* **9** 532
[12] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** (Supp Ⅱ) 5
[13] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natur. Sci.* **14** 550
[14] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
[15] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]
[16] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]
[17] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]
[18] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
[19] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natur. Sci.* **14** 1126
[20] Han X L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4061 (in Chinese) [韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061]
[21] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1900 (in Chinese) [欧阳成 2004 物理学报 **53** 1900]
[22] Huang N N 1996 *Theory of Solitons and Method of Perturbations* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 孤子理论和扰动方法(上海:上海科技教育出版社)]
[23] Pan L X, Yan J R, Zhou G H 2001 *Chin. Phys.* **10** 594
[24] Fan E G, Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1245 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1245]
[25] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Science* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学中的近似分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]

Perturbation theory of soliton solution for the generalized Landau-Ginzburg-Higgs equation*

Mo Jia-Qi[1)2)] Wang Hui[3)] Lin Yi-Hua[4)]

1)(*Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2)(*Department of Mathematics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

3)(*Chinese Academy of Meteorological Sciences*, *Beijing* 100081, *China*)

4)(*Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

(Received 1 March 2005; revised manuscript received 16 June 2005)

Abstract

Using the perturbed method, a class of generalized Landau-Ginzburg-Higgs equation is studied. Introducing a homotopic mapping, the solution of original equation is expressed as an asymptotic expansion, then it is expressed approximately by corresponding solutions of linear equations. Finally, the solution of equation in relation to the obtained approximate solution is considered.

Keywords: soliton, perturbation, homotopic mapping

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90111011, 10471039), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Major Program of the Knowledge Innovation of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y604127).