

超混沌系统的间歇同步与控制*

马 军^{1)†} 廖高华²⁾ 莫晓华³⁾ 李维学¹⁾ 张平伟⁴⁾

1) 兰州理工大学物理系, 兰州 730050)

2) 湖南理工学院物理与电子信息系, 岳阳 414006)

3) 广西民族学院电子与通信工程学院, 南宁 530006)

4) 广西师范大学物理与信息工程学院, 桂林 541004)

(2005 年 3 月 9 日收到, 2005 年 7 月 11 日收到修改稿)

基于稳定性理论, 采用间歇反馈控制研究了四维连续超混沌 Rössler 和 LC 振子系统. 通过选择恰当的控制周期 T_s 、自治周期 T_a 以及反馈系数 k 来设计控制器. 数值计算表明: 所设计的控制器使系统经过大约 8 到 35 个时间单位达到了稳定点, 两个系统之间经过大约 15 到 50 个时间单位实现了全局同步. 通过求解系统 Jacobi 矩阵的特征值来确定 T_s 与 T_a 的关系, 获得间歇控制下控制器稳定的条件. 数值计算结果与理论分析一致.

关键词: 超混沌, 同步, Jacobi 矩阵, 稳定性

PACC: 0545

1. 引 言

混沌涉及到工程、生物、化学等多个领域. 近年来对于混沌的同步控制引起了各方面的关注, 常用的控制方法有: 耦合法、线性 and 非线性反馈法、追踪控制法、脉冲控制法、延迟反馈法等^[1-9]. 自从在正常的人脑和心脏的生理活动发现混沌以来, 一些物理学家对心脏的研究表现出更大的兴趣, 特别是螺旋波和时空混沌问题研究. 研究表明: 心率不齐与心肌组织中出现的螺旋波有关, 而螺旋波的破裂会引起心颤, 如何消除和防止螺旋波就是一个很重要的问题. 文献 [10] 采用连续混沌信号驱动研究了螺旋波和时空混沌的控制问题. 从控制的代价和必要性看, 间歇控制^[11-13]比连续控制方法^[14]更有效. 目前大多数的离散、间歇控制方法, 主要借助于数值模拟和 Lyapunov 指数方法来验证, 缺乏解析性. 本文将系统状态分为自由发展态和同步态, 自由发展态过程没有外界控制, 对应 T_a 周期, 同步态则受到外界控制, 对应 T_s 周期. 通过选择恰当的 T_s 、 T_a 和反馈系数 k , 设计了一类线性控制器, 研究四维 Rössler^[15,16]和 LC 振子超混沌^[8,16,17]的控制与同步问题, 最后通过数值计算验证了本方案的可行性. 文中的方法可以应用于

其他混沌和超混沌系统同步控制问题的研究中, 对于控制器稳定性分析会有一些帮助.

2. 方 法

2.1. 混沌控制

对于连续混沌和超混沌系统可用下式描述:

$$\dot{X} = F(X, \mu), \quad (1)$$

式中, X 是 n 维矢量, μ 是系统(1)的参数. $sp_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ 是预期控制的目标, 使用间歇控制器 G 施加在系统(1)的右侧, 则受控的系统为

$$\dot{X} = F(X, \mu) + G, \quad (2)$$

$$G = k(x_i^* - x_i)p(t), \quad (3a)$$

$$p(t) = 1 \quad (i-1)T_a + T_s \leq t \leq iT_s + (i-1)T_a, \quad (3b)$$

$$p(t) = 0 \quad (i-1)T_a + iT_s < t < i(T_s + T_a), \quad (3c)$$

式中, $i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$; 反馈系数 k 是一个常数; T_a 是系统(1)自由演化的周期, 称为自治周期; T_s 是系统在控制器(3)作用下的周期, 称为同步周期. 系统的状态将由(1)-(3)式共同决定, 特别是取决于 T_a 和 T_s 选择, 选择合适的 T_s 和 T_a 可以将系统控制到任意目标.

* 国家自然科学基金(批准号 90303010)资助的课题.

† E-mail: hyperchaos@lut.cn

$$x_1 = x_1^* + \eta_1, \quad x_2 = x_2^* + \eta_2, \quad x_3 = x_3^* + \eta_3, \quad \dots, \quad x_i = x_i^* + \eta_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m); \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^* \\ x_3 = x_3^* \\ \vdots \\ x_n = x_n^* \end{bmatrix} = A_a \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$(i-1)T_a + iT_s < t < i(T_s + T_a); \quad (5b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(F+G)}{\partial x_1} & \frac{\alpha(F+G)}{\partial x_2} & \frac{\alpha(F+G)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\alpha(F+G)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^* \\ x_3 = x_3^* \\ \vdots \\ x_n = x_n^* \end{bmatrix} = A_s \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$(i-1)(T_a + T_s) \leq t \leq iT_s + (i-1)T_a. \quad (6b)$$

这里 A_a 和 A_s 是 Jacobi 矩阵. 对于任意时刻 t , 定义误差 $\eta_i = x_i - x_i^*$, 误差的演化由 (5) 和 (6) 式决定.

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{bmatrix} = A_s A_a \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

对于连续混沌系统 (1), 将 (7) 式离散化后得

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = (A_s)_{T_s} (A_a)_{T_a} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

A_s 是同步周期 T_s 对应的 Jacobi 矩阵, A_a 是自治周期 T_a 对应的 Jacobi 矩阵. 一般地, $T_s = m_1 h$, $T_a = m_2 h$, h 是积分步长, 其中 m_1, m_2 是对应的积分迭代次数, 则 (8) 式简化为

$$\begin{bmatrix} \eta_1(i) \\ \eta_2(i) \\ \eta_3(i) \\ \vdots \\ \eta_n(i) \end{bmatrix} = (A_s)^{m_1} (A_a)^{m_2} \begin{bmatrix} \eta_1(i-1) \\ \eta_2(i-1) \\ \eta_3(i-1) \\ \vdots \\ \eta_n(i-1) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

如果满足

$$\left| \frac{\lambda(i)}{\lambda(i-1)} \right| = |A_s^{m_1} A_a^{m_2}| = |J_1| < 1, \quad (10)$$

则在控制器 (3) 式作用下, 系统 (2) 将达到目标 $sp_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots)$.

在系统的演化过程中, 在控制器 (3) 式作用下按照 A_s 迭代 m_1 次, 按照 A_a 迭代 m_2 次, 选择合适的 (m_1, m_2) 就可以将系统控制到任意目标点.

下面以 Rössler 超混沌系统^[15,16]来说明该控制方法.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= b + x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 &= cx_3 + dx_4. \end{aligned} \quad (11)$$

当选取参数 $a = 0.25, b = 3.0, c = -0.5, d = 0.05$, 系统 (11) 具有两个正的 Lyapunov 指数, 系统 (11) 处于超混沌^[8,9]. 施加控制后的系统 (11) 等价于下列受控系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + G_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4 + G_2, \\ \dot{x}_3 &= b + x_1 x_3 + G_3, \\ \dot{x}_4 &= cx_3 + dx_4 + G_4. \end{aligned} \quad (12)$$

系统 (11) 的平衡点为 $(5.408, 0.5547, -0.5547, -5.547)$ 和 $(-5.408, -0.5547, 0.5547, 5.547)$. 应用

软件 Matchcad 得到对应的 Jacobi 矩阵 A_a 和 A_s 的特 征值分别为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0.5547 & 0 & -5.408 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.309 \\ 0.049 + 0.999i \\ 0.049 - 0.999i \\ 0.102 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 & 1 \\ -0.5547 & 0 & 5.408 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.504 \\ 0.05 + 0.971i \\ 0.05 - 0.971i \\ 0.104 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$G_1 = G_3 = 0, \quad G_2 = k(x_2^* - x_2)\rho(t), \quad G_4 = k(x_4^* - x_4)\rho(t). \tag{14}$$

(14) 式是要选择的控制器, k 是一个常数, 脉冲函数 $\rho(t)$ 满足 $\mathfrak{X}(b)$ $\mathfrak{X}(c)$ 式.

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 & 1 \\ x_{30} & 0 & x_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{bmatrix}, \\ A_s &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 - k & 0 & 1 \\ x_{30} & 0 & x_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 - k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

T_a, T_s 和反馈系数 k 决定着系统的稳定性, 对于任意的反馈系数 k , 从经验看, 只要选择 $T_a < T_s$,

一般都能将系统控制到预期目标. 数值计算和(10)式表明: 只要满足(10)式条件, 即使 $T_a > T_s$ (控制周期大于自由演化周期) 也可以实现预期控制. 这里选择 $T_s = 0.5, T_a = 0.1$ ($m_1 = 500, m_2 = 100$), 在不同的反馈系数 $k = 2$ 和 $k = 10$ 时都可以将系统控制到预期稳定点 $(-5.408, -0.5547, 0.5547, 5.547)$, 见图 1. 对于(14)式, 必须选择合适的 T_a/T_s 和反馈系数 k 来满足(10)式稳定性条件, 最终实现混沌预期控制. 初始值选取 $x_1 = -20, x_2 = x_3 = 0, x_4 = 15$, 积分步长 $h = 0.001, T_s = 0.5, T_a = 0.1$ ($m_1 = 500, m_2 = 100$), 应用四阶 R-K 积分, 数值计算结果见图 1, 图中曲线为系统 4 个对应变量随时间的演化曲线.

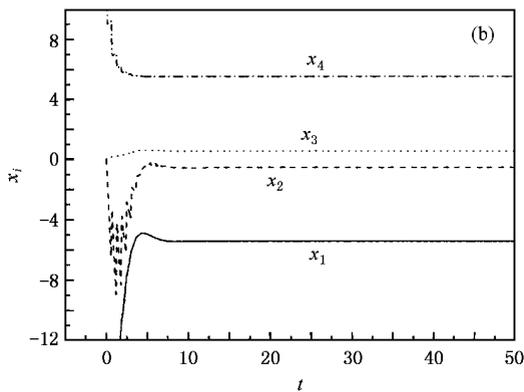
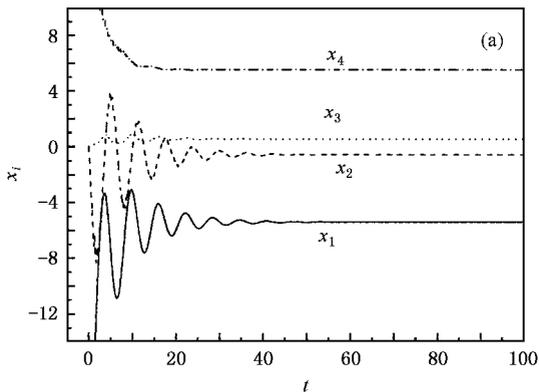


图 1 Rössler 超混沌系统的变量随时间的演化曲线 $T_s = 0.5, T_a = 0.1$ ($m_1 = 500, m_2 = 100$). (a) $k = 2$ (b) $k = 10$

数值计算表明: 系统(11)在大约 8 到 35 个时间单位达到稳定点 $(-5.408, -0.5547, 0.5547, 5.547)$. 进一步的数值计算证明: 反馈系数越大达到

稳定点的暂态过程越短, 通过增加反馈系数 k 来选择其他合适的 T_a/T_s , 同样可使系统达到混沌预期控制.

2.2. 混沌的同步

系统(1)为驱动系统,对应的响应系统为

$$\dot{Y} = U(Y, u). \quad (16)$$

定义误差 $E = X - Y$ 或者 $e_i = x_i - y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

采用上述方法来研究系统(1)和(16)的同步问题,则受控的响应系统为

$$\dot{Y} = U(Y, u) + G, \quad (17)$$

$$G = k(x_i - y_i)p(t), \quad (18)$$

式中, k 是一个常数, 脉冲函数 $p(t)$ 满足 $\mathfrak{X}(b)$ $\mathfrak{X}(c)$ 式. 采用相同的方法有

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = (A_s)_{T_s} (A_a)_{T_a} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_n \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} e_1(i) \\ e_2(i) \\ e_3(i) \\ e_n(i) \end{bmatrix} = (A_s)^{m_3} (A_a)^{m_4} \begin{bmatrix} e_1(i-1) \\ e_2(i-1) \\ e_3(i-1) \\ e_n(i-1) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

如果满足

$$\left| \frac{\epsilon(i)}{\epsilon(i-1)} \right| = |A_s^{m_3} A_a^{m_4}| = |J_2| < 1, \quad (21)$$

则在控制器(18)式作用下,系统(19)稳定,系统(1)和(16)达到同步. 在系统的演化过程中,在控制器(18)式作用下,按照 A_s 迭代 m_3 次,按照 A_a 迭代 m_4 次,选择合适的(m_3, m_4),就可以实现混沌同步.

2.2.1. 两个四维 Rössler 超混沌系统^[15,16]的同步

对应系统(11)的受控响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3 + G_1, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + ay_2 + y_4 + G_2, \\ \dot{y}_3 &= b + y_1y_3 + G_3, \\ \dot{y}_4 &= cy_3 + dy_4 + G_4, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= G_3 = 0, \\ G_2 &= k(x_2 - y_2), \\ G_4 &= k(x_4 - y_4), \end{aligned} \quad (23)$$

式中, k 是一个常数, 脉冲函数 $p(t)$ 满足 $\mathfrak{X}(b)$ $\mathfrak{X}(c)$ 式. 定义 $e_i = x_i - y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). A_a 和 A_s 同(15)式. 对于(23)式,必须选择合适的 T_a/T_s 和反馈系数 k 来满足(21)式. 数值计算结果见图2.

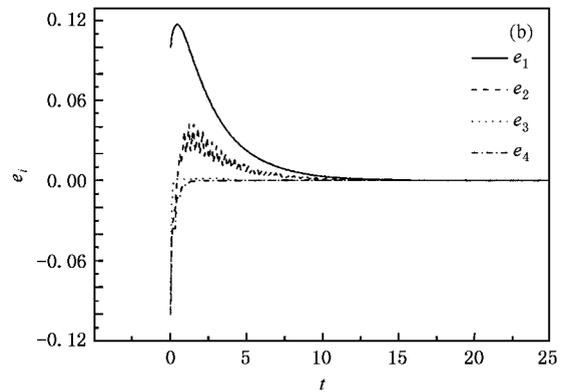
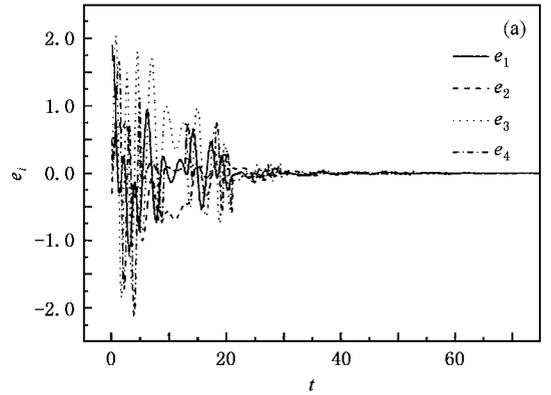


图2 两个 Rössler 超混沌系统的误差变量随时间的演化曲线
 $T_s = 0.1, T_a = 0. \mathfrak{X} m_3 = 100, m_4 = 200$) (a) $k = 2$ (b) $k = 10$

积分步长 $h = 0.001$, 在 $T_s = 0.1, T_a = 0. \mathfrak{X} m_3 = 100, m_4 = 200$) $k = 2$ 时数值计算结果见图 $\mathfrak{X}(a)$, $k = 10$ 时数值计算结果见图 $\mathfrak{X}(b)$, 图中曲线为两个系统对应变量的误差随时间的演化曲线. 数值计算表明:两个四维 Rössler 超混沌系统在大约 15 到 25 个时间单位达到全局同步,反馈系数越大达到同步的暂态过程越短.

2.2.2. 两个四维 LC 超混沌系统^[15,16]的同步

对于驱动系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= c(x_1 - x_4), \\ \dot{x}_4 &= c(x_3 - b(x_4 - 1)H(x_4 - 1)), \end{aligned} \quad (24)$$

当选取参数 $a = 0.7, b = 10, c = e = 3$ 时,系统(24)具有两个正的 Lyapunov 指数,且处于超混沌状态^[9,10],其平衡点是 $(0, 0, 0, 0)$. 驱动系统(24)所对应的响应系统为

$$\dot{y}_1 = ay_1 - y_2 - y_3 + G_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= y_1 + G_2, \\ \dot{y}_3 &= c(y_1 - y_4) + G_3, \\ \dot{y}_4 &= c(y_3 - b(y_4 - 1)H(y_4 - 1)) + G_4 \quad (25) \\ G_2 &= G_3 = G_4 = 0, \\ G_1 &= k(x_1 - y_1), \end{aligned} \quad (26)$$

式中 k 是一个常数, 脉冲函数 $p(t)$ 满足(3b), (3c) 式.

$$A_a = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & e & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_s = \begin{bmatrix} a - k & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & e & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3, 4)$. 对于(26)式, 必须选择合适的 T_a/T_s 和反馈系数 k 来满足(21)式稳定性条件, 最终实现混沌同步. 数值计算结果见图 3.

选择积分步长 $h = 0.001, T_s = 0.1, T_a = 0.2 (m_3 = 100, m_4 = 200), k = 2$ 时数值计算结果见图 3(a), $T_s = 0.1, T_a = 0.2 (m_3 = 100, m_4 = 200), k = 10$ 时数值计算结果见图 3(b).

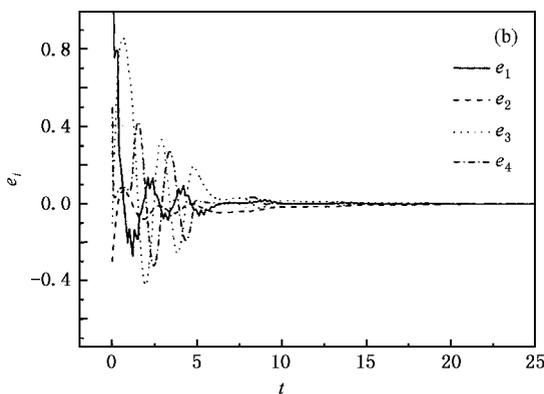
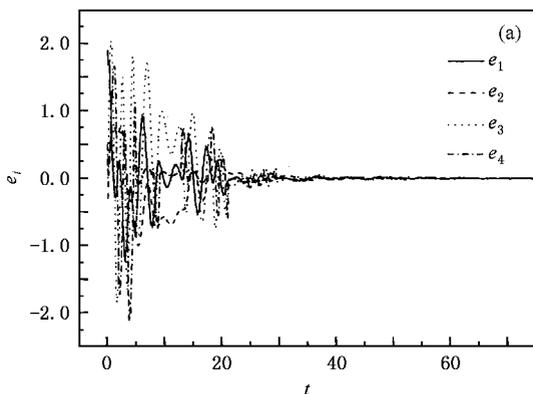


图 3 两个 LC 超混沌系统的误差变量随时间的演化曲线 ($T_s = 0.1, T_a = 0.2 (m_3 = 100, m_4 = 200)$). (a) $k = 2$ (b) $k = 10$

数值计算表明: 两个四维 LC 超混沌系统在大约 20 到 50 个时间单位内达到全局同步, 反馈系数越大达到同步的暂态过程越短.

3. 结 论

本文基于稳定性理论和矩阵理论, 研究了一类四维超混沌系统的间歇同步控制问题. 通过选择恰当的驱动周期(同步控制周期)和自治周期以及反馈

系数, 将系统变量与目标轨道变量的误差方程在稳定点附近展开, 获得满足稳定性条件的控制器. 数值计算表明: 该方法可以有效地将超混沌系统控制到预期目标轨道, 实现超混沌系统之间的同步, 反馈系数越大, 达到控制目标的暂态过程就越短. 最近, 我们应用文中的方法研究了一类激发介质螺旋波的间歇控制问题, 结果表明这种间歇控制方案可以抑制螺旋波.

[1] Issobhy M, Shehata A E D 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 2831
 [2] Ho M C, Hng Y C, Chou C H 2002 *Phys. Lett. A* **296** 43
 [3] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G et al 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
 [4] Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y C et al 2000 *Phys. Rep.* **329** 103
 [5] Liao G H, Weng J Q, Cheng L C et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 35 (in Chinese) [廖国华, 翁甲强, 成丽春等 2005 物理学报 **54** 35]
 [6] Zhang P W, Tang G N, Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497 (in Chinese) [张平伟, 唐国宁, 罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497]
 [7] Mo X H, Tang G N 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2080 (in Chinese) [莫晓华, 唐国宁 2004 物理学报 **53** 2080]
 [8] Ma J, Pu Z S, Tang G N 2004 *J. Sys. Sim.* **16** 1336 (in Chinese) [马 军, 蒲忠胜, 唐国宁 2004 系统仿真学报 **16** 1336]
 [9] Hua C C, Guan X P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1391
 [10] Ma J, Ying H P, Pu Z S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1065
 [11] Lai J W, Zhou S P, Li G H et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 21 (in Chinese) [赖建文, 周世平, 李国辉等 2001 物理学报 **50** 21]

- [12] Dai D ,Ma X K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1237 (in Chinese) 戴
栋、马西奎 2001 *物理学报* **50** 1237]
- [13] Wang J L ,Chen G Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1605 (in Chinese)
[王金兰、陈光旨 1999 *物理学报* **48** 1605]
- [14] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [15] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [16] Tamasevicius A ,Cenys A 1997 *Phys. Rev. E* **55** 297
- [17] Tamasevicius A ,Namajunas A , Cenys A 1996 *Electron. Lett.* **32**
957

Hyperchaos synchronization and control using intermittent feedback^{*}

Ma Jun¹⁾ Liao Gao-Hua²⁾ Mo Xiao-Hua³⁾ Li Wei-Xue¹⁾ Zhang Ping-Wei⁴⁾

¹ *Department of Physics ,Lanzhou University of Technology ,Lanzhou 730050 ,China)*

² *Department of Physics and Electronic Information ,Hunan Institute of Science and Technology ,Yueyang 414006 ,China)*

³ *College of Electronics and Telecommunications Engineering ,Guangxi University for Nationalities ,Nanning 530006 ,China)*

⁴ *College of Physics and Information Technology ,Guangxi Normal University ,Gulin 541004 ,China)*

(Received 9 March 2005 ; revised manuscript received 11 July 2005)

Abstract

Based on the stability theory ,intermittent feedback scheme is proposed to synchronize and control the four-dimensional continuous hyperchaotic Rössler and *LC* systems. The systems are directed to reach arbitrary desired target within about 8 to 35 time units and realize complete synchronization within about 15 to 50 time units under this scheme by selecting right autonomous period T_a , controlling period T_s and gain coefficient k . The advantage of this scheme is that the controller is designed analytically in detail ,not only relying on the common numerical simulation. The controller works only on certain period and the system develops freely in other periods. The numerical simulation results confirmed its effectiveness and gave evidence that shorter transient period before reaching desired target requires bigger feedback coefficient k ,and it is consistent with the theoretical analysis.

Keywords : hyperchaos , synchronization , Jacobi matrix , stability

PACC : 0545