

# 布拉格声光双稳系统时空混沌的单向耦合同步

岳立娟<sup>1)†</sup> 沈 柯<sup>1)</sup>

1) 长春理工大学物理系, 长春 130022)

2) 东北师范大学物理系, 长春 130024)

(2005 年 4 月 6 日收到, 2005 年 5 月 16 日收到修改稿)

使用非线性动力学中的一维和二维耦合格子模型研究两个声光双稳系统的时空混沌同步. 将驱动系统的输出以适当的比例耦合到响应系统并进行均衡, 能实现两系统的时空混沌同步. 利用计算最大条件 Lyapunov 指数, 给出达到同步所需的最小耦合强度与系统参数的关系. 数值实验表明, 在小噪声影响时仍然可以实现两系统的同步, 此法具有一定的抗干扰能力.

关键词: 单向耦合同步, 时空混沌, 布拉格声光双稳系统

PACC: 4265T, 0545

## 1. 引 言

自 20 世纪 90 年代 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>首次实现混沌同步以来, 许多学者在理论上提出了多种同步混沌的方法, 并且在实验中获得了成功<sup>[2-10]</sup>. 最近几年人们对扩展的空间系统中复杂的时空行为更为兴趣, 因为这些系统是典型的高维系统, 包含许多个稳定的和不稳定的模式, 所以同步时空混沌仍然具有挑战性<sup>[11-19]</sup>. 本文利用单向耦合方法分别实现了一维和二维耦合映象布拉格系统时空混沌的同步, 通过计算最大条件 Lyapunov 指数, 给出实现同步所需的最小耦合强度与系统参数的关系. 讨论了二维布拉格声光双稳系统在小的随机噪声干扰下, 利用此单向耦合同步法实现两系统同步的条件及同步结果. 数值实验表明, 此同步方法对噪声影响具有一定的鲁棒性.

## 2. 声光双稳系统的模型

布拉格声光双稳系统由激光源、声光调制器、驱动源、光电转换器、放大器和延迟线组成, 布拉格声光双稳系统的演化规律为<sup>[20]</sup>

$$\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \pi \{ A - \mu \sin^2 [ x(t - \tau_d) - x_d ] \}, \quad (1)$$

式中  $x(t)$  是系统的状态变量;  $\mu$  是决定系统演化

规律的控制参数, 它正比入射光强和放大器的增益;  $A$  和  $x_b$  分别是与放大器和驱动器偏置电压相关的常数;  $\tau_0$  和  $\tau_d$  分别是系统响应时间和延迟时间. 对于响应时间远远快于延迟时间 ( $\tau_0 \ll \tau_d$ ) 的系统, 方程 (1) 可表示为<sup>[21]</sup>

$$x_{n+1} = f(x_n) = \pi [ A - \mu \sin^2(x_n - x_b) ]. \quad (2)$$

当系统参数  $x_b = \frac{\pi}{4}$ ,  $A = 0.5$ ,  $\mu = 0.9$  时, 方程 (2) 的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_M = 0.72581$ . 布拉格声光双稳系统处于混沌状态, 系统随着控制参数  $\mu$  增加产生的倍周期分岔如图 1 所示.

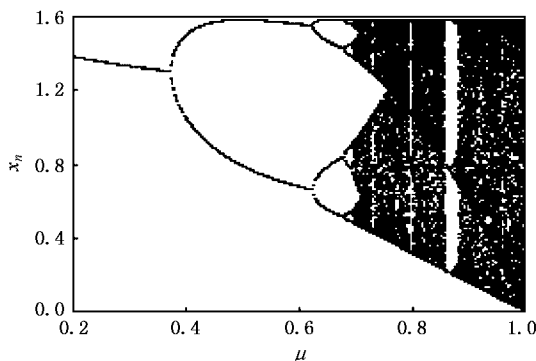


图 1 布拉格声光双稳系统的倍周期分岔图

## 3. 一维耦合映象格子系统模型

耦合映象格子模型是研究时空系统混沌特性比

† E-mail: ljyue@nenu.edu.cn

较简单和方便的工具,我们采用一维耦合映象格子为系统模型<sup>[22]</sup>,

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon) f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))], \quad (3)$$

式中,  $n$  表示时间步数,  $1, 2, \dots, L$  为格点坐标,  $\epsilon$  为格点间的耦合强度, 局域非线性动力学函数  $f(x_n)$  取布拉格声光双稳系统(2),  $x_n$  是状态变量, 取周期边界条件  $x_n(0) = x_n(L+1) = 0$ . 在本文的数值实验中, 我们取参数  $A = 0.5, \mu = 0.9, x_b = \frac{\pi}{4}, \epsilon = 0.2$ , 当  $L$  取不同值时, 布拉格声光双稳空间扩展系统(3)的最大 Lyapunov 指数谱如图 2 所示, 其最大 Lyapunov 指数  $\lambda_M$  均为正数, 此系统为时空混沌行为.

我们以布拉格声光双稳的一维空间扩展系统(3)为驱动系统, 构造单向耦合的同步响应系统为

$$y_{n+1}(i) = (1 - \epsilon) f\left(\frac{y_n(i) + kx_n(i)}{1 + k}\right) + \frac{\epsilon}{2} \left[ f\left(\frac{y_n(i-1) + kx_n(i-1)}{1 + k}\right) \right], \quad (4)$$

式中  $k$  为单向耦合的耦合强度,  $k = 0$  时相当于无耦合驱动,  $k$  趋于无穷大时相当于完全驱动. 驱动和响应系统的参数取  $A = 0.5, \mu = 0.9, x_b = \frac{\pi}{4}, \epsilon =$

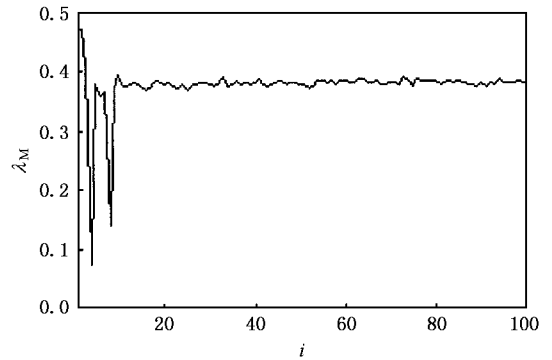


图 2 布拉格声光双稳空间扩展系统的最大 Lyapunov 指数谱  
系统参数  $A = 0.5, \mu = 0.9, x_b = \frac{\pi}{4}, \epsilon = 0.2, x_0(i) = 0.2$ , 边界条件  $x_n(0) = x_n(L+1) = 0$

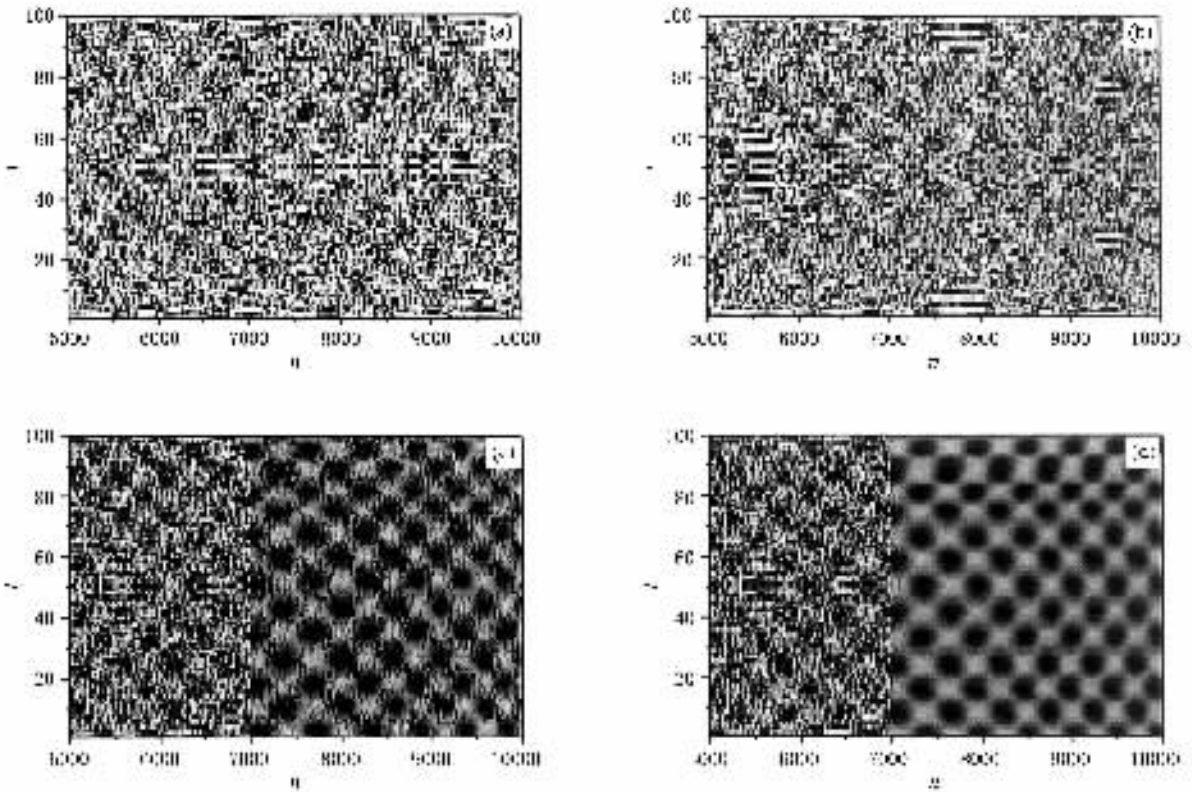


图 3 一维布拉格声光双稳空间扩展系统的时空演化图 系统参数  $A = 0.5, \mu = 0.9, x_b = \frac{\pi}{4}, \epsilon = 0.2, x_0(i) = 0.2, y_0(i) = 0.21$  边界条件  $x_n(0) = x_n(L+1) = 0, y_n(0) = y_n(L+1) = 0$ , 两系统的长度  $L$  取 100. (a)  $k = 0$  时  $x_n(i)$  的时空演化图 (b)  $k = 0$  时  $y_n(i)$  的时空演化图 (c)  $k = 0.35$  时  $x_n(i) - y_n(i)$  的时空演化图, (d)  $k = 0.45$  时  $x_n(i) - y_n(i)$  的时空演化图

0.2,  $L = 100$ , 初始状态分别为  $x_0(i) = 0.20$ ,  $y_0(i) = 0.21$ , 图 3(a)(b) 分别为  $k = 0$  时驱动系统  $x_n(i)$  和响应系统  $y_n(i)$  的时空演化图, 去掉前 5000 步的暂态过程, 耦合同步从 7000 步开始. 图 3(c) 为  $k = 0.35$  时  $x_n(i) - y_n(i)$  的时空演化图, 此时两系统还不能达到同步. 图 3(d) 为  $k = 0.45$  时  $x_n(i) - y_n(i)$  的时空演化图, 此时两系统达到了完全同步. 可见, 要实现驱动系统和响应系统的时空混沌同步, 只有单向耦合强度大于一定值才能实现两系统的时空混沌同步. 为此我们计算出响应系统的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{\text{MCLC}}$  与单向耦合强度  $k$  的关系曲线

如图 4 所示, 系统参数  $A = 0.5$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $x_b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $L = 100$ , 初始状态分别为  $x_0(i) = 0.20$ ,  $y_0(i) = 0.21$ , 在满足最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{\text{MCLC}} < 0$  所对应的  $k$  值均可实现时空混沌系统的同步. 由图 4 可见, 最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{\text{MCLC}} = 0$  所对应的  $k$  值就是实现布拉格声光双稳空间扩展系统(3)和(4)时空混沌同步所需的最小耦合强度  $k_{\text{min}}$ .

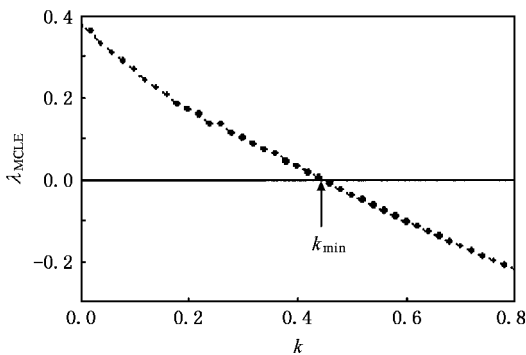


图 4 最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{\text{MCLC}}$  与单向耦合强度  $k$  的关系曲线

在系统控制参数  $\mu$  变化时, 则需要有不同的最小耦合强度  $k_{\text{min}}$  作用才能使两系统达到同步. 为了更好地分析最小耦合强度  $k_{\text{min}}$  和系统控制参数  $\mu$  变化关系, 我们给出  $k_{\text{min}}$  与  $\mu$  的关系曲线如图 5 所示. 由图 5 可见, 随着系统控制参数  $\mu$  的增加, 最小耦合强度  $k_{\text{min}}$  也呈现增加的趋势, 但并非简单的线性增加.

#### 4. 二维耦合映象格子系统模型

我们以二维耦合映象格子为系统模型<sup>[23]</sup>,

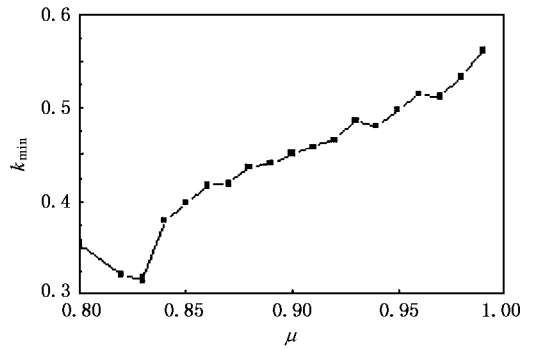


图 5 最小耦合强度  $k_{\text{min}}$  与系统控制参数  $\mu$  的关系曲线

$$x_{n+1}(i, j) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i, j)) + \frac{\varepsilon}{4}[f(x_n(i+1, j)) + f(x_n(i-1, j)) + f(x_n(i, j+1)) + f(x_n(i, j-1))], \quad (5)$$

式中,  $n = 1, 2, \dots, N$  表示时间步数,  $i, j = 1, 2, \dots, L$  为二维格点坐标,  $\varepsilon$  为格点间的耦合强度, 局域非线性动力学函数  $f(x_n(i, j))$  取布拉格声光双稳系统(2),  $x_n(i, j)$  为状态变量, 边界条件  $x_n(0, j) = x_n(i, L+1) = x_n(i, 0) = x_n(L+1, j) = 0$ , 系统参数  $\varepsilon = 0.03$ ,  $A = 0.5$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $x_b = \frac{\pi}{4}$ ,  $L = 100$ ,  $x_0(i, j) = 0.20$ . 二维布拉格声光双稳系统的时空演化图如图 6 所示. 以布拉格声光双稳的二维空间扩展系统(5)

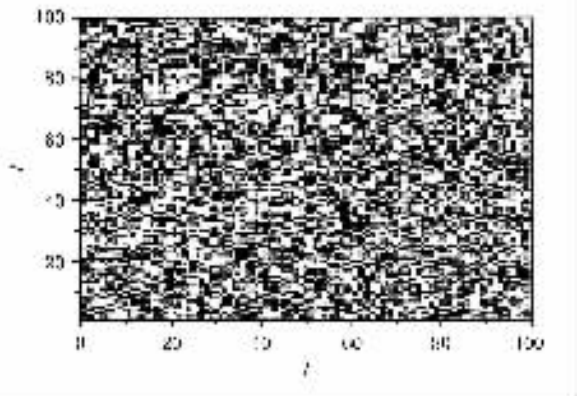


图 6 二维布拉格声光双稳系统时空演化图

为驱动系统, 为了实现同步, 构造其单向耦合同步的二维响应系统,

$$y_{n+1}(i, j) = (1 - \varepsilon)f\left(\frac{y_n(i, j) + ky_n(i, j)}{1 + k}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\left[f\left(\frac{y_n(i-1, j) + ky_n(i-1, j)}{1 + k}\right) + f\left(\frac{y_n(i, j-1) + ky_n(i, j-1)}{1 + k}\right) + f\left(\frac{y_n(i, j+1) + ky_n(i, j+1)}{1 + k}\right) + f\left(\frac{y_n(i+1, j) + ky_n(i+1, j)}{1 + k}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
 &+ f\left(\frac{y_n(i+1, j) + kx_n(i+1, j)}{1+k}\right) \\
 &+ f\left(\frac{y_n(i, j-1) + kx_n(i, j-1)}{1+k}\right) \\
 &+ f\left(\frac{y_n(i, j+1) + kx_n(i, j+1)}{1+k}\right) \Big], \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中,  $k$  为单向耦合的耦合强度, 响应系统的参数和边界条件同驱动系统(5), 初始状态分别为  $x_0(i, j) = 0.20$ ,  $y_0(i, j) = 0.21$ . 图 7 为二维时空系统  $x_n(i, j)$ ,  $y_n(i, j)$  的同步相图. 由图 7 可见, 当  $k = 0.56$  时驱动和响应系统没有达到同步(图 7(a)), 当  $k = 0.65$  时驱动和响应系统达到同步(图 7(b)).

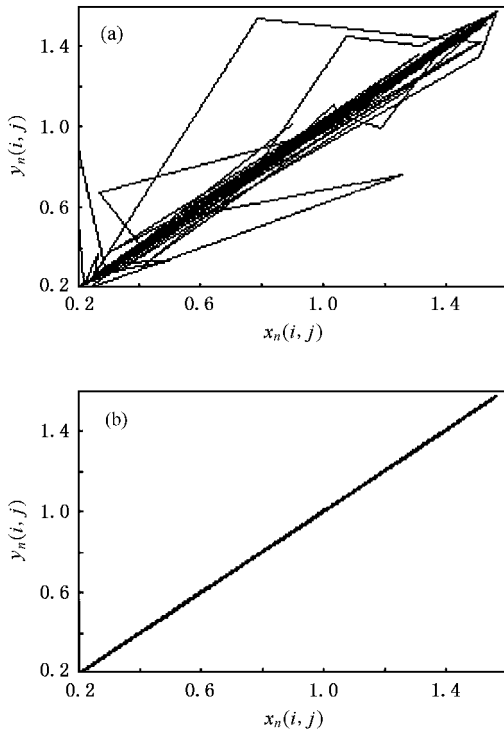
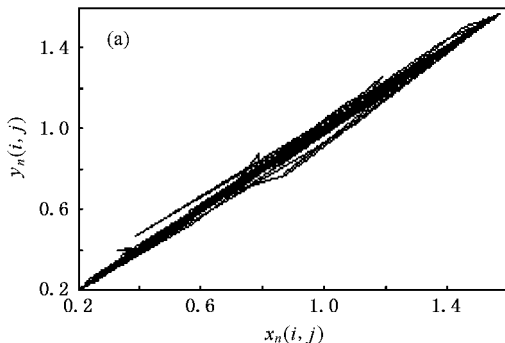


图 7 二维布拉格声光双稳空间扩展系统的时空混沌同步图 (a)  $k = 0.56$ , (b)  $k = 0.65$



在二维布拉格声光双稳空间扩展系统(6)中, 考虑噪声对此同步方案的影响, 我们在此系统中加入噪声  $A_p \xi$ , 二维布拉格声光双稳空间扩展系统表示为

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}(i, j) = &(1 - \epsilon) \left( \frac{y_n(i, j) + kx_n(i, j)}{1+k} \right) \\
 &+ \frac{\epsilon}{4} \left[ f\left(\frac{y_n(i-1, j) + kx_n(i-1, j)}{1+k}\right) \right. \\
 &+ f\left(\frac{y_n(i+1, j) + kx_n(i+1, j)}{1+k}\right) \\
 &+ f\left(\frac{y_n(i, j-1) + kx_n(i, j-1)}{1+k}\right) \\
 &+ f\left(\frac{y_n(i, j+1) + kx_n(i, j+1)}{1+k}\right) \Big] \\
 &+ A_p \xi, \quad (7)
 \end{aligned}$$

式中  $\xi$  是  $(0, 1)$  范围内随机分布的噪声,  $A_p$  是噪声的幅值. 图 8 是响应系统的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  与单向耦合强度  $k$  的关系曲线. 由图 8 可见, 噪声幅值  $A_p$  在  $(0, 0.002)$  的取值内, 适当地选取单向耦合强度  $k$ , 其最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC} < 0$ , 可以实现驱动系统和响应系统的同步. 图 9 为二维布拉格声光双稳时空系统, 在噪声幅值  $A_p$  在  $(0, 0.0005)$  取值内的同步相图. 由图 9 可见, 当  $k = 0.65$

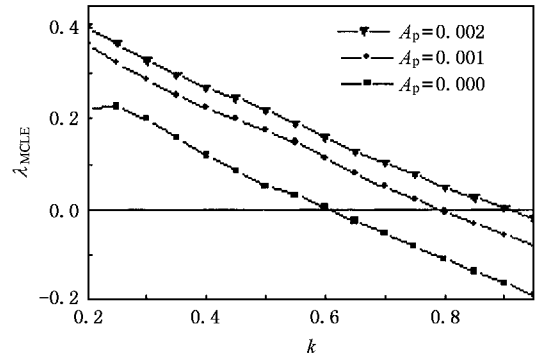


图 8 二维布拉格声光双稳空间扩展系统的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  与耦合强度  $k$  的关系曲线

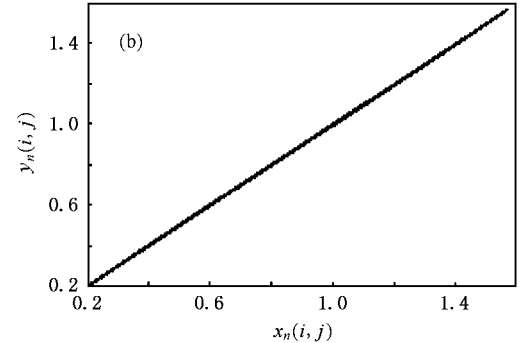


图 9 二维布拉格声光双稳空间扩展系统在  $(0, 0.0005)$  随机噪声干扰下的时空混沌同步图 (a)  $k = 0.65$  (b)  $k = 0.75$

时驱动和响应系统在有噪声的情况下没有实现同步(图 9(a)),当  $k = 0.75$  时驱动和响应系统在有噪声的情况下也能实现同步(图 9(b)).

## 5. 结 论

在一维和二维布拉格声光双稳空间扩展系统中,我们使用了单向耦合同步驱动法,即将驱动系统

中的输出信号以一定的比例耦合到响应系统中,并将响应系统变量与驱动系统变量进行适当的比例均衡,在单向耦合强度增加到一定值时,可以实现驱动系统和响应系统的同步.通过数值实验可以证明,在小噪声影响的系统中,利用此单向耦合同步法,通过适当地增加单向耦合强度仍然可以实现两系统同步.因此,这种单向耦合同步方法具有一定的鲁棒性.

- 
- [ 1 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 812
- [ 2 ] Murali K , Amritkar R E 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4882
- [ 3 ] Kohn J K , Amritkar R E 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4843
- [ 4 ] Roy R , Thornburg K S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009
- [ 5 ] Sugawara T , Tachikawa M , Tsukamoto T *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3502
- [ 6 ] Liu J G , Shen K , Zhou L W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1041( in Chinese )[ 刘金刚、沈 柯、周立伟 1997 *物理学报* **46** 1041 ]
- [ 7 ] Lou X S , Fang J Q , Wang L H *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2022( in Chinese )[ 罗晓曙、方锦清、王力虎等 1999 *物理学报* **48** 2022 ]
- [ 8 ] Tang D Y , Dykstra R , Hamilton M W *et al* 1998 *Phys. Rev. E* **57** 5247
- [ 9 ] Vanwiggerren G D , Roy R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3547
- [ 10 ] Zhang S H , Shen K 2004 *Chin. Phys.* **13** 1215
- [ 11 ] Nekorkin V I , Kazantsev V B , Verlarde M G 1997 *Phys. Lett. A* **236** 505
- [ 12 ] Femat R , Alvarez R J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **236** 307
- [ 13 ] Anishchenko V S , Silchenko A N , Khovamov I A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 316
- [ 14 ] Hu G , Xiao J , Yang J *et al* 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2738
- [ 15 ] Yang J , Hu G , Xiao J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 496
- [ 16 ] Zhang X , Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1000( in Chinese )[ 张旭、沈 柯 2002 *物理学报* **51** 1000 ]
- [ 17 ] Wu L , Zhu S Q 2004 *Commun. Theor. Phys. ( Beijing )* **41** 225
- [ 18 ] Li Z , Shi S S 2004 *Chin. Phys.* **13** 996
- [ 19 ] Shi X , Lu Q S 2005 *Chin. Phys.* **14** 77
- [ 20 ] Hopf F A , Kaplan D L , Gibbs H M *et al* 1982 *Phys. Rev. A* **25** 2172
- [ 21 ] Derstine M W , Gibbs H M , Hopf F A *et al* 1983 *Phys. Rev. A* **27** 3200
- [ 22 ] Kaneko K 1989 *Physica D* **34** 1
- [ 23 ] Kaneko K 1989 *Physica D* **37** 60

# Unilateral coupling synchronization of spatiotemporal chaos in the Bragg acousto-optic bistable system

Yue Li-Juan<sup>1,2)</sup> Shen Ke<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Physics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China*

<sup>2)</sup> *Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China*

( Received 6 April 2005 ; revised manuscript received 16 May 2005 )

## Abstract

The one- and two-dimensional coupled map lattices in nonlinear dynamic system are used as the system model. We report a method with which the spatiotemporal chaos can be synchronized using unilateral coupling in two Bragg acousto-optic bistable spatial extended systems. The synchronization can be realized by appropriately selecting the coupling strength and the equilibrium coefficient. By calculating the largest conditional Lyapunov exponent, we obtain the minimum coupling strength for achieving the synchronization and the functional relationship between the minimum coupling strength and the system parameters. Our simulation shows that the synchronization can also be realized under the influence of small random noise, so this method is robust.

**Keywords** : unilateral coupling synchronization, spatiotemporal chaos, Bragg acousto-optic bistable system

**PACC** : 4265T, 0545