

非线性动力系统分岔点邻域内随机共振的特性^{*}

张广军 徐健学[†]

(西安交通大学建筑工程与力学学院, 710049)

(2003 年 7 月 24 日收到, 2004 年 5 月 21 日收到修改稿)

研究了叉形分岔系统和 FitzHugh-Nagumo (FHN) 细胞模型两种非线性动力系统分岔点邻域内随机共振的特性. 研究表明, 这两种系统在分岔发生时具有由一个吸引子变为两个吸引子或者由两个吸引子变为一个吸引子共同的分岔特性. 即在分岔点的邻域内, 系统在分岔点的两侧有分岔前吸引子和分岔后吸引子存在. 在噪声的作用下, 系统的运动除了像传统随机共振的机理那样在分岔点一侧共存的吸引子之间跃迁, 还在分岔点两侧三个吸引子(分岔前一个吸引子和分岔后两个吸引子)之间跃迁, 并且这种跃迁单独诱发了随机共振. 在两种跃迁都发生的情况下, 在其分岔点的邻域内, 由第二种跃迁诱发的随机共振在引起第一种跃迁噪声的强度很大的范围内变化仍可维持, 而第一种跃迁诱发的随机共振在引起第二种跃迁噪声的强度很小的范围内变化即迅速消失.

关键词: 随机共振, 吸引子, 分岔点, 跃迁

PACC: 0547, 0540, 1420C

1. 引 言

自从 Benzi 等^[1,2]在解释古气象学中冰川期和暖气候期周期性交替出现现象时提出随机共振的概念以来, 人们对随机共振进行了大量的研究. 在噪声环境下弱信号的检测^[3]、在强噪声环境下提取信息信号^[4]、非线性光学系统中弛豫速率与随机共振^[5]、神经元信息编码^[6-10]以及电磁场理论等许多领域里研究了随机共振的现象. 涉及的物理系统不仅包括多稳系统, 还包括可兴奋系统等神经元模型. 如 Gong 和 Xu^[8-10]在研究神经信息编码和传递中, 利用 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元模型, 发现了在某些参数下有双吸引子共存(阈上振荡和阈下振荡)的现象. 并且发现系统在激励噪声的作用下, 发生了随机共振的现象. 文献 [11, 12] 利用绝热近似理论分别研究了一维、二维系统的随机共振, 得到了近似的解析结果. 文献 [13] 研究了抛物线型双势井系统的随机共振. 文献 [14] 还利用矩阵方法研究了二维系统的随机共振. 现有文献的研究认为随机共振的机理为在激励噪声的作用下, 系统的运动在两个共存的吸引子(不动点或极限环)之间跃迁, 进而发生随机共振. 而在非线性动力系统工作的环境里, 除了存在

外部的噪声外, 还存在内噪声, 如热噪声等. 内噪声对系统的分岔参数产生干扰, 使之发生随机变化. 对于有些系统(如叉形分岔系统), 某些类型的乘性噪声即可以对参数产生扰动. 文献 [15] 研究了双稳系统在加性噪声和乘性噪声共同作用下的随机共振, 而他们的研究局限于双稳系统和分岔参数在远离分岔点的区域内, 而且他们的研究还假设在乘性噪声的作用下系统的运动绝大多数时间仍在 x_{\pm} 附近运动. 这个假设在分岔参数远离分岔点时是符合实际情况的. 这时虽然乘性噪声对系统的分岔参数产生扰动, 但噪声干扰下的参数仍然位于分岔点的右边, 所以严格来说系统的运动在弱乘性噪声的扰动下只存在一种类型的跃迁, 即分岔发生后共存的双吸引子之间的跃迁. 但当分岔参数在分岔点的邻域内时, 该假设就不成立了. 当非线性动力系统的分岔参数位于分岔点的小邻域内时, 鉴于非线性动力系统的非线性动力特性极其复杂, 当系统分岔参数受到微小的扰动时, 即在微弱噪声的扰动下, 受扰的分岔参数就会在分岔前后之间发生随机变化, 进而引起动力系统的动力特性发生分岔, 发生定性的改变. 这时系统的运动会发生另一种类型的跃迁, 即在分岔点两侧吸引子(分岔前吸引子和分岔后吸引子)之间的跃迁, 也可能两种类型的跃迁同时发生. 为了摸清在

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10432010, 10172067)资助的课题.

[†] E-mail: jxxu@mail.xjtu.edu.cn

这种情况下系统随机共振的特性,有必要研究分岔参数在分岔点的邻域内时,系统随机共振的特性.近年来,大量的研究发现神经元在信息的编码与传递过程中可以通过随机共振对噪声环境中的弱信号进行放大,而很多研究是利用 FHN 神经元模型进行的.研究发现发生 Hopf 分岔的 FHN 神经元模型在分岔发生前^[16,17]和分岔发生后^[8-10]在外噪声的作用下发生了随机共振.而 FHN 细胞模型的分岔特性要比叉形分岔系统复杂.随着分岔参数增加,系统先由一个吸引子变为两个吸引子,分岔参数经过双吸引子共存的一段区域后又由两个吸引子变为一个吸引子.而且对分岔参数产生扰动的噪声也不是简单的乘性噪声.在分岔点的邻域内,FHN 细胞模型的分岔参数在噪声的摄动下同样在分岔点的左右随机变化,使系统的运动在分岔前吸引子和分岔后吸引子之间跃迁,或者两种跃迁(分岔点一侧共存吸引子之间的跃迁和分岔前吸引子和分岔后吸引子之间跃迁)都发生,这时随机共振的特性如何?迄今我们尚未见这方面的报道,为解决这些问题,有必要对非线性动力系统分岔点邻域内的随机共振进行研究.与以往的研究不同,本文重点研究了叉形分岔系统和 FHN 细胞模型两个系统在分岔点的邻域内,当分岔参数受弱噪声的摄动时系统的运动在分岔发生前后的吸引子之间进行跃迁的情况以及所诱发的随机共振的特性.为此本文首先给出了叉形分岔系统和 FHN 细胞模型的分岔特性,其次在此基础上研究了在其分岔点的邻域内系统的运动在分岔前后吸引子之间的跃迁以及由此所诱发的随机共振,以及在两种跃迁都发生时随机共振的特性.

2. 叉形分岔系统和 FHN 神经元模型的分岔特性

2.1. 叉形分岔系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + r \sin \omega t, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

无激励时($r = 0.0$), $\mu \leq 0$ 时,系统有唯一的不动点 $x = 0$,且是渐近稳定的.

$\mu \geq 0$ 时,系统有三个不动点,其中 $x = 0$ 是不稳定的, $x = \pm \sqrt{\mu}$ 是渐近稳定的.

有弱激励时,系统的不动点变成了微小的极限环,稳定性不变,由于极限环非常小,人们在定性分析时仍将其作为不动点.

2.2. FHN 细胞模型——Hopf 分岔系统

周期激励的 FHN 神经元细胞的数学模型为^[18]

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dv}{dt} = a(v - a)(1 - v) - w, \\ \frac{dw}{dt} = v - dw - b + r \sin(\beta t). \end{cases} \quad (2)$$

变量 v 为快变电压变量, w 为慢变的恢复变量.在本文中取 $\varepsilon = 0.005$, $d = 1.0$, $\beta = 7.5$, $a = 0.5$.如果变量 v 正向穿越放电阈值 $v_{th} = 0.5$ 时,即认为发生了放电.对于没有激励的 FHN 模型,有不动点 (v_0, w_0) ,其中 v_0 是方程 $v_0(v_0 - a)(1 - v_0) = v_0 - b$ 的实根, $w_0 = v_0 - b$.参考文献[19,8]可知, $b < 0.2623$ 时,无激励的 FHN 模型只有一个稳定的不动点;当 $b = 0.2623$ 时,发生超临界 Hopf 分岔; $b > 0.2623$ 时,系统有一稳定的极限环和一个不稳定的平衡点.

方程(2)中的分岔参数 b 由于不显含变量 v 和 w ,对分岔参数所施加的参数噪声等同于激励噪声.为了对系统施加参数噪声,可以采用两种办法,一是取别的参数为分岔参数并施加参数噪声(例如弱激励的幅值 r),二是对方程(2)进行变换,使得施加在分岔参数上的内噪声不再是激励噪声.为了便于和以往研究结果相比较,我们主要采用第二种方法,但为了证明本文采用方法的可行性,也采用第一种方法作为对照.为此,作如下坐标变换:

$$v = v_1 + v_0, \quad w = w_1 + w_0,$$

于是,方程(2)化为

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dv_1}{dt} = (v_1 + v_0)(v_1 + v_0 - a) \\ \quad \times (1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0), \\ \frac{dw_1}{dt} = v_1 - dw_1 + r \sin(\beta t), \end{cases} \quad (3)$$

式中 v_0 和 w_0 是方程(2)的不动点,并且是分岔参数 b 的函数.由此可见,在方程(3)中对分岔参数 b 的扰动噪声已经不再等同于激励噪声了.

FHN 神经元细胞模型在有激励时(方程(3))的动力学特性与参数 b 和激励的幅值 r 均有关系,以 b 为分岔参数和以 r 为分岔参数对其分岔特性进行研究都是可行的.为了摸清这些关系,不同于以往文献只研究分岔参数的几个特殊点,我们详细地研究了系统分岔参数在区域 $0.0 < b < 1.0$ 内的分岔特性,此时激励的幅值分别取为 $r = 0.01$ 和 $r = 0.0292$.还研究了 $b = 0.26$ 时, $0.006 < r < 0.024$ 时

的分岔特性.为此本文采用四阶龙格-库塔法对方程(3)进行了数值仿真,计算步长取 $\Delta t = 0.001$.为了方便考察系统运动的幅值随分岔参数变化的情况,我们用垂直于 v_1 轴的截面在相空间里横截系统的相图,如图 1(a)(b)所示

$$v_1 = 0, \tag{4}$$

进而得到 w_1 随分岔参数的变化关系.以 b 为分岔参数的计算结果如图 2,3,4,5 所示.图中两条实线表示分岔参数取不同值时系统响应 w_1 的极大值和极小值,虚线表示双吸引子共存时阈下振荡在不同分岔参数值时 w_1 的极大值和极小值.

由图可知,FHN 模型在弱周期信号激励下,当激励的幅值 $r = 0.01$,分岔参数 $b < 0.2623$ (该参数区称为 I 区)时,系统的运动是一个小幅度的周期振荡,其频率等于激励的频率,为了叙述方便也将其称为阈下振荡,而不是一个渐近稳定的不动点,由于其振荡幅值非常小,人们在定性分析时仍将其作为不动点,当 $b = 0.2623$ 时,发生超临界的 Hopf 分岔,而且出现了一个小极限环(即阈下振荡).随着分岔参数 b 的增加,小极限环的振幅逐渐增加(小极限环单独出现的参数区域称为 II 区);当 $b = 0.2623835$ 时,发生了一个“突然变化”(为了叙述方便不妨也称之为分岔),一个大幅度的振荡(即阈上振荡)出现了,这时阈下振荡的吸引子仍然存在且当分岔参数位于区域 $0.2623835 < b < 0.2624$ 内时,阈下振荡的吸引子和阈上振荡的吸引子一直共存(双吸引子共存的参数区称为 III 区);当 $b > 0.2624$ 时,小极限环突然消失,系统只有一个阈上振荡的吸引子(只有阈上振荡的参数区称为 IV 区).周期激励的幅值可以使 FHN 模型的分岔点的位置发生移动这使得 FHN 模型在其分岔点邻域内的动力特性更加复杂,当 $r = 0.0292$ 时,发生“突然变化”的分岔参数左移至 $b = 0.246384$,参数区 II 消失,而此时当分岔参数 $b < 0.246384$ 时,系统的运动是频率等于周期激励的频率的阈下振荡,当分岔参数 $b > 0.246384$ 时,系统有阈下振荡和阈上振荡两个吸引子,且当分岔参数位于区域 $0.246384 < b < 0.24668$ 内时,阈下振荡的吸引子和阈上振荡的吸引子一直共存,当 $b > 0.24668$ 时,小极限环突然消失,系统只有一个阈上振荡的吸引子.以 r 为分岔参数, $b = 0.26$ 时,系统的分岔特性如图 6 所示,由图可见,在分岔点的左侧,系统只有一个阈下振荡的吸引子,而在 $0.0145 < r < 0.02072$ 时,阈下振荡和阈上振荡的吸引子共存,

当 $r > 0.02072$ 时,阈下振荡地吸引子消失,只有一个阈上振荡的吸引子存在.由此可见,FHN 神经元模型在其分岔点邻域内,非线性动力学特性发生多次分岔(两次或三次,与弱周期激励幅值有关),是非常复杂的,文献[6]中提到的双吸引子共存的现象既是发生在分岔点的邻域内.为了描述方便,本文选取分岔参数的区域 $0.2 < b < 0.28$ 和 $0.01 < r < 0.024$ 作为分岔点的邻域.

3. 叉形分岔系统和 FHN 细胞模型分岔点邻域内随机共振的特性

3.1. 当系统的运动在分岔发生前、后吸引子之间跃迁时

当系统的分岔参数在分岔点的小邻域内时,分岔参数在微弱噪声的摄动下,在分岔点的两侧随机地变化,进而使系统的运动在分岔发生前后的吸引子之间跃迁.为了验证这个问题,本文采用高斯分布的白噪声作为分岔参数的干扰噪声,其均值和自相

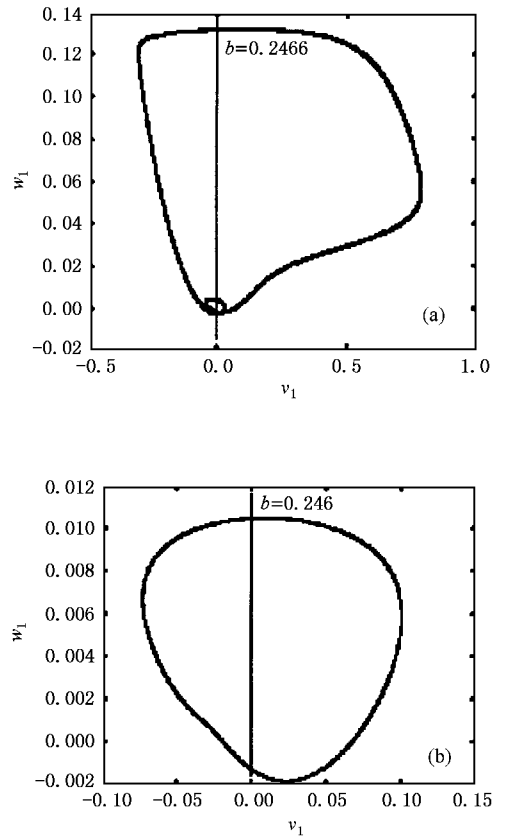


图 1 FHN 模型在 v_1-w_1 平面上的相图 (a) $b = 0.2466, r = 0.0292, \beta = 7.5$; (b) $b = 0.246, r = 0.0292, \beta = 7.5$

关函数分别为

$$\begin{cases} \xi(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(s) = 2D\delta(t-s), \end{cases} \quad (5)$$

式中 D 为噪声强度, 本文中对应于外噪声和内噪声, D 分别为 D_e 和 D_i .

对于叉形分岔系统 加上周期激励和内噪声后, 系统的随机微分方程为

$$\dot{x} = [\mu_0 + D_i \xi(t)]x - x^3 + r \sin(\omega t). \quad (6)$$

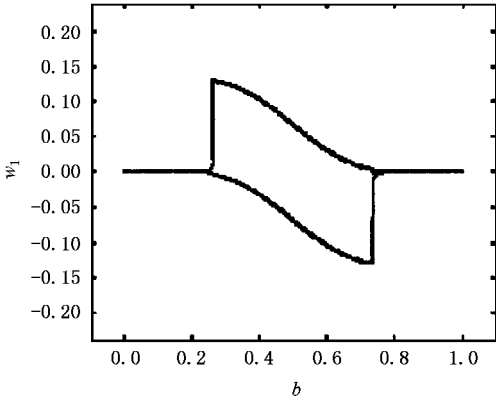


图2 FHN模型在 w_1 - b 平面上的分岔图, $r = 0.01$ (计算步长为 0.001, 下同)

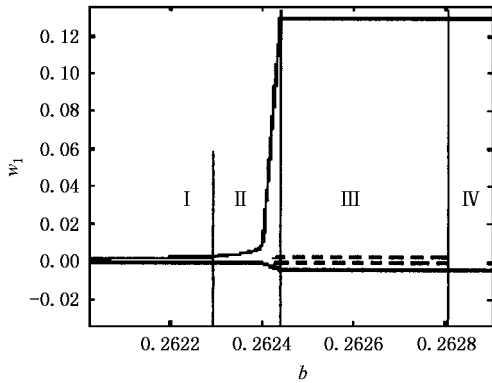


图3 FHN模型在 w_1 - b 平面上局部放大的分岔图, $r = 0.01$, 图中两条近似平行的虚线段为共存吸引子存在的参数 b 的区域

当 μ 在分岔点的邻域内时, 噪声对分岔参数的扰动可能引起动力系统特性定性的变化, 求解此时的解析解变得异常困难. 为此我们采用四阶龙格-库塔法对方程 (6) 进行了数字仿真, 计算步长为 $\Delta t = 0.1$ s, 周期信号的频率为 $\omega = 0.002$, 计算出系统的动态响应. 参考文献 [20], 信噪比定义如下:

$$SNR = \frac{\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} S(f) df}{S_N(f_0)}, \quad (7)$$

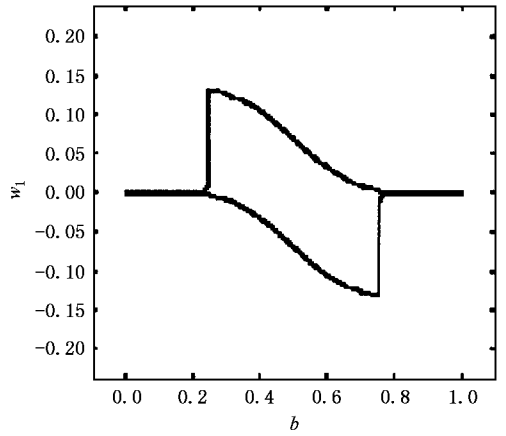


图4 FHN模型在 w_1 - b 平面上的分岔图, $r = 0.0292$

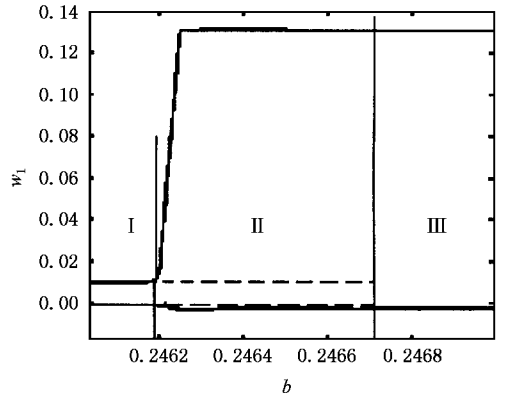


图5 FHN模型在 w_1 - b 平面上局部放大的分岔图, $r = 0.0292$, 图中两条近似平行的虚线段为共存吸引子存在的参数 b 的区域

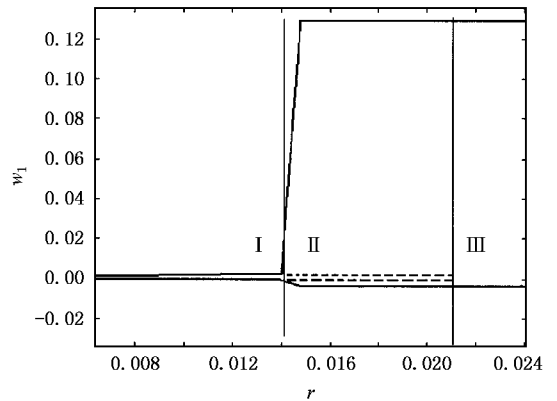


图6 FHN模型在 w_1 - r 平面上局部放大的分岔图, $b = 0.26$, $\beta = 7.5$ 图中两条近似平行的虚线段为共存吸引子存在的参数 r 的区域

式中, $S(f)$ 为系统响应的功率谱密度, f_0 为弱周期激励的频率, 分母 $S_N(f_0)$ 为响应的功率谱密度在弱

周期激励频率处单位频率上背景噪声的累积值. 对于每一个噪声强度, 信噪比分别计算 50 次, 取均值并将其作为该噪声强度下系统的信噪比, 取不同的噪声强度计算出信噪比随噪声强度的变化关系.

在系统分岔点的邻域内, 由于分岔参数 μ 非常小, 在微弱噪声的摄动下, 参数 μ 可能为正, 也可能为负, 使系统的动力学特性发生质的变化. 即 μ 为正时, 系统有两个稳定的不动点, 一个不稳定的不动点, 而 μ 为负时, 系统只有一个稳定的不动点. 因而系统的运动轨线将会在分岔发生前后的不动点之间跃迁. 为此, 不同于以往研究 ($\mu = 1.0$), 在分岔点的邻域内, 我们取 $\mu_0 = 0.1$, $\omega = 0.002$, $r = 0.01$, $D_i = 1.8$ 对方程 (6) 进行了仿真计算, 计算结果如图 7 所示.

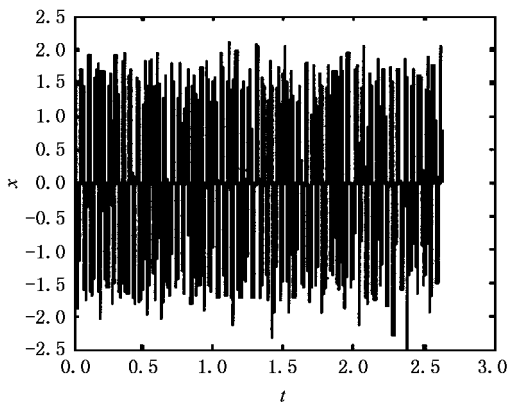


图 7 叉形分岔系统在分岔点邻域内只作用内噪声时的时间历程, $\mu_0 = 0.1$, $\omega = 0.002$, $r = 0.01$, $D_i = 1.8$

由图可见, 在内噪声的作用下, 系统的轨线在三个不动点之间进行跃迁, 即从统计意义看从 $\dots \rightarrow 0 \rightarrow x = \sqrt{\mu} \rightarrow 0 \rightarrow x = -\sqrt{\mu} \rightarrow 0 \dots$. 在不同的噪声强度下, 信噪比的变化如图 8 所示. 由图可见, 当叉形分岔系统在分岔参数的邻域内, 分岔参数在微弱噪声的摄动下, 发生了随机共振.

对于 FHN 神经元模型, 加上周期激励和对参数 b 施加的内噪声后, 系统的随机微分方程为

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dv_1}{dt} = (v_1 + v_0) \chi(v_1 + v_0 - a) \\ \quad \times (1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0), \quad (8) \\ \frac{dw_1}{dt} = v_1 - dw_1 + r \sin(\beta t), \end{cases}$$

式中

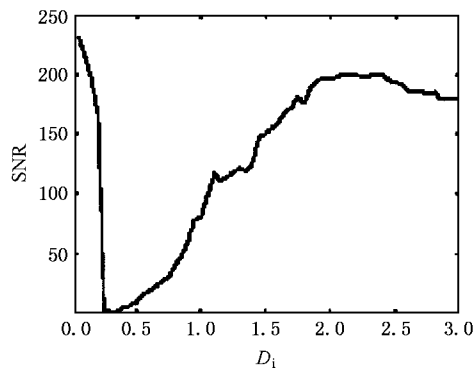


图 8 叉形分岔系统在分岔点的邻域内只作用内噪声时的随机共振, $\mu_0 = 0.1$, $\omega = 0.002$, $r = 0.01$.

$$\begin{cases} b = b_0 + D_i \xi(t), \\ v_0 = \sqrt{-\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}} \\ \quad - \sqrt{\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}}, \\ w_0 = v_0 - b. \end{cases}$$

而对于 FHN 神经元模型, 加上周期激励和对参数 r 施加的内噪声后, 系统的随机微分方程为

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dv_1}{dt} = (v_1 + v_0) \chi(v_1 + v_0 - a) \\ \quad \times (1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0), \quad (9) \\ \frac{dw_1}{dt} = v_1 - dw_1 + (r + D_i \xi(t)) \sin(\beta t), \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{-\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}} \\ \quad - \sqrt{\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}}, \\ w_0 = v_0 - b. \end{cases}$$

在分岔参数包含三个分岔点的狭小区域内, 由于系统分岔点的值与系统分岔参数的值之间的距离比较小, 在内噪声的作用下, 系统分岔参数的值将可能在四个参数区内随机地变化. 而 I 区和 II 区的吸引子之间、II 区和 III 区的吸引子之间的跃迁所诱发的随机共振没有探测到. 当 II 区的宽度为零时, 我们分别计算了以 b 为分岔参数和以 r 为分岔参数且位于 I 区时在内噪声的作用下系统信噪比随噪声强度的变化情况, 计算结果如图 9 所示. 由图可以看出, 与叉形分岔系统类似, 在内噪声的单独作用下, 在这两种情况下 I 区和 III 区吸引子之间发生跃迁并诱发

了随机共振,即 FHN 神经元模型发生了随机共振,并且证明了以 r 为分岔参数和以 b 为分岔参数研究 FHN 模型的随机共振其结果在定性上是一致的。

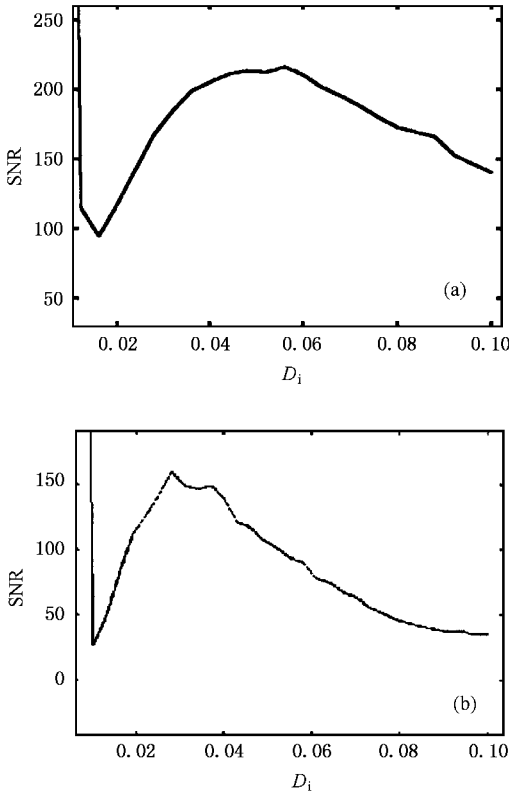


图 9 在参数噪声单独作用下, FHN 模型分岔点邻域内的随机共振. (a) 对 b 施加参数噪声且 $b_0 = 0.2400, r = 0.0292, \beta = 7.5$ (b) 对 r 施加参数噪声且 $b = 0.26, r_0 = 0.0142, \beta = 7.5$

3.2. 当系统的运动两种类型的跃迁都发生时

在分岔点的小邻域内,当分岔参数在微弱噪声的作用下在分岔点的左右发生随机变化时,系统如果还受到外噪声的激励作用,系统的运动将同时发生两种类型的跃迁,即系统的运动在分岔发生后共存吸引子之间的跃迁,系统的运动在分岔发生前、后之间吸引子之间的跃迁.为此,对两种系统,我们分别分析.

对于叉形分岔系统,加上内噪声和外噪声后,系统的随机微分方程为

$$\dot{x} = [\mu_0 + D_i \xi(t)]x - x^3 + r \sin(\omega t) + D_e \xi(t). \quad (10)$$

在分岔点的邻域内,我们分别计算了信噪比随噪声强度的变化曲线.计算结果如图 10,11 所示.

由图可见,当两种类型的跃迁同时发生时,在分岔点的邻域内,随着外噪声强度的增加,内噪声诱发的随机共振可以在外噪声强度较大的范围内维持,只是对应的 SNR 峰值点左移,SNR 的峰值减小,而外噪声诱发的随机共振则随着内噪声强度的增加迅速消失,即外噪声诱发的随机共振在内噪声的噪声强度较小的变化范围内就不易维持.

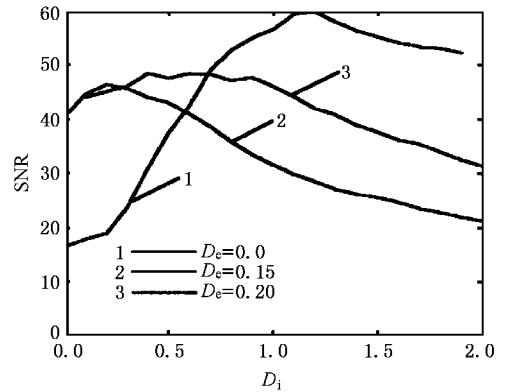


图 10 叉形分岔系统在分岔点的邻域内,在不同的内外噪声作用下,由内噪声诱发的随机共振. $\mu = 0.1, \omega = 0.002, r = 0.01$

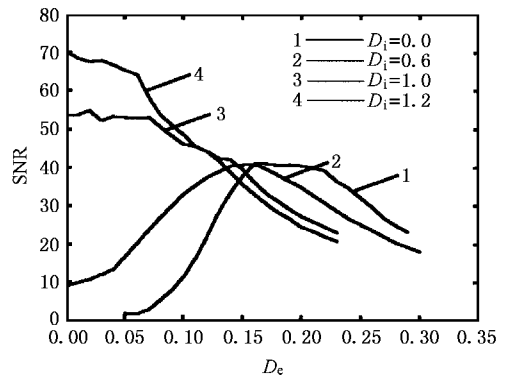


图 11 叉形分岔系统在分岔点的邻域内,在不同的内外噪声作用下,由外噪声诱发的随机共振. $\mu = 0.1, \omega = 0.002, r = 0.01$

对于 FHN 神经元模型,加上内噪声和外噪声后,系统的随机微分方程为

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dv_1}{dt} = (v_1 + v_0)(v_1 + v_0 - a) \\ \quad \times (1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0), \\ \frac{dw_1}{dt} = v_1 - dw_1 + r \sin(\beta t) + D_e \xi(t), \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$\begin{cases} b = b_0 + D_1 \xi_2(t), \\ v_0 = \sqrt{-\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}} \\ \quad - \sqrt{-\frac{0.5-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.75}{3}\right)^3}}, \\ w_0 = v_0 - b. \end{cases}$$

当系统的运动在两种类型的跃迁(即在分岔前后吸引子之间进行跃迁和在分岔后共存吸引子之间进行跃迁)同时发生时,随机共振的特性更为复杂,为此我们分别计算了在分岔点的邻域内外噪声取不同值时 FHN 模型由内噪声诱发的随机共振和内噪声取不同值时 FHN 模型由外噪声诱发的随机共振.计算结果分别如图 12,13 所示.

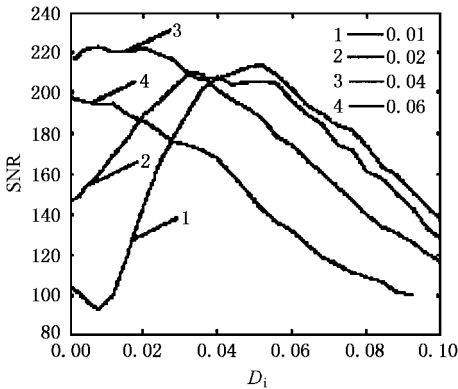


图 12 外噪声取不同值时, FHN 模型在分岔点邻域内由内噪声诱发的随机共振, $b_0 = 0.2400$, $r = 0.0292$, $\beta = 7.5$

由图可知,与叉形分岔系统类似,当内噪声和外噪声同时作用于 FHN 神经元模型时,在分岔点的邻域内,外噪声的强度在很大范围内变化时,内噪声诱发的随机共振均可以维持,只是对应的 SNR 峰值点左移,而 SNR 峰值基本不变,而外噪声诱发的随机共振则随着内噪声强度的增加而迅速消失,即外噪声诱发的随机共振在内噪声强度很小的范围内变化

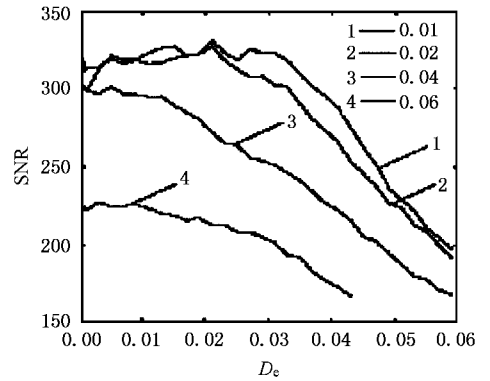


图 13 内噪声取不同值时, FHN 模型在分岔点邻域内由外噪声诱发的随机共振, $b_0 = 0.2466$, $r = 0.0292$, $\beta = 7.5$

时就难以维持.

4. 结 论

本文研究了叉形分岔系统和 FHN 神经元细胞模型分岔点邻域内随机共振的特性.研究表明:这两种系统在分岔发生时吸引子的个数由一个变为两个或由两个变为一个,即在分岔点的邻域内,系统在分岔点的两侧有分岔前吸引子和分岔后吸引子存在,在弱噪声的作用下,系统的运动除了像传统随机共振的机理那样在分岔发生后共存的双吸引子之间进行跃迁外,还可以在分岔点两边的吸引子之间跃迁,并诱发随机共振,其中由内噪声诱发第二种类型的跃迁;当两种类型的跃迁同时发生时,在其分岔点的邻域内,由内噪声诱发的随机共振在外噪声的强度很大的范围内变化时可以维持,只是对应的 SNR 峰值点左移,而 SNR 的峰值基本不变,而外噪声诱发的随机共振则随着内噪声强度的增加而迅速消失,即外噪声诱发的随机共振在内噪声强度很小的范围内变化时就难以维持.

[1] Benzi R, Parisi G, Sutera A and Vulpiani V 1981 *J. Phys.* A **14** 453
 [2] Benzi R, Sutera A and Vulpiani A 1985 *J. Phys.* A **18** 2239
 [3] Hu G et al 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 69
 [4] Zhu H J et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江等 2003 物理学报 **52** 2404]
 [5] Kang Y M et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅等 2003 物理学报 **52** 2712]

[6] Mizutani S et al 1997 *IEEE Trans. Fundamentals* E **80** A1
 [7] Nicolis C et al 1998 *Phys. Lett. A* **249** 8444
 [8] Gong P L and Xu J X 2001 *Phys. Rev. E* **63** 031906
 [9] Gong Y F and Xu J X 1998 *Phys. Lett. A* **243**, 351
 [10] Gong P L and Xu J X 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 885
 [11] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai Scientific and Technological Educational Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统(上海科学教育

- 出版社)]
- [12] Kang Y M *et al* 2003 *Acta . Phys . Sin .* **52** 802 [康艳梅等 2003 物理学报 **52** 802]
- [13] Liang G Y 2003 *Chin . Phys .* **12** 377
- [14] Kang Y M , Xu J X and Xie Y 2003 *Phys . Rev . E* **65** 03619
- [15] Jia Y and Yu S N 2000 *Phys . Rev . E .* **62** 1869
- [16] Longtin A 1993 *J . Stat . Phys .* **70** 309
- [17] Massanes S R and Vicente C J P 1999 *Phys . Rev . E* **59** 4490
- [18] Fitzhugh R 1962 *Biological Engineering* , edited by H. P. Schwann (McGraw-Hill , New york , 1962)
- Nagumo J , Arimoto S and Yoshizawa S 1962 *Pro . IRE* **50** 2061
- [19] Guckenheimer J and Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations , Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields* (Springer-Verlag , Berlin)
- [20] Gingl Z , Vajtai R and Kiss L B 2000 *Chaos , Solitons and Fractals* **11** 1929

Characteristic of nonlinear system stochastic resonance in the neighbourhood of bifurcation point^{*}

Zhang Guang-Jun Xu Jian-Xue[†]

(*School of Architectural Engineering and Mechanics , Xi 'an Jiaotong University 710049 , China*)

(Received 24 July 2003 ; revised manuscript received 21 May 2004)

Abstract

This paper studied the characteristics of stochastic resonance in the neighborhood of bifurcation point of two nonlinear dynamic systems , the pitchfork bifurcation system and FitzHugh-Nagumo (FHN) cell model . The results of research show that the two nonlinear dynamic systems have the same bifurcation characteristic of transition from one to two attractors (or from two to one attractors) when the bifurcation of each system occurs , that is , in the neighborhood of the bifurcation point there exist attractors before and after bifurcation on the both sides of the bifurcation point . Under the perturbation of noise , a transition may occur between the two coexisting attractors on the right side of the bifurcation point , in a way like the mechanism of traditional stochastic resonance ; moreover another transition may also occur among the three attractors (one before bifurcation and two after it) on two sides of the bifurcation point , which can induce stochastic resonance alone . When the two types of transitions occur , the stochastic resonance induced by the second type of transition continues in a wide intensity range of noise , which causes the first type of transition ; and the stochastic resonance induced by the first type of transition stops in a rather small range of the noise intensity and then causes the second type of transition .

Keywords : stochastic resonance , attractor , bifurcation point , transition

PACC : 0547 , 0540 , 1420C

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10432010 , 10172067) .

[†] E-mail : jxxu@mail.xjtu.edu.cn