

强散射体产生的像面散斑对比度与随机表面及成像系统关系的研究*

宋洪胜^{1,2)} 程传福^{1,2)} 张宁玉³⁾ 任晓荣²⁾ 滕树云¹⁾ 徐至展¹⁾

¹⁾中国科学院上海光学与精密机械研究所, 上海 201800)

²⁾山东大学物理系, 济南 250014)

³⁾山东建筑工程学院, 济南 250014)

(2003 年 9 月 2 日收到, 2004 年 5 月 8 日收到修改稿)

在对 $4f$ 光学成像系统中强散射体形成的像面散斑的统计特性的研究中, 首先通过散斑场光波复振幅的一般形式和双重指数函数近似求出散斑光强的系综平均, 然后利用散斑场光波复振幅的实部和虚部的旋转变换法求出散斑光强的方差, 最后得出了散斑对比度与随机表面统计参量和系统参量的直接表达式. 本结果与现有文献中包含随机表面相关面积或散射粒子数目的隐含表达式相比具有明显的改进, 并对标定随机表面的散斑对比度法具有重要意义.

关键词: 随机表面, 像面散斑, 对比度

PACC: 4220, 4230

1. 引 言

众所周知, 相干光波经粗糙表面或者随机介质散射后在空间形成的随机强度分布称为散斑. 一般说来, 散斑的性质是由粗糙表面或者随机介质(统称散射体)和散射后光波所经过的光学系统共同决定的. 其中散射体所引起的光波初始随机相位起伏的剧烈程度对散斑场的概率分布等某些基本统计特性有重要影响, 在散斑研究中一般将散射体分为强散射体和弱散射体. 强散射体是指表面高度随机起伏的标准偏差大于照明光波波长的散射体, 此时散射光波的初始位相均匀地分布在区间 $(-\pi, \pi)$ 上^[1]; 反之则称为弱散射体. 光波散射后所经过的光学系统也是影响散斑场的相关和概率分布等统计特性的重要因素. 随机光波经过光学成像系统后, 在像面附近所形成的散斑场称为像面散斑. 而在夫琅和费衍射区和菲涅耳衍射区所形成的散斑场一般称为衍射区的散斑场. 其中关于衍射区散斑场的研究是散斑研究中最开始进行的内容^[1,2], 目前已经比较成熟, 并已得到广泛应用.

早期人们在关于像面散斑的研究中, 沿用了衍射区散斑研究中把散射体出射光场复振幅的自相关函数近似为 δ 函数的方法, 得到的关于像面散斑的结果与衍射区的散斑具有相似的特征. 人们认识到像面散斑与衍射区散斑具有本质的差别, 是从 Fujii 和 Asakura^[3]发现像平面附近的散斑对比度为一最小值这个有趣的现象开始的, 之后人们对这一现象进行了大量的研究工作^[4-12]. 产生这一现象的原因在于, 由于光学成像系统点扩展函数的扩展范围一般都比较小, 使得对像面上一点有贡献的散射基元数量比较少, 统计理论中的中心极限定理不能得到满足, 从而使像面散斑呈现非圆形振幅分布. 同时也使得散斑的统计参量如像面散斑对比度和散斑相关函数等更加敏感地依赖于随机表面的统计特性. 因此像面散斑在随机表面标定^[13-17]、散斑照相位移测量等领域得到广泛的应用. 但是, 由于成像系统点扩展函数与随机表面统计参量的错综关系, 使像面散斑统计特性研究的数学处理变得十分复杂. 目前, 一般文献都将像面散斑的统计参量归结到点扩展函数内所包含的散射基元的数目上来^[18,19], 使之难以与成像系统的参数及随机表面的统计参量直接

* 国家自然科学基金(批准号 69978012)资助的课题.

联系起来,从而使像面散斑的应用有一定的局限性.

本文首先通过像面散斑场光波复振幅的一般形式和双重指数函数近似求出强散射体像面散斑光强的系综平均,再利用像面散斑场光波复振幅的实部和虚部的旋转变换法求出强散射体像面散斑光强的方差,进而由对比度的定义得出强散射体在 $4f$ 成像系统中像面散斑对比度与随机表面统计参量以及光学成像系统参量之间相关联的直接表达式. 由此式很容易观察到在滤波孔比较小的情况下,强散射体像面散斑对比度与表面均方偏差粗糙度 w 、横向相关长度 ξ 以及滤波孔径 R 之间都有密切的依赖关系,所以本文的结果与现有文献中包含随机表面相关面积或散射基元数目的隐含表达式相比具有明显的改进,而且对标定高斯相关随机表面的散斑对比度法的应用具有重要意义.

2. 像面散斑对比度的一般表达式

在图 1 所示的 $4f$ 成像系统中,透射式散射体

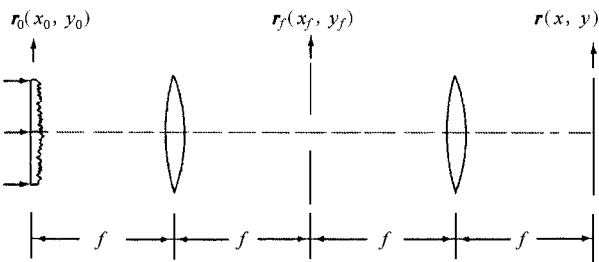


图 1 $4f$ 滤波成像系统

位于输入平面 $r_0(x_0, y_0)$ 上,用单色准直光束进行照明,其振幅设为 1,两个焦距都为 f 的变换透镜相距 $2f$,在中间的谱平面 $r_f(x_f, y_f)$ 上放置一个滤波孔,其振幅透过函数为 $P(r_f)$,右端的平面 $r(x, y)$ 是系统的像平面. 我们知道散斑对比度的定义为^[2]

$$C = \frac{\sigma_I}{I}, \quad (1)$$

其中 I 为像面散斑光强 I 的系综平均, σ_I^2 为像面散斑光强 I 的方差,并且 σ_I^2 的定义为

$$\sigma_I^2 = I^2 - I^2, \quad (2a)$$

及

$$I = U_r^2 + U_i^2, \quad (2b)$$

$$I^2 = U_r^4 + U_i^4 + 2 U_r^2 U_i^2, \quad (2c)$$

其中 U_r 和 U_i 分别是像面散斑光场复振幅 U 的实部和虚部,由此可见在推导像面散斑对比度的过程中要牵涉到光强的系综平均和光强平方的系综平均等计算,而光强平方的系综平均的计算中又包含着 U_r 和 U_i 的 4 次方项的系综平均,由于这些计算过程在通常的情况下都非常繁琐,所以在下面的计算中首先根据像面上光波的一般表达式,通过对强散射体情况下双重指数函数的近似求出像面散斑光强的系综平均 I ,然后,在求解像面散斑光强的方差时为了避免 U_r 和 U_i 的 4 次方项系综平均的繁琐计算,我们运用了一种关于 U_r 和 U_i 的旋转变换的方法,从而使繁琐的计算过程大大简化,最后由散斑对比度的定义求出强散射体像面散斑对比度的表达式.

在推导前我们首先给出像面散斑光波复振幅的一般表达式,在图 1 所示的成像系统中谱平面上滤波孔前一点的光波可以写成

$$U_f(r_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) h(r_0)\right] \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} r_0 \cdot r_f\right] d^2 r_0, \quad (3)$$

其中 n 为透射式散射体的折射率,则在像面(输出面)上任意一点 $r(x, y)$ 处的光波可表示为

$$U(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(r_f) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) h(r_0)\right] \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (r_0 - r) \cdot r_f\right] d^2 r_0 d^2 r_f. \quad (4)$$

3. 强散射体像面散斑光强的系综平均 I

在一般统计理论情况下,一个统计系综所包含的大量样本函数可以按一定形式的密度来分布. 在本文所涉及的像面散斑问题中,等晕成像的条件容易得到满足,此时像面散斑作为以光强为统计变量的随机过程来说,是平稳的随机过程. 并且以强散射体为表面样本的系综是宏观物理统计特性相同而微观上不同的系综体系,这在等晕成像的条件下导致像面散斑光强系综是各态历经的,即以任一幅像面散斑图样为一个样本函数的空间统计特征都相同,并且等于系综平均,这表明像面散斑的统计系综可以看作是样本函数(散斑图样)按均匀密度分布的. 由于在这样的系综中,光强的统计特征在像面

各点处相同,因此光强的概率密度分布 $p(I)$ 只是光强的函数,与像面上的位置无关. 根据(4)式,像面上任意一点 r 处的光强的系综平均可以表示为 $K(r) = |U(r)|^2$,且由上述分析可知, $K(r)$ 与位置坐标 r 无关,因此,为简单起见取 $r = 0$,从而由(4)式可得

$$\begin{aligned} K(r) &= K(0) = U(0)U^*(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \right. \\ &\quad \times [h(\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}'_0)]\} P(\mathbf{r}_f) P^*(\mathbf{r}'_f) \\ &\quad \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_f - \mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{r}'_f)\right] \\ &\quad \times d^2 \mathbf{r}_0 d^2 \mathbf{r}'_0 d^2 \mathbf{r}_f d^2 \mathbf{r}'_f. \end{aligned} \quad (5)$$

如果散射屏的高度函数 $h(\mathbf{r}_0)$ 和 $h(\mathbf{r}'_0)$ 是平稳的零均值的高斯随机变量,则上式中的平均项可以写为

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) [h(\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}'_0)]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p[h(\mathbf{r}_0), h(\mathbf{r}'_0)] \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \right. \\ &\quad \times [h(\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}'_0)]\} dh(\mathbf{r}_0) dh(\mathbf{r}'_0) \\ &= \exp\left\{-\left[\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)\right]^2 [w^2 - R_h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)]\right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $p[h(\mathbf{r}_0), h(\mathbf{r}'_0)]$ 为高度函数 $h(\mathbf{r}_0)$ 和 $h(\mathbf{r}'_0)$ 的联合概率密度函数, $w = [(h - h')^2]$ 为表面方均偏差粗糙度, $R_h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = h(\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}'_0)$ 为表面高度自相关函数. 对于具有高斯相关的随机表面,其高度自相关函数为

$$R_h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = w^2 \exp(-|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0|^2 / \xi^2). \quad (7)$$

其中 ξ 为表面的横向相关长度,即通常所说的表面颗粒的平均大小. 可见(6)式中等号右边其实是一个两重的指数函数,如果直接把它代入(5)式是没有办法积分出来的,为此我们做代换 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 + \Delta\mathbf{r}_0$,然后把(7)式代入(6)式可以得到

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) [h(\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}'_0)]\right\} \\ &= \exp\left[-a \cdot g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$a = \left[\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)w\right]^2, \quad (9)$$

$$g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right) = 1 - \exp(-|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0|^2 / \xi^2)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|^2}{\xi^2}\right). \quad (10)$$

对(8)式等号右端进行适当变化并且对相应的指数函数进行级数展开^[20],有

$$\begin{aligned} &\exp\left[-a \cdot g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right] \\ &= \exp(-a) + \exp\left[-a \cdot g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right] - \exp(-a) \\ &= \exp(-a) + \exp(-a) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \\ &\quad \times \left\{a \left[1 - g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right]\right\}^m. \end{aligned} \quad (11)$$

把(11)式代入(5)式有

$$\begin{aligned} K(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp(-a) + \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \right. \\ &\quad \times \left\{a \left[1 - g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right]\right\}^m) P(\mathbf{r}_f) P^*(\mathbf{r}'_f) \\ &\quad \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_f - \mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{r}'_f)\right] \\ &\quad \times d^2 \mathbf{r}_0 d^2 \mathbf{r}'_0 d^2 \mathbf{r}_f d^2 \mathbf{r}'_f. \end{aligned} \quad (12a)$$

令 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 + \Delta\mathbf{r}_0$,则上式可化为

$$\begin{aligned} K(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp(-a) + \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \right. \\ &\quad \times \left\{a \left[1 - g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right]\right\}^m) P(\mathbf{r}_f) P^*(\mathbf{r}'_f) \\ &\quad \times \exp\left\{-i \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_0 \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}'_f) + \Delta\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_f\right\} \\ &\quad \times d^2 \Delta\mathbf{r}_0 d^2 \mathbf{r}'_0 d^2 \mathbf{r}_f d^2 \mathbf{r}'_f. \end{aligned} \quad (12b)$$

把上式先对 \mathbf{r}'_0 积分,得到 $\delta\left(\frac{\mathbf{r}_f - \mathbf{r}'_f}{\lambda f}\right)$ 项,再对 \mathbf{r}_f

积分,可以进一步简化为

$$\begin{aligned} K(r) &= \lambda^2 f^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp(-a) + \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \right. \\ &\quad \times \left\{a \left[1 - g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right]\right\}^m) |P(\mathbf{r}'_f)|^2 \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} \Delta\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'_f\right) d^2 \mathbf{r}'_f d^2 \Delta\mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (13)$$

为了化简(13)式,把其中级数项对 $\Delta\mathbf{r}_0$ 积分的部分作以下处理:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{a \left[1 - g\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)\right]\right\}^m \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \cdot \Delta\mathbf{r}_0\right) d^2 \Delta\mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{\infty} d\Delta \mathbf{r}_0 \Delta \mathbf{r}_0 \\
&\quad \cdot \left[1 - g\left(\frac{|\Delta \mathbf{r}_0|}{\xi}\right) \right]^m J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \Delta \mathbf{r}_0\right) \\
&= 2\pi \xi^2 \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{\infty} dx x \\
&\quad \cdot [1 - g(x)]^m J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \xi x\right). \quad (14)
\end{aligned}$$

上式最后一步是用了 x 代替 $\frac{|\Delta \mathbf{r}_0|}{\xi}$ 得出的. 对(14)式再进行以下代换:

$$\begin{aligned}
1 - g(x) &= \exp(-z^2), \\
x &= g^{-1}[1 - \exp(-z^2)] = Q(z),
\end{aligned}$$

其中 $g^{-1}(y)$ 是 $y = g(x)$ 的反函数 则(14)式等号右端化为^[20]

$$\begin{aligned}
&2\pi \xi^2 \exp(-a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} m^{-1/2} \int_0^{\infty} dz e^{-z^2} Q(zm^{-1/2}) \\
&Q'(zm^{-1/2}) J_0\left[\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \xi Q(zm^{-1/2})\right], \quad (15)
\end{aligned}$$

其中函数 $Q(z)$ 是区域 $0 \leq z \leq \infty$ 内的解析函数, 然后对它进行展开

$$Q(\beta) \cdot Q'(\beta) J_0[\gamma Q(\beta)] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\gamma) \beta^n,$$

作为关于 β 的泰勒级数, 则(15)式可以写成

$$2\pi \xi^2 \int_0^{\infty} dz e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \xi\right) z^n \left(e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} m^{-(1+n)}\right). \quad (16)$$

下面对上式中的 $e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} m^{-(1+n)}$ 项继续化简.

我们作如下定义:

$$\kappa(a, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} n^{-\gamma} = a + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (n+1)^{-\gamma-1}, \quad (17a)$$

由等式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^{\gamma+1}} &= \frac{1}{n^{\gamma+1} (1+1/n)^{\gamma+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(-\gamma-k)} n^{-(k+\gamma+1)}
\end{aligned}$$

可以把上式重新表示为

$$\begin{aligned}
\kappa(a, \gamma) &= a + a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(-\gamma-k)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} n^{-(k+\gamma+1)} \right) \\
&= a + a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(-\gamma-k)} \kappa(a, k+\gamma+1), \quad (17b)
\end{aligned}$$

当 $a \rightarrow \infty$ 时, 由(17b)式可以得到一个 $\kappa(a, \gamma)$ 的近似解

$$\kappa(a, \gamma) = \frac{F(a)}{a^\gamma}, \quad (18a)$$

其中 $F(a)$ 是关于 a 的函数, 并且满足

$$\frac{a}{F(a)a^{-\gamma}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } a \gg 1 \text{ 时.}$$

因此我们可以定义函数 $F(a)$:

$$\begin{aligned}
F(a) &= \kappa(a, 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a - 1 \approx e^a, \quad (a \gg 1) \quad (18b)
\end{aligned}$$

从而可知 $\kappa(a, \gamma) = \frac{F(a)}{a^\gamma} \approx e^a a^{-\gamma}$, 即

$$e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} m^{-(1+n)} \approx a^{-(1+n)}, \quad (a \gg 1). \quad (19)$$

因此, 由以上的近似等式可以把(16)式化简为

$$\begin{aligned}
&2\pi \xi^2 \int_0^{\infty} dx x \cdot [1 - g(x)]^m J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \xi x\right) \\
&= 2\pi \int \Delta \mathbf{r}_0 \exp\left[-a \left(\frac{|\Delta \mathbf{r}_0|^2}{\xi^2}\right)\right] J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}'_f \Delta \mathbf{r}_0\right) d\Delta \mathbf{r}_0. \quad (20)
\end{aligned}$$

把(20)式的结果代入(13)式, 光强的系综平均可以化简为

$$\begin{aligned}
\langle I(\mathbf{r}) \rangle &= \lambda^2 f^2 \int \int \int \int \left(\exp(-a) \right. \\
&\quad \left. + \exp\left(-a \frac{|\Delta \mathbf{r}_0|^2}{\xi^2}\right) \right) |P(\mathbf{r}'_f)|^2 \\
&\quad \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} \Delta \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'_f\right) d^2 \mathbf{r}'_f d^2 \Delta \mathbf{r}_0. \quad (21)
\end{aligned}$$

现在可以进一步对 $\Delta \mathbf{r}_0$ 积分, 从而得出

$$\begin{aligned}
\langle I(\mathbf{r}) \rangle &= \lambda^2 f^2 \int \int \int |P(\mathbf{r}'_f)|^2 \left\{ \exp(-a) \delta\left(\frac{\mathbf{r}'_f}{\lambda f}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi \xi^2}{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{\lambda^2 f^2 a} |\mathbf{r}'_f|^2\right) \right\} d^2 \mathbf{r}'_f \quad (22)
\end{aligned}$$

如果滤波孔取半径为 R 的圆形孔, 并且满足

$$P(\mathbf{r}'_f) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{r}'_f| = \sqrt{x_f^2 + y_f^2} \leq R, \\ 0, & |\mathbf{r}'_f| > R, \end{cases}$$

则由(22)式解得强散射体的条件下像面散斑的平均光强的表达式为

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \lambda^4 f^4 \exp(-a) + \frac{2\pi^2 \lambda^2 f^2 \xi^2}{a}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^R \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{\lambda^2 f^2} a \rho^2\right) \rho d\rho \\ & = \lambda^4 f^4 [1 + \exp(-a) - \exp(-R^2/ab^2)]. \quad (23) \end{aligned}$$

其中常数 a 由(9)式给出, 常数 b 由下式给出:

$$b = \frac{\lambda f}{\pi \xi}. \quad (24)$$

4. 强散射体像面散斑光强的方差 σ_I^2 及对比度

由(2)式所示的光强方差的定义可以看出在计

$$\begin{aligned} P(U_r, U_i) &= \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i(1-\rho^2)^{1/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{\sigma_r^2(U_r - U_r)^2 - 2\sigma_r\sigma_i\rho(U_r - U_r)(U_i - U_i) + \sigma_i^2(U_i - U_i)^2}{2\sigma_r^2\sigma_i^2(1-\rho^2)}\right], \quad (25) \end{aligned}$$

其中, σ_r^2 和 σ_i^2 分别是 U_r 和 U_i 的方差:

$$\sigma_r^2 = U_r^2 - U_r^2, \quad (26a)$$

$$\sigma_i^2 = U_i^2 - U_i^2. \quad (26b)$$

ρ 是相关系数:

$$\rho = (U_r U_i - U_r U_i) / \sigma_r \sigma_i. \quad (26c)$$

由于 U_r 和 U_i 两个参量不是统计独立的, 所以用它们的联合概率密度分布函数直接求解 U_r^4 和 U_i^4 的过程非常繁琐, 为了使求解的过程更加简单易行, 我们做以下旋转变换^[18]:

$$X = U_r \cos\theta + U_i \sin\theta, \quad (27a)$$

$$Y = U_i \cos\theta - U_r \sin\theta, \quad (27b)$$

和

$$\tan 2\theta = 2\sigma_r\sigma_i\rho(\sigma_r^2 - \sigma_i^2). \quad (27c)$$

这样由(25)式可以得出 X 和 Y 的联合概率密度分布函数为

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \frac{\exp\{-[(X - X)^2/2\sigma_X^2 + (Y - Y)^2/2\sigma_Y^2]\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}, \quad (28) \end{aligned}$$

并且容易推出以下关系式:

$$\begin{aligned} X &= U_r \cos\theta + U_i \sin\theta, \\ Y &= U_i \cos\theta - U_r \sin\theta; \quad (29a) \end{aligned}$$

$$\sigma_X^2 = (\sigma_r^2 \cos^2\theta - \sigma_i^2 \sin^2\theta) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_Y^2 = (\sigma_i^2 \cos^2\theta - \sigma_r^2 \sin^2\theta) \cos 2\theta. \quad (29b)$$

很明显, 以上所述的新变量 X 和 Y 是统计独立的,

算过程中要牵涉到像面散斑光强平方的系综平均和像面散斑光强的系综平均等计算, 其中像面散斑光强的系综平均在前面已经求出, 但是要计算像面散斑光强平方的系综平均又要计算像面散斑光场复振幅 U 的实部 U_r 和虚部 U_i 的 4 次方项的系综平均. 原则上它们可以由 U_r 和 U_i 的联合概率分布来直接进行计算而得出. 众所周知, 对于高斯相关的随机表面, 像面散斑为非圆形高斯散斑^[6], 其实部 U_r 和虚部 U_i 的联合概率密度分布函数为^[18]

不相关的, 而且呈高斯分布, 那么光强的方差 σ_I^2 就可以化为用以下方法求解:

$$\sigma_I^2 = X^4 - X^2^2 + Y^4 - Y^2^2, \quad (30)$$

上式的推导过程应用了变量 X 和 Y 的统计独立性, 从而通过一系列的数学计算便可以得出

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= 2(\sigma_r^4 + \sigma_i^4) + 4(U_r^2 \sigma_r^2 + U_i^2 \sigma_i^2) \\ &+ 4\sigma_r\sigma_i\rho(\sigma_r\sigma_i\rho + 2U_r U_i). \quad (31) \end{aligned}$$

另外, 由(4)式所示的像面散斑光波的复振幅可以得到 U_r 和 U_i 的系综平均分别为

$$\begin{aligned} U_r &= \lambda^2 f^2 \exp\left\{-\left[\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)w\right]^2/2\right\} \\ &= \lambda^2 f^2 \exp(-a/2), \quad (32a) \end{aligned}$$

$$U_i = 0, \quad (32b)$$

和

$$\begin{aligned} U^2(0) &= U(0)U(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\right. \\ & \times [h(\mathbf{r}_0) + h(\mathbf{r}'_0)]\} P(\mathbf{r}_f) P^*(\mathbf{r}'_f) \\ & \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_f + \mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{r}'_f\right] \\ & \times d^2\mathbf{r}_0 d^2\mathbf{r}'_0 d^2\mathbf{r}_f d^2\mathbf{r}'_f. \quad (33) \end{aligned}$$

由于前面所述的(5)式右端的平均项中包含的是两个表面高度函数的差, 而上式中却是两个表面高度函数的和, 所以两者的求解方法有所不同. 令 $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_0$, $h(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}_0) - h(\mathbf{r}_0) = \Delta h(\mathbf{r}_0, \Delta\mathbf{r}_0)$, 则

对于具有高斯相关的随机表面,通过一系列的简单积分,上式中的平均项可以化为

$$\begin{aligned} & \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\int h(\mathbf{r}_0)+h(\mathbf{r}'_0)\right\} \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} p[h(\mathbf{r}_0)\Delta h(\mathbf{r}_0,\Delta\mathbf{r}_0)] \\ & \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta h(\mathbf{r}_0,\Delta\mathbf{r}_0)\right] \\ & \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h(\mathbf{r}_0)\right] dh(\mathbf{r}_0)\Delta h(\mathbf{r}_0,\Delta\mathbf{r}_0) \\ & \times \exp\left(-a\left\{1+\exp\left[-\left(\frac{|\Delta\mathbf{r}_0|}{\xi}\right)^2\right]\right\}\right), \quad (34) \end{aligned}$$

其中 $p[h(\mathbf{r}_0)\Delta h(\mathbf{r}_0,\Delta\mathbf{r}_0)]$ 为表面高度函数 $h(\mathbf{r}_0)$ 和 $h(\mathbf{r}_0+\Delta\mathbf{r}_0)$ 的联合概率密度函数. 容易看出,当 $a \gg 1$ 成立时,上式就趋近于零,由此可以得出像面散斑光复振幅的平方的系综平均趋近于零,即

$$U^2(0) \approx 0. \quad (35)$$

又因为我们可以把(2b)式写为 $I = \sigma_r^2 + \sigma_i^2 + U_r^2 + U_i^2$,所以由此式结合(32)(23)和(35)式就可以看出 σ_r , σ_i 和 ρ 满足

$$\sigma_r^2 = \sigma_i^2 = \frac{1}{2}\lambda^4 f^4 [1 - \exp(-R^2/ab^2)] \quad (36a)$$

$$\rho = 0. \quad (36b)$$

然后把(32)和(36)式代入(31)式中, σ_i^2 就可以写成

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 & = \lambda^8 f^8 \left\{ [1 - \exp(-R^2/ab^2)]^2 + 2\exp(-a) \right. \\ & \left. \times [1 - \exp(-R^2/ab^2)] \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

最后由散斑对比度的定义以及(23)和(37)式就可以得出强散射体像面散斑对比度的平方为

$$\begin{aligned} C^2 & = \left(\frac{\sigma_i}{I}\right)^2 \\ & = 1 - \frac{\exp(-2a)}{[1 + \exp(-a) - \exp(-R^2/ab^2)]} \quad (38) \end{aligned}$$

其中,常数 a , b 分别是由随机表面的统计参量 w 和 ξ 决定的,它们的值分别由(9)式和(24)式给出.

5. 结果分析

由(38)式给出的像面散斑对比度的平方 C^2 与滤波孔径 R 的关系可以看出,强散射体像面散斑对比度随滤波孔径 R 的变化关系为,当滤波孔径趋于零时,对比度也趋于零,并且随着滤波孔径的逐渐增大,对比度很快就趋近于其饱和值 1. 结合(9)和(24)式还可以进一步看出,强散射体像面散斑的对比度与散射体表面粗糙度 w 、横向相关长度

ξ 也有密切的关系:当 w 取值相等时, ξ 的取值越大,对比度随 R 增大的速度就越快,反之,对比度随 R 增大的速度就越慢;而当 ξ 取值相等时, w 的取值越大,对比度随 R 增大的速度就越快,反之,对比度随 R 增大的速度就越慢.

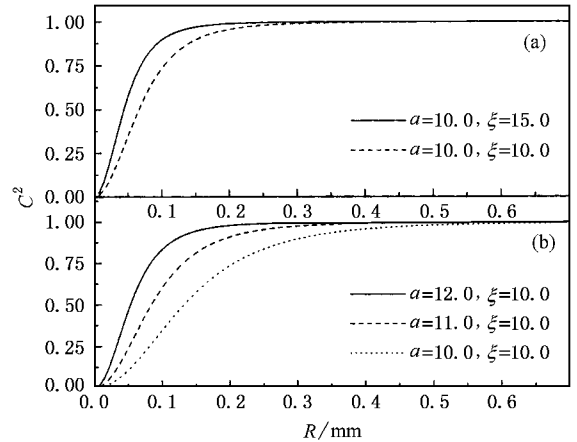


图 2 像面散斑对比度的平方随滤波孔径半径的变化

如果取透射式散射体的折射率 n 为 1.47,透镜的焦距 f 为 240mm,入射光波波长 λ 为 $0.6328\mu\text{m}$,则 w 和 ξ 的值就可以分别通过(9)和(24)式并结合相应的 a 和 b 的取值求出,图 2(a)给出了当 a 取 10(即 w 取 0.678), ξ 分别取 $15\mu\text{m}$ 和 $10\mu\text{m}$ 时像面散斑对比度的平方随滤波孔径变化的情况;图 2(b)给出了当 ξ 取 $10\mu\text{m}$, a 分别取 12, 11 和 10(即 w 分别取 0.742, 0.711 和 0.678) 时像面散斑对比度的平方随滤波孔径变化的情况.

由此可知,当滤波孔径比较小时,强散射体的像面散斑对比度与随机表面的粗糙度 w 、横向相关长度 ξ 以及滤波孔径 R 也有着密切关系,这方面的特征与弱散射体情况很相似^[12]. 需要指出,散斑场的信息是由许多参数如光强概率分布、对比度和自相关函数等来描述的,而本文所研究的散斑对比度反映的是散斑场整体信息的一个方面. 从图 2 的结果可以看出,在滤波孔径的大小达到散斑对比度的饱和值所对应的滤波孔径时,散斑对比度可以反映出散射体的统计特征,如粗糙度和横向相关长度等. 如果继续增加滤波孔径,散斑对比度则不能更多地反映出散射体的信息. 此时,散射体更为详细的信息则需要由其他的参量如散斑场的自相关函数来表征.

现有文献中,关于散斑对比度的具体结果都是关于弱散射体的. 在本文的推导中,所采用的近似

即(18)式中的 $a \gg 1$ 是针对强散射体的, 并据此由(13)式得出了(21)式. 把这一过程与统计理论中关于散斑光场的联合概率密度的一般结果(25)式相结合, 从而得到强散射体的对比度具体结果. 因此本

文关于这一结果的推导过程具有数学上的严密性. 本文结果的实验验证, 是与随机表面的标定联系在一起, 可以预见, 它将对强散射体的标定和散斑场特性的研究具有重要的意义.

-
- [1] Liu P S 1987 *Fundamentals of statistical optics of speckles* (Beijing : Science Press) p7 ch2 (in Chinese) [刘培森 1987 散斑统计光学基础 (北京 : 科学出版社) 第 7 页 , 第 2 章]
- [2] Dainty J D 1984 *Laser speckle and Related Phenomena* (Berlin : Springer-Verlag) Ch2
- [3] Fujii H and Asakura T 1974 *Opt. Commun.* **11** 35
- [4] Fujii H and Asakura T 1974 *Opt. Commun.* **12** 32
- [5] Ohtsubo J and Asakura T 1975 *Opt. Commun.* **14** 30
- [6] Goodman J W 1975 *Opt. Commun.* **14** 324
- [7] Ohtsubo J and Asakura T 1976 *Optik* **45** 65
- [8] Fujii H , Asakura T and Shindo Y 1976 *Opt. Commun.* **16** 68
- [9] Welford W T 1977 *Opt. Quant. Elect.* **9** 269
- [10] Popov I A , Sidorovsky N V and Veselov L M 1997 *Opt. Commun.* **134** 289
- [11] Cheng C F *et al* 2002 *Appl. Opt.* **41** 4148
- [12] Zhang N Y , Teng S Y , Dong Q M , Qi D P and Cheng C F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 865 (in Chinese) [张宁玉、滕树云、董前民、元东平、程传福 2001 物理学报 **50** 865]
- [13] Sprague R A 1972 *Appl. Opt.* **11** 2811
- [14] Fujii H , Asakura I and Shindo Y 1976 *J. Opt. Soc. Am.* **66** 1217
- [15] Fujii H and Asakura T 1977 *J. Opt. Soc. Am.* **67** 1171
- [16] Persson U 1993 *Opt. Eng.* **32** 3327
- [17] Cheng C F , Liu C X , Teng S Y , Zhang N Y , Li R X and Xu Z Z 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1283
- [18] Jakeman E and Welford W T 1977 *Opt. Commun.* **21** 72
- [19] Ouchi K 1980 *Opt. Quant. Elect.* **12** 237
- [20] Yang H N , Wang G C and Lu T M 1993 *Diffraction from Rough Surfaces and Dynamic Growth Fronts* (New Jersey : World Scientific Press) p134

Study on the dependence of the contrast of image speckles produced by strong scattering-object on random surface and imaging system *

Song Hong-Sheng^{1,2)} Cheng Chuan-Fu^{1,2)} Zhang Ning-Yu³⁾ Ren Xiao-Rong²⁾ Teng Shu-Yun¹⁾ Xu Zhi-Zhan¹⁾

¹⁾ *Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China*

²⁾ *Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China*

³⁾ *Shandong Institute of Architecture and Engineering, Jinan 250014, China*

(Received 2 September 2003 ; revised manuscript received 8 May 2004)

Abstract

We study the statistical properties of the image speckles produced by strong-scattering objects in the $4f$ optical imaging system. Using the generic expression of the complex amplitude of speckles and the approximation of the double-exponential function, we first obtain the ensemble average of the speckle intensity. Then we derive the variance of the speckle intensity based on the rotational transformation of the real and imaginary parts of the complex amplitude of speckles. We finally obtain the expression for the contrast of the speckles, which is explicitly related to the statistical parameters of random surface and to the parameters of the imaging system. Our results are an obvious improvement compared with those reported in the literature, where the relations including such implicit quantities as the average size of the scattering grains of the random surface and the number of scattering grains are usually used. The results of this paper would be helpful for the characterization of random surface by speckle contrast.

Keywords : random surface, image speckle, contrast

PACC : 4220, 4230