

# 在与原子相互作用中光偏振态的量子描述及其演化

董传华

(上海大学物理系, 上海 200436)

(2003 年 10 月 13 日收到 2004 年 5 月 20 日收到修改稿)

应用偏振光的量子理论和斯托克斯算符研究了无克尔媒质和存在克尔媒质情况下, 光在与原子相互作用过程中偏振态的演化. 研究了偏振光中斯托克斯参量的涨落及其压缩的非经典行为. 偏振椭圆、量子光学中的偏振度和斯托克斯参量的信噪比也得到了讨论. 结果表明斯托克斯参量及其涨落在时间演化中呈现出被调制的振荡, 这些振荡表现出间歇地崩塌和恢复. 在与原子的相互作用过程中, 光的偏振椭圆不随时间变化, 但偏振度却随时间出现振荡. 克尔媒质对这些振荡演化有很大影响.

关键词: 斯托克斯算符, 斯托克斯参量, 量子偏振态, 量子涨落

PACC: 4250

## 1. 引 言

光的偏振是光的波动性的基本特征之一, 它在光的经典理论中已有明确的描述<sup>[1]</sup>. 如何用光的量子理论描述偏振特性, 并显示出偏振的非经典特性, 这方面的研究工作还是近年的事. 在经典光学中, 用斯托克斯参量描写光的偏振性质是一种有效的方法<sup>[1]</sup>, 它们是一些在实验中可以测量的物理量. 相应地, 在量子光学中可以引入斯托克斯算符, 这是一些厄米算符, 它们在光场量子态中的期望值就是非经典光的斯托克斯参量. 算符的对易关系将导致斯托克斯参量的量子涨落和偏振性质中的非经典特性<sup>[2,3]</sup>. Tanas 和 Kielich 研究了光在克尔媒质中传播时斯托克斯参量的涨落和偏振度<sup>[4]</sup>. Tanas 和 Gantsog 又进一步研究了光在具有耗散的克尔媒质中传播时斯托克斯参量和偏振度随传播距离的变化<sup>[5]</sup>. 最近, Alodjants 和 Arakelian 讨论了光场的非经典偏振态、偏振压缩态和双光子态中斯托克斯参量的涨落及其压缩<sup>[6]</sup>, 给出了满足量子光学要求的偏振度新定义. 相位是光波动性的另一重要特征, 在经典光学中有明确定义, 但在量子光学中却有多种选择<sup>[7-9]</sup>. 各种相位算符的提出以满足不同的研究需要, Alodjants 和 Arakelian 也提出了描写偏振矢量空间方位的两个测量相位算符, 并提出了在实验中的测量方案<sup>[6]</sup>.

这些研究主要强调的是偏振光自身的偏振性质, 没有涉及到偏振光在与原子的相互作用过程中

偏振性质的变化. 光与原子的相互作用是量子光学中的一个基本问题, 在这相互作用过程中, 光的偏振特性如何演化是一个值得研究的问题. 克尔媒质中原子与光场的相互作用也是量子光学研究的重要课题之一<sup>[10]</sup>, 它产生的一些非线性光学过程使量子化光场呈现出系列非经典行为, 例如使原子的拉比振荡的崩塌和恢复更加明显<sup>[11]</sup>. 近年来, 含克尔媒质的 Jaynes-Cummings 模型又被推广到多能级原子和双模光场的相互作用中<sup>[12-15]</sup>.

光的偏振最近又引起人们的兴趣是由于它在当前成为研究热点之一的量子信息领域中的应用. 因此, 研究光与原子相互作用过程中光偏振的演化、偏振的涨落、偏振度和偏振测量的信噪比是很有意义的. 本文就是应用光偏振的全量子理论, 研究在无克尔媒质和存在克尔媒质情况下, 光与原子相互作用过程中这些偏振性质的演化及表现出的一些非经典性质.

## 2. 偏振光的量子描述

在经典光学中, 光矢量可以分解为二个互相正交的分量的叠加. 例如, 看作由  $x$  和  $y$  方向的线偏振光  $e_x$  和  $e_y$  的叠加. 由复数  $e_x$  和  $e_y$  可以构成四个实参量  $S_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), 就是描写偏振光的斯托克斯参量:

$$S_0 = e_x^* e_x + e_y^* e_y,$$

$$S_1 = e_x^* e_x - e_y^* e_y,$$

$$\begin{aligned} S_2 &= e_x^* e_y + e_y^* e_x, \\ S_3 &= -i(e_x^* e_y - e_y^* e_x). \end{aligned} \quad (1)$$

光矢量也可看作由右旋圆偏振光  $e_+$  和左旋圆偏振光  $e_-$  的叠加. 利用下列关系:

$$\begin{aligned} e_x &= (e_+ + e_-) / \sqrt{2}, \\ e_y &= i(e_+ - e_-) / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

就得到以右旋圆偏振光和左旋圆偏振光为基的斯托克斯参量

$$\begin{aligned} S_0 &= e_+^* e_+ + e_-^* e_-, & S_1 &= e_+^* e_- + e_-^* e_+, \\ S_2 &= -i(e_+^* e_- - e_-^* e_+), & S_3 &= e_+^* e_+ - e_-^* e_-. \end{aligned} \quad (3)$$

$S_0$  的物理意义是偏振光的强度. 本文以下的讨论中就采用(3)式定义的斯托克斯参量.

以斯托克斯参量为分量构成偏振矢量  $S = S_1 i + S_2 j + S_3 k$ ,  $i$ ,  $j$  和  $k$  是正交的单位矢量. 这个矢量的几何表示就是庞加莱球, 完全偏振光由该球面上的一点表示. 由球的对称性可见, 从斯托克斯参量引出的斯托克斯算符与角动量算符之间有一定的类比, 它们都满足  $SU(2)$  量子代数. 这给出了构造斯托克斯算符的方法. 根据角动量算符的 Schwinger 玻色实现<sup>[16]</sup>, 角动量分量算符  $\hat{J}_x$ ,  $\hat{J}_y$  和  $\hat{J}_z$  可以用双模玻色算符  $a_1$  和  $a_2$  (以下对玻色算符省略算符记号“ $\wedge$ ”) 表示为

$$\begin{aligned} \hat{J}_j &= 1/2(a_1^+ \quad a_2^+) \hat{\chi}_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \\ (j &= x, y, z), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\hat{\chi}_j$  为泡利算符. 同样, 斯托克斯算符  $\hat{S}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 也可用双模玻色算符(右旋圆偏振模  $a_+$  和左旋圆偏振模  $a_-$ ) 表示成

$$\begin{aligned} \hat{S}_j &= (a_+^+ \quad a_-^+) \hat{\chi}_j \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \\ (j &= 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5)$$

展开后为

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= a_+^+ a_- + a_+^+ a_+, \\ \hat{S}_2 &= -i(a_+^+ a_- - a_+^+ a_+), \\ \hat{S}_3 &= a_+^+ a_+ - a_+^+ a_-, \end{aligned} \quad (6)$$

另外, 对应于光强的斯托克斯算符  $\hat{S}_0$  为

$$\hat{S}_0 = a_+^+ a_+ + a_-^+ a_-. \quad (7)$$

在量子光学中, 处于某态的光场的斯托克斯参量就是相应斯托克斯算符在该态中的期望值, 即  $S_j =$

$$\begin{aligned} \hat{S}_j, & \text{以 } \hat{S}_j \text{ 为分量构成斯托克斯矢量算符 } \hat{S}, \\ \hat{S} &= \hat{S}_1 i + \hat{S}_2 j + \hat{S}_3 k. \end{aligned} \quad (8)$$

它与角动量算符  $\hat{J} = \hat{J}_x i + \hat{J}_y j + \hat{J}_z k$  相对应, 因此,  $\hat{S}_j$  与  $\hat{J}_j$  有相同的对易关系:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1, \hat{S}_2] &= 2i\hat{S}_3, \\ [\hat{S}_2, \hat{S}_3] &= 2i\hat{S}_1, \\ [\hat{S}_3, \hat{S}_1] &= 2i\hat{S}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_j] = \delta_{j0}. \quad (10)$$

经典的斯托克斯参量满足

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq S_0^2, \quad (11)$$

其中等号对完全偏振光成立. 这一关系对斯托克斯算符不成立, 由对易关系(9)可得

$$\hat{S}^2 \equiv \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 = \hat{S}_0(\hat{S}_0 + 2) \geq \hat{S}_0^2. \quad (12)$$

根据角动量理论可知,  $\hat{S}^2$  和  $\hat{S}_3$  有共同的本征态, 记为  $|s, p\rangle$ . 这态称为量子偏振态, 本征值分别为  $s(s+2)$  和  $p$ .

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 |s, p\rangle &= s(s+2) |s, p\rangle, \\ \hat{S}_3 |s, p\rangle &= p |s, p\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

$s$  和  $p$  为量子数, 它们分别对应于角动量理论中的量子数  $j$  和  $m$ . 对每个量子数  $s$ , 量子数  $p$  可取  $2s+1$  个值,  $-s, -s+1, \dots, 0, \dots, s-1, s$ . Alodjants 已证明量子数  $s$  和  $p$  的物理意义分别是福克态光场中二个偏振模的光子数的和与差<sup>[6]</sup>. 因此,  $s$  和  $p$  完全决定了二个偏振模中的光子数, 也就确定了量子化光场的偏振态.

斯托克斯算符的平方可以用玻色算符的正规序积展开

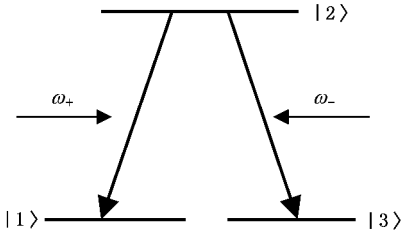
$$\hat{S}_j^2 = : \hat{S}_j^2 : + \hat{S}_0, \quad (j = 0, 1, 2, 3). \quad (14)$$

### 3. 偏振光与原子的相互作用

上面已说明椭圆偏振光用右旋圆偏振模  $a_+$  和左旋圆偏振模  $a_-$  两个模来描述. 为此, 与光场相互作用的原子用下能级简并的  $\Lambda$  形能级的原子表示, 其上能级为  $|2\rangle$ , 下能级为  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$ .  $a_+$  模的模频率为  $\omega_+$ , 它引起  $|2\rangle - |1\rangle$  的跃迁,  $a_-$  模的模频率为  $\omega_-$ , 它引起  $|2\rangle - |3\rangle$  的跃迁(见图1). 以右旋圆偏振光和左旋圆偏振光两个模为基, 描写克尔媒质的哈密顿量为<sup>[4]</sup>

$$H_K = \hbar[\kappa_1(a_+^+ a_+^2 + a_-^+ a_-^2) + 2\kappa_2 a_+^+ a_-^+ a_+ a_-], \quad (15)$$

其中系数  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  与媒质的三阶极化率有关. 克尔媒质中双模光场与原子构成的系统的哈密顿量在相互作用绘景中可以写成

图 1 下能级简并的  $\Lambda$  形能级

$$H = \kappa_1 (a_+^{\dagger} a_+^2 + a_-^{\dagger} a_-^2) + 2\kappa_2 a_+^{\dagger} a_+ a_- a_+ + g (a_+ A_1 A_2^{\dagger} e^{-i\Delta t} + a_- A_3 A_2^{\dagger} e^{-i\Delta t} + \text{H.C.}). \quad (16)$$

其中已令  $\hbar = 1$ , H.C. 为共轭项. 由于能级  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  简并, 所以假定二个模与原子的耦合系数相等, 都为  $g$ , 失谐量  $\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta$ .  $A_j^{\dagger}$  和  $A_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) 分别是在能级  $|j\rangle$  上产生和消灭一个粒子的算符.

假定初始时原子处于激发态  $|2\rangle$ , 光场处于双模相干态  $|\alpha_+, \alpha_-\rangle$ , 即系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{m,n} f_m f_n |m, n, 2\rangle,$$

$$f_m = e^{-\bar{m}/2} \alpha_+^m / \sqrt{m!},$$

$$f_n = e^{-\bar{n}/2} \alpha_-^n / \sqrt{n!}, \quad (17)$$

其中  $m$  和  $n$  分别为  $a_+$  模和  $a_-$  模中的光子数,  $\bar{m}$  和  $\bar{n}$  为两模中的平均光子数.  $t$  时刻系统的态为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m,n} f_m f_n [A_{m,n} |m, n, 2\rangle + B_{m+1,n} |m+1, n, 1\rangle + C_{m,n+1} |m, n+1, 3\rangle]. \quad (18)$$

为了简化, 讨论  $\Delta = 0$  的情况, 并假设  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ .

由薛定谔方程得到下列微分方程组:

$$\begin{aligned} i dA_{m,n}/dt &= \kappa(m+n)(m+n-1)A_{m,n} \\ &+ g(\sqrt{m+1}B_{m+1,n} + \sqrt{n+1}C_{m,n+1}), \\ i dB_{m+1,n}/dt &= \kappa(m+n)(m+n+1)B_{m+1,n} \\ &+ g\sqrt{m+1}A_{m,n}, \\ i dC_{m,n+1}/dt &= \kappa(m+n)(m+n+1)C_{m,n+1} \\ &+ g\sqrt{n+1}A_{m,n}. \end{aligned} \quad (19)$$

在初始条件(17)下, 得到下列解:

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= [\cos(\Omega_{m,n}t) + i\kappa(m+n)\sin(\Omega_{m,n}t)]\Omega_{m,n} \\ &\times \exp(-i\Lambda_{m,n}t), \\ B_{m+1,n} &= -i\sqrt{m+1}g\sin(\Omega_{m,n}t)\Omega_{m,n} \\ &\times \exp(-i\Lambda_{m,n}t), \\ C_{m,n+1} &= -i\sqrt{n+1}g\sin(\Omega_{m,n}t)\Omega_{m,n} \end{aligned}$$

$$\times \exp(-i\Lambda_{m,n}t), \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,n} &= \kappa(m+n)^2, \\ \Omega_{m,n} &= \sqrt{g^2(m+n+2) + \kappa^2(m+n)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4. 斯托克斯参量和偏振椭圆的演化

由(20)式可以得到斯托克斯算符在态(18)中的期望值, 即斯托克斯参量为

$$\begin{aligned} S_0 &= \hat{S}_0 = (\bar{m} + \bar{n}) \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n}) \\ &+ 2 \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 Q_{m,n}, \\ S_1 &= \hat{S}_1 = 2\cos\delta \sqrt{\bar{m}\bar{n}} \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n}), \\ S_2 &= \hat{S}_2 = 2\sin\delta \sqrt{\bar{m}\bar{n}} \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n}), \\ S_3 &= \hat{S}_3 = (\bar{m} - \bar{n}) \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n}), \end{aligned} \quad (22)$$

其中函数  $Q_{m,n}$  定义为

$$Q_{m,n} \equiv g^2 \sin^2(\Omega_{m,n}t) \Omega_{m,n}^2. \quad (23)$$

注意,  $Q$  的下标与  $\Omega$  的下标一致. 由(22)式可知,

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= (\bar{m} + \bar{n})^2 \left[ \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n}) \right]^2 \\ &\geq S_0^2, \end{aligned} \quad (24)$$

其中等号只有在  $t=0$  (相干态光场) 成立, 因为对于相干态, 斯托克斯参量  $S_j^{(c)}$  为

$$\begin{aligned} S_0^{(c)} &= \bar{m} + \bar{n}, \\ S_1^{(c)} &= 2\cos\delta \sqrt{\bar{m}\bar{n}}, \\ S_2^{(c)} &= 2\sin\delta \sqrt{\bar{m}\bar{n}}, \\ S_3^{(c)} &= \bar{m} - \bar{n}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\delta$  为  $\alpha_-$  和  $\alpha_+$  的幅角差, 即二个模间的相位差. 如果初始相干态光场中二个模的平均光子数相等,  $\bar{m} = \bar{n}$ , 则  $S_3 = 0$ , 这说明初始光场为线偏振态, 并且在演化中保持为线偏振态. 如果初始相干态光场中  $\bar{n} = 0$  (或  $\bar{m} = 0$ ), 则  $S_1 = S_2 = 0$ , 这说明初始光场为右旋圆偏振态(或左旋圆偏振态), 并且在演化中保持为右旋圆偏振态(或左旋圆偏振态).

通过数值计算, 得到偏振光与原子相互作用过程中光场斯托克斯参量的演化. 图 2 是无克尔媒质中的情况, 其中  $\Delta = 0$ ,  $\delta = \pi/4$ . (a) 是初始光为线偏

振光的情况 (b)是初始光为右旋圆偏振光的情况.

结果表明,光强  $S_0$  和其他斯托克斯参量  $S_j$  呈

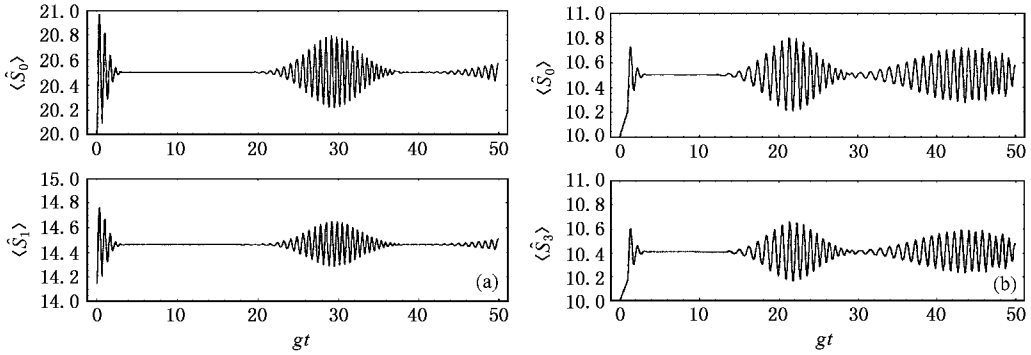


图2 无克尔媒质时斯托克斯参量的时间演化( $\Delta = 0, \delta = \pi/4$ ) (a)  $\bar{m} = \bar{n} = 10$ , 因为  $\delta = \pi/4$ , 所以  $S_1 = S_2 = 0$ ; (b)  $\bar{m} = 10, \bar{n} = 0$ , 这时  $S_1 = S_2 = 0$

现被调制的振荡,并且随初始光强的增强,调制加深.在  $\bar{m} + \bar{n}$ 较大时,这种振荡出现崩塌和恢复现象.崩塌的持续时间随光强  $\bar{m} + \bar{n}$ 的增强而延长.这种现象实际上是原子的拉比振荡的崩塌和恢复在斯托克斯参量演化中的表现,是一种量子相干现象.双模相干态可以看作双模 Fock 态的叠加.每个 Fock 态光场与原子相互作用,使原子布居数发生振荡,同时由于吸收和产生光子而使二个模中的光子数发生振荡.这些振荡的频率与  $m + n$  有关,即不同的 Fock 态有不同的振荡频率.由于各个 Fock 态光场与原子间作用的相干,使这种作用增强或被抑制乃至消失,双模 Fock 态的各个模中的光子数振荡也随之增强或被抑制乃至消失,这就形成斯托克斯参量  $S_j$  振荡的恢复和崩塌.由于初始时原子在激发态,它跃迁到基态时将产生一个光子,这就使得整个系统内的光子数不再是初始时的  $\bar{m} + \bar{n}$ ,而是  $\bar{m} + \bar{n} + 1$ .当原子在激发态和基态间跃迁时将产生或吸收一个光

子,光强  $S_0$  在  $\bar{m} + \bar{n}$ 与  $\bar{m} + \bar{n} + 1$  之间振荡.原子的拉比振荡崩塌时斯托克斯参量的振荡也随之消失.数值计算表明斯托克斯参量的振荡在崩塌时的值  $\bar{S}_j$  可以用下列各式估算:

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= \bar{m} + \bar{n} + 0.5(\bar{m} + \bar{n} + 2)g^2/\Omega_{\bar{m},\bar{n}}^2, \\ \bar{S}_1 &= 2\sqrt{\bar{m}\bar{n}}\cos\alpha(1 + 0.5g^2/\Omega_{\bar{m}+1,\bar{n}}^2), \\ \bar{S}_2 &= 2\sqrt{\bar{m}\bar{n}}\sin\alpha(1 + 0.5g^2/\Omega_{\bar{m}+1,\bar{n}}^2), \\ \bar{S}_3 &= (\bar{m} - \bar{n})\chi(1 + 0.5g^2/\Omega_{\bar{m},\bar{n}}^2). \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $\Omega_{\bar{m},\bar{n}}$  指用  $\bar{m}$ 和  $\bar{n}$ 代替  $\Omega_{m,n}$ 中的  $m$ 和  $n$ 的值.由于在无克尔媒质( $\kappa = 0$ )和  $\Delta = 0$ 时  $\Omega_{\bar{m},\bar{n}}^2 = (\bar{m} + \bar{n} + 2)g^2$ ,因此在这种情况下有  $\bar{S}_0 = \bar{m} + \bar{n} + 0.5$ .这是因为原子处于激发态和基态都可能,所以光强振荡平息时的平均光子数是初始平均光子数加  $1/2$  而不是  $1$ .

图3是存在克尔媒质时斯托克斯参量的演化,其中  $\bar{m} = \bar{n} = 10, \Delta = 0$  和  $\delta = \pi/4$ ,因此,  $S_1 = S_2, S_3 = 0$ .结果表明,克尔媒质对斯托克斯参量的演化有很大影响.随  $\kappa$  的增大,斯托克斯参量振荡处于崩

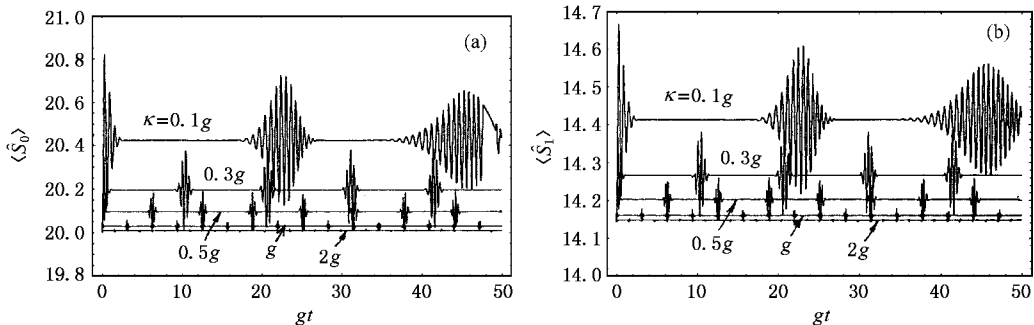


图3 克尔媒质中斯托克斯参量的时间演化(其中  $\Delta = 0, \delta = \pi/4, \bar{m} = \bar{n} = 10, \kappa = 0.1g, 0.3g, 0.5g, g$  和  $2g$ ) (a)  $S_0$  的演化 (b)  $S_1$  (或  $S_2$ ) 的演化

塌和保持振荡的持续时间都缩短, 振荡幅度减小, 振荡崩塌和恢复的周期缩短. 这是由于克尔介质的存在相当于增加了失谐量, 减弱了光场与原子的耦合, 使原子拉比振荡频率增加, 振幅减小, 相应地二个模中光子数变化也减小.  $\kappa > 2g$  时振荡几乎消失, 使斯托克斯参量保持不变. 振荡崩塌时, 斯托克斯参量的稳定值也由(26)式给出, 但  $\Omega_{\bar{m}, \bar{n}}$  中的  $\kappa \neq 0$  [见(21)式]. 这时的  $\bar{m} + \bar{n} < \bar{S}_0 < \bar{m} + \bar{n} + 0.5$ , 对很大的  $\kappa$ ,  $\bar{S}_0$  接近于  $\bar{m} + \bar{n}$ .

一般的椭圆偏振光可用偏振椭圆表示其偏振特性. 偏振椭圆的二个重要参数是椭圆长轴方位  $\theta$  (即椭圆长轴与  $x$  轴的夹角) 和长轴与短轴之比  $\eta$ , 现在它们可由下式决定:

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \hat{S}_2 / \hat{S}_1, \\ \tan(2\eta) &= \hat{S}_3 / (\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

由归一化条件

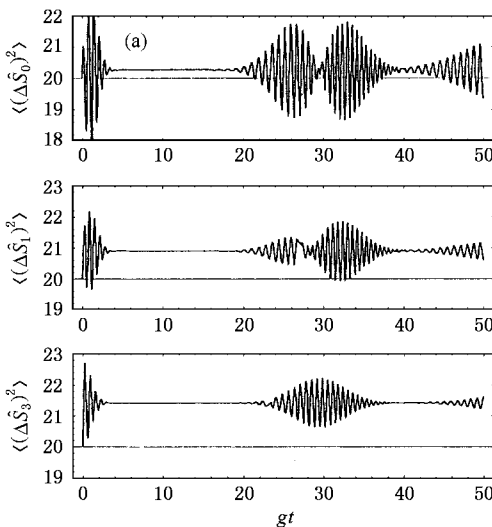
$$|A_{m,n}|^2 + |B_{m+1,n}|^2 + |C_{m,n+1}|^2 = 1$$

可得

$$\theta = \delta/2, \quad \eta = 0.5 \tan^{-1} [0.5(\bar{m} - \bar{n}) / \sqrt{\bar{m}\bar{n}}]. \quad (28)$$

因此, 表示初始相干态光场偏振的偏振椭圆在演化中是不变的, 但这只是指光场的偏振部分, 在下面将看到, 除了偏振部分外还存在非偏振部分.

### 5. 斯托克斯参量的涨落、偏振度和信噪比



由(20)和(14)式可以得到  $\hat{S}_j^2$  在  $|\Psi(t)\rangle$  态中的期望值

$$\begin{aligned} \hat{S}_0^2 &= \bar{m} + \bar{n} + (\bar{m} + \bar{n})^2 + \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 \\ &\quad \times [\mathcal{X}(\bar{m} + \bar{n}) Q_{m+2,n} \\ &\quad + \mathcal{Y}(\bar{m} + \bar{n}) Q_{m+1,n} + 2Q_{m,n}], \\ \hat{S}_1^2 &= \bar{m} + \bar{n} + 4\bar{m}\bar{n} \cos^2 \delta + \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 \\ &\quad \times [8\bar{m}\bar{n} \cos^2 \delta Q_{m+2,n} \\ &\quad + \mathcal{X}(\bar{m} + \bar{n}) Q_{m+1,n} + 2Q_{m,n}], \\ \hat{S}_2^2 &= \bar{m} + \bar{n} + 4\bar{m}\bar{n} \sin^2 \delta + \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 \\ &\quad \times [8\bar{m}\bar{n} \sin^2 \delta Q_{m+2,n} \\ &\quad + \mathcal{X}(\bar{m} + \bar{n}) Q_{m+1,n} + 2Q_{m,n}], \\ \hat{S}_3^2 &= \bar{m} + \bar{n} + (\bar{m} - \bar{n})^2 + \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 \\ &\quad \times [\mathcal{X}(\bar{m} - \bar{n}) Q_{m+2,n} \\ &\quad + \mathcal{Y}(\bar{m} + \bar{n}) Q_{m+1,n} + 2Q_{m,n}]. \end{aligned} \quad (29)$$

上式中令  $t=0$  就得到  $\hat{S}_j^2$  在相干态中的期望值, 结合(25)式, 就得到斯托克斯参量在相干态中的涨落. 相干态中各斯托克斯参量的涨落都相等, 且为初始时二个模中总光子数平均值

$$\langle (\Delta \hat{S}_j)^2 \rangle_c = \bar{m} + \bar{n}. \quad (30)$$

由(29)和(22)式得到其他时刻斯托克斯参量的涨落

$$\langle (\Delta \hat{S}_j)^2 \rangle = \hat{S}_j^2 - \hat{S}_j^2. \quad (31)$$

无克尔媒质时, 这涨落的演化见图4, 其中  $\Delta=0, \delta=\pi/4$ .

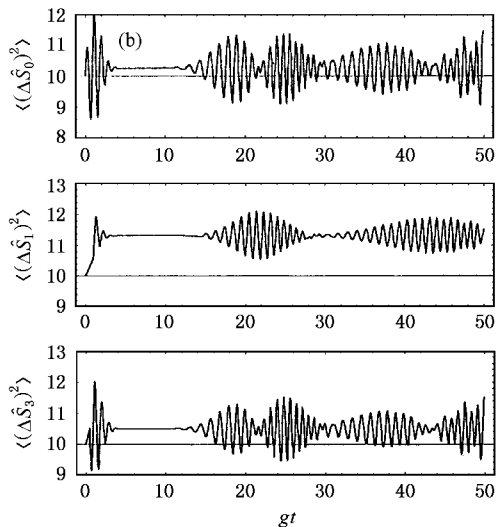


图4 无克尔媒质时斯托克斯参量涨落的时间演化(其中  $\Delta=0, \delta=\pi/4$ , 这时  $\hat{S}_1$  和  $\hat{S}_2$  的涨落相同) (a)  $\bar{m} = \bar{n} = 10$  (b)  $\bar{m} = 10, \bar{n} = 0$

从图中可见斯托克斯参量的涨落也表现出被调制的振荡,并且这些振荡也呈现出崩塌和恢复现象. $\bar{m} + \bar{n}$ 较大时,崩塌和恢复周期随光强的增强而延长, $\bar{m} + \bar{n}$ 较小时由于崩塌时间很短而使崩塌不明显.比较图 4 和图 2 可以发现,在  $\hat{S}_j$  演化中,斯托克斯参量振荡波包的最大峰两侧出现  $(\Delta\hat{S}_j)^2$  振荡的两个相邻的振荡波包,这两个相邻的振荡波包的连接处(涨落的振荡最小)恰位于  $\hat{S}_j$  振荡波包的最大峰处.对  $\hat{S}_j = 0$  的斯托克斯参量,它的涨落的演化只出现单个振荡波包的崩塌和恢复,而没有两个紧联的振荡波包(见图 4(a)中  $S_3$  的涨落和图 4(b)中的  $S_1$ ( $S_2$ )的涨落).

在对于涨落的研究中,我们常关心的是涨落的压缩.按照压缩的通常定义,如果斯托克斯参量在某态中的涨落小于它在相干态中的值,就认为该斯托

克斯参量的涨落被压缩.在初始光场为相干态的情况下,从图 4(无克尔媒质时)可见,光强  $S_0$  的涨落在振荡时可以小于它在相干态中的值,这是由于光场与原子相互作用的非经典行为,一旦振荡消失,涨落仍大于它在相干态中的值,压缩不能持续出现. $\bar{m} = 10, \bar{n} = 0$  时  $S_3$  的涨落(见图 4(b))在振荡时的压缩也如此.但在有克尔媒质存在时就不同,这时斯托克斯参量的涨落减小,从而可能使它下降到小于其在相干态中的值而出现持续的压缩.图 5 为存在克尔媒质的情况,其中  $\bar{m} = \bar{n} = 10$ ,在  $\kappa = 0.15g$  时,光强  $\hat{S}_0$  的涨落在振荡平息时已下降到接近相干态中的值, $\kappa = 0.35g$  时则进一步下降,使在振荡消失时涨落仍小于相干态中的值( $\bar{m} + \bar{n} = 20$ ),即光强涨落发生压缩.

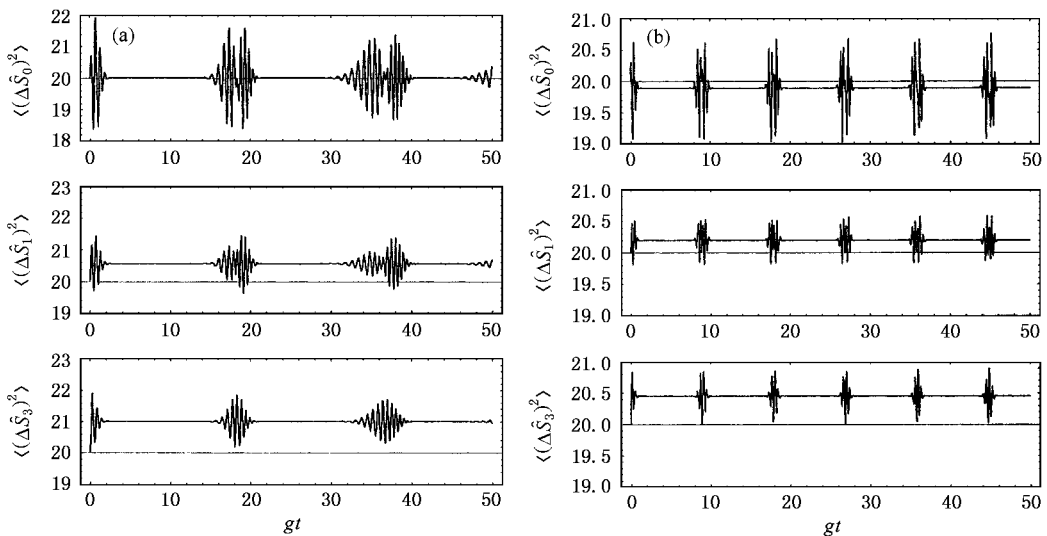


图 5 克尔媒质中斯托克斯参量涨落的时间演化(其中  $\Delta = 0, \delta = \pi/4, \bar{m} = \bar{n} = 10$ ,这时  $\hat{S}_1$  和  $\hat{S}_2$  的涨落相同) (a)  $\kappa = 0.15g$  (b)  $\kappa = 0.35g$

在经典光学中,光的偏振度定义为光场中偏振部分的光强与整个光强之比,对完全偏振光,偏振度为 1,对部分偏振光,偏振度小于 1.据此,Tanas 和 Kielich 给出了量子光学中的偏振度的定义:

$$\tilde{P} = (\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2)^{1/2} / \hat{S}_0, \quad (32)$$

这个定义是经典定义的一个直接推广. Alodjants 和 Arakelian 分析了这定义后,指出它在应用到真空态时遇到的困难,提出了一种更为合理的偏振度定义:

$$P = \left( \frac{\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2}{\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2} \right)^{1/2}. \quad (33)$$

利用(12)和(24)式,上式可改写为

$$P = \frac{(\bar{m} + \bar{n}) \sum_{m,n} |f_m|^2 |f_n|^2 (1 + Q_{m+1,n})}{\sqrt{\hat{S}_0^2 + 2\hat{S}_0}}. \quad (34)$$

结合(22)和(29)式可以看出偏振度的演化完全由初始光场中偏振光强度  $\bar{m} + \bar{n}$  决定,而不是决定于  $\bar{m}$  和  $\bar{n}$  各自的值.换言之,无论是线偏振光还是圆偏振光或椭圆偏振光,只要  $\bar{m} + \bar{n}$  值相同,在与原子相互作用的过程中,偏振度就相同,且有相同的演化.数值计算也证实了这一点.图 6(a)就表示了在无克尔媒质时不同  $\bar{m} + \bar{n}$  值的偏振度的演化.这些

演化同样表现出被调制的振荡,也呈现振荡的崩塌和恢复.克尔媒质也影响到偏振度的演化,使偏振度

振荡的幅度减小,振荡的崩塌和恢复周期缩短(见图 6(b)).

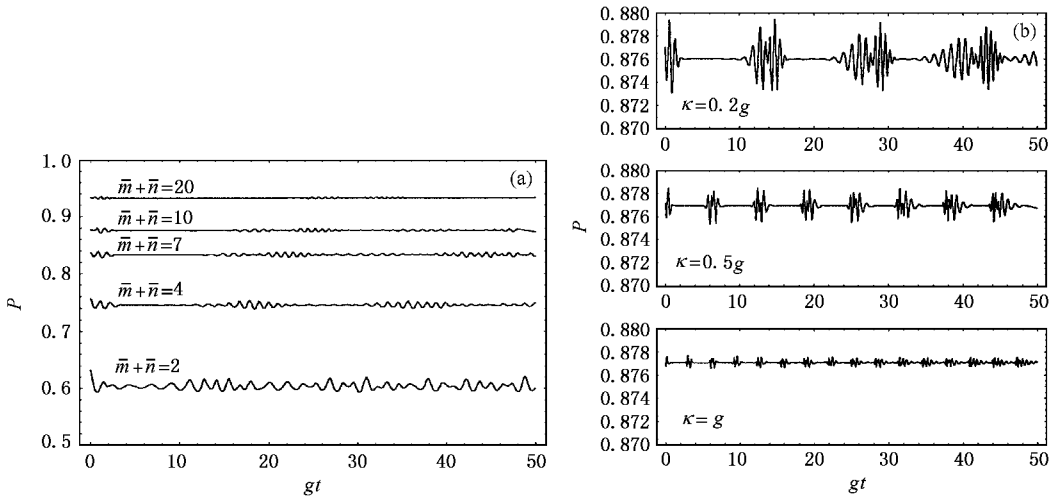


图 6 偏振光的偏振度的时间演化(其中  $\Delta = 0, \delta = \pi/4$ ) (a)无克尔媒质时( $\kappa = 0$ ),  $\bar{m} + \bar{n} = 2, 4, 7, 10, 20$  (b)克尔媒质中( $\kappa = 0.2g, 0.5g, g$ ),  $\bar{m} + \bar{n} = 10$ )

对于相干态,由(25)式可知

$$\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 = \hat{S}_0^2 = (\bar{m} + \bar{n})^2,$$

按(32)式的定义,相干态的偏振度为 1,这和经典的结果一致,这是必然的,因为(32)式是经典定义的延伸,但按(33)式的定义,相干态的偏振度小于 1,因此在量子光学中,按(33)式的定义,即使处于相干态的光也是非完全偏振光.对于相干态,  $\langle \hat{S}_j^2 \rangle_c = \hat{S}_j^2_c$  结合(14)式,代入(33)式,就得到相干态光的偏振度为

$$P_c = [1 - 3(\langle \hat{S}_0^2 \rangle_c + 3)]^{1/2} = [1 - 3(\bar{m} + \bar{n} + 3)]^{1/2} < 1. \quad (35)$$

它给出了图 6 中偏振度振荡的初始值.只有当  $\bar{m} + \bar{n} \gg 1$  时相干态偏振度才接近于经典值 1.增大光强能增加偏振度,但不可能达到 1,因此,按照量子化光场中偏振度的定义(33)式,量子光学中不存在严格的完全偏振光.这是量子化光场与经典光场间的一个重要区别,它起源于光子消灭算符和产生算符的对易关系所导致的斯托克斯算符间的对易关系.这种对易关系产生了量子化光学中偏振矢量长度和相角的不确定性,即偏振矢量的涨落.定义(33)式已把这种量子涨落包括在内,因为(33)式也可以写成

$$P = \left[ 1 - \left( \sum_{j=1}^3 \langle \Delta \hat{S}_j \rangle^2 / \sum_{j=1}^3 \hat{S}_j^2 \right) \right]^{1/2} < 1. \quad (36)$$

正是由于量子化光场中存在偏振矢量的涨落,使得

在量子光学中按(33)式的定义不存在严格的完全偏振光.

上述关于偏振度的定义是建立在斯托克斯算符基础上的,只涉及斯托克斯算符的二阶矩.最近, Alfredo Luis 利用 Poincaré 球上定义的概率分布  $Q$  函数的方法来研究偏振度<sup>[17]</sup>.它被定义为态的  $Q$  函数与非偏振态的  $Q$  函数(它是均匀分布的)间的距离.这样定义的偏振度涉及到斯托克斯算符的各高阶矩.

由于偏振光在与原子相互作用中斯托克斯参量的涨落,所以在量子化光场中对斯托克斯参量的测量存在很大的噪声,并且这噪声随光强增强而加大,甚至接近斯托克斯参量自身,因此有必要讨论斯托克斯参量的信噪比.  $S_j$  的信噪比定义为

$$R_j = | \langle \hat{S}_j \rangle | / (\Delta \hat{S}_j). \quad (37)$$

$R_j$  也将出现与涨落类似的振荡.希望信噪比  $R_j \gg 1$ , 这就要求  $S_j$  的涨落越小越好.在初始光为相干光的情况下,即使在克尔媒质中,涨落被减小或压缩,但减小或压缩的程度仍很弱,因此信噪比很小,接近于 1,甚至小于 1.要获得大的信噪比,必须使用其他非经典光场,例如偏振压缩态光场<sup>[6]</sup>.

## 6. 结 论

应用偏振光的量子理论和斯托克斯算符讨论了

斯托克斯参量的演化和偏振性质中表现出的非经典行为.通过理论分析和数值计算,考察了相干光与原子相互作用过程中光的偏振性质的演化特点,得出下列结论:

1.光场的斯托克斯参量及其涨落、偏振度的演化表现出被调制的振荡,这些振荡呈现崩塌和恢复现象,它是由于原子的拉比振荡的崩塌和恢复引起的.

2.克尔媒质的存在对斯托克斯参量及其涨落的演化有很大影响,它使斯托克斯参量及其涨落的振荡幅度减少,振荡的崩塌和恢复周期缩短,振荡的持续时间也缩短.

3.在光场与原子相互作用过程中表示偏振性质的偏振椭圆不随时间变化,也与克尔媒质无关,保持光场初始时的偏振椭圆.但偏振度随时间振荡.偏振度也与克尔媒质有关.

4.有相同偏振光强度的不同的偏振光有相同的偏振度,并且在与原子相互作用过程中偏振度演化也相同.由于斯托克斯矢量存在涨落,按(33)式的定义,在量子光学中不存在严格完全偏振光,偏振度永远小于1.光强度越小,偏振度也越小,只有在很强的光强下偏振度才接近于1.

5.通过相干光场与原子的相互作用可以使光强及其他斯托克斯参量的涨落在振荡时小于其在相干态中的值,但在无克尔媒质情况中,振荡崩塌时的稳定值仍大于相干态中的值.克尔媒质能使这些涨落减小,甚至在振荡崩塌时光强的涨落也小于相干态中的值,出现了压缩.由于初始为相干态光场,所以这种压缩很弱,因此这种情况中斯托克斯参量的信噪比很小,接近于1,甚至小于1.若要提高信噪比,应用非经典光场.

- 
- [ 1 ] Bom M and Wolf E 1980 *Principles of Optics* ( Pergamon ,Oxford )
- [ 2 ] Grangier P ,Slusher R E Yurk B and La Porta 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2152
- [ 3 ] Agarwal G S and Puri R R 1989 *Phys. Rev. A* **40** 5179
- [ 4 ] Tanas R and Kielich S 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 1935
- [ 5 ] Tanas R and Gantsog Ts 1992 *J. Mod. Opt.* **39** 749
- [ 6 ] Alodjants A P and Arakelian S M 1999 *J. Mod. Opt.* **46** 475
- [ 7 ] Barnett S M and Pegg D T 1986 *J. Phys. A* **19** 3849
- [ 8 ] Pegg D T and Barnett S M 1989 *Phys. Rev. A* **39** 1665
- [ 9 ] Tu H T and Gong C D 1993 *J. Mod. Opt.* **40** 57
- [ 10 ] Gora P and Jedrzejek C 1992 *Phys. Rev. A* **45** 6816
- [ 11 ] Buzek V and Jex I 1990 *Opt. Commun.* **78** 425
- [ 12 ] Tao X Y , Liu J M , Liu S Q and Fu C H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1464 ( in Chinese ) [ 陶向阳、刘金明、刘三秋、傅传鸿 2000 物理学报 **49** 1464 ]
- [ 13 ] Lai Z J and Lin Z X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1714 ( in Chinese ) [ 赖振讲、刘自信 2000 物理学报 **49** 1714 ]
- [ 14 ] Li W D , Lai Y Z and Liang J Q 2001 *J. Mod. Opt.* **48** 1357
- [ 15 ] Hang C J and Wen L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1978 ( in Chinese ) [ 黄春佳、文立 2002 物理学报 **51** 1978 ]
- [ 16 ] Schwinger J 1965 *Quantum Theory of Angular Momentum* ( New York : Academic Press ) p229
- [ 17 ] Alfredo Luis 2002 *Phys. Rev. A* **66** 013806



# The quantum description of polarization states of light and its evolutions in the processes of interaction with atoms

Dong Chuan-Hua

( *Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 200436 , China* )

( Received 13 October 2003 ; revised manuscript received 20 May 2004 )

## Abstract

The quantum theory of polarizing light and the Stokes operators are applied to the study of the evolutions of polarization states of light in the processes of interaction with atoms in the case with or without Kerr medium. The non-classic behavior in the fluctuations of Stokes parameters for the polarizing light and their squeezing are investigated. The polarization ellipse , the degree of polarization of the field in quantum optics and the signal-to-noise ratio in the Stokes parameters are discussed. It is shown that the modulated oscillations appear in the evolutions of Stokes parameters and their fluctuations. These oscillations collapse and revive intermittently. The polarization ellipse does not vary in the interaction with atoms but the degree of polarization will oscillate. Kerr medium changes these oscillations distinctly.

**Keywords** : Stokes operators , Stokes parameters , polarizing quantum state , quantum fluctuation

**PACC** : 4250