

# 具有原子运动的双光子 J-C 模型中量子力学通道 与量子互熵<sup>\*</sup>

刘小娟<sup>1)2)3)</sup> 方卯发<sup>1)2)</sup> 周清平<sup>1)2)</sup>

<sup>1)</sup> 湖南师范大学物理与信息学院, 长沙 410081)

<sup>2)</sup> 中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

<sup>3)</sup> 湖南科技大学物理学院, 湘潭 411201)

(2004 年 4 月 7 日收到, 2004 年 7 月 8 日收到修改稿)

用量子信息理论研究具有原子运动的双光子 Jaynes-Cumming 模型动力学, 给出了该模型中表示原子态变化的量子力学通道, 导出了量子互熵和原子约化熵, 考察了原子运动及场模结构对量子互熵的影响, 以及原子量子力学通道“开启”与“关闭”状态和原子与场纠缠程度的关系. 结果表明量子力学通道特性强烈依赖于原子运动、场模结构以及原子与场的纠缠.

关键词: 双光子 J-C 模型, 原子运动, 量子互熵, 量子约化熵, 量子学通道

PACC: 4250

## 1. 引言

由于量子信息理论<sup>[1]</sup>是与量子力学基本原理紧密联系的新领域, 是深入理解和研究目前量子计算<sup>[2]</sup>、量子通信、量子隐形传态<sup>[3]</sup>等前沿课题的理论基础, 近年来引起了人们极大的关注<sup>[4]</sup>. 而量子互熵是量子信息论中一个十分重要而有用的物理量<sup>[5]</sup>. 它既可以量度量子力学通道(quantum mechanical channel)传递量子信息的能力, 又能描述量子通信中量子态的变化. 这个物理量在量子通信理论<sup>[6]</sup>和量子隐形传态过程<sup>[7]</sup>、Jaynes-Cumming(J-C)模型相互作用中<sup>[8]</sup>等获得了广泛应用.

在量子光学中, 由于双光子微波激光器成功运转, 双光子 J-C 模型<sup>[9]</sup>成为人们研究的重要模型之一<sup>[10]</sup>. Phoenix 和 Knight<sup>[11]</sup>研究了双光子过程中的约化熵时间演化, 证明了约化熵能为原子和场的纠缠提供方便而灵敏的量度. Fang 等研究了双光子 J-C 模型中量子力学通道和量子互熵<sup>[12]</sup>, 考察了初始场的位相相干性和原子能级的斯塔克位移对量子力学通道互熵的影响. 但是这些研究结果是在忽略了原子运动和场模结构影响的情况下得到的. 随着激光

致冷和原子囚禁<sup>[13]</sup>技术的发展, 冷原子和超冷原子的获得必须考虑原子的空间运动. 因此, 在研究原子-场相互作用动力学时, 应考虑原子沿腔轴的运动和不同场模结构的影响. Schlicher 和 Joshi<sup>[14,15]</sup>研究了原子运动和场模结构对原子反转的影响. Bartzis 和 Joshi<sup>[15]</sup>分析了原子运动对场压缩的影响, Liu 等研究了具有原子运动的双光子 J-C 模型的场熵和薛定谔猫态<sup>[16]</sup>. 研究表明: 原子运动所引起的量子效应在实际实验中是不可低估的. 但是, 具有原子运动的双光子 J-C 模型的量子力学通道和互熵的研究, 至今未见涉及.

本文应用量子信息熵理论, 研究具有原子运动的双光子 J-C 模型动力学, 给出了该模型中表示原子态变化的量子力学通道, 导出了量子互熵和原子约化熵, 考察了原子运动及场模结构对量子互熵的影响, 以及原子量子力学通道“开启”与“关闭”状态和原子与场纠缠程度的关系. 本文的结果对于量子通信中信息的正确传送具有十分重要的意义.

## 2. 模型及量子力学通道和量子互熵

在目前的腔量子电动力学实验<sup>[17,18]</sup>中, 采用让

\* 国家自然科学基金(批准号: 10374025), 湖南省自然科学基金(批准号: 01JJY3030), 湖南省教育厅资助项目(批准号: 03c543).

† 通信作者.

一原子束沿轴向通过矩形或圆柱形腔而与不同的模场发生相互作用的方法,来考察场与原子耦合而产生的各种量子效应.因此,本文考虑一个运动的双能级原子与一量子光场通过双光子过程而发生相互作用.这种系统在实验上是可能的.在旋波近似下,系统的有效哈密顿可以写成<sup>[14,15]</sup>

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^+ a + g [f(z)] (S_+ a^2 + a^{+2} S_-), \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中  $a^+$ ,  $a$  是频率为  $\omega$  的场模的产生和湮没算符,  $S_z$  和  $S_{\pm}$  分别为原子的反转和跃迁算符,  $\omega_0$  为原子的跃迁频率,  $g$  为原子与场模的耦合常数,  $f(z)$  为场模的形式函数.假定原子沿腔的  $Z$  轴方向运动,因此只需要考虑场模形式函数对  $Z$  的依赖关系.因此,原子的运动可以具体化为

$$f(z) \rightarrow f(vt), \quad (2)$$

这里,  $v$  为原子的运动速度,为具体讨论方便,我们定义 TEM<sub>mp</sub> 模<sup>[14]</sup>

$$f(z) = \sin\left(\frac{p\pi vt}{L}\right), \quad (3)$$

式中  $p$  表示长为  $L$  的腔中模的半波数.为简单起见,我们考虑共振情况(即  $2\omega = \omega_0$ )并假定在  $t=0$  时原子进入腔内经过  $p$  个半波长后离开腔.(1)式确定的哈密顿量可以重新写为

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ H_0 &= \alpha(2S_z + a^+ a), \\ H_1 &= g(f(z)) [S_+ a^2 + a^{+2} S_-]. \end{aligned} \quad (4)$$

在相互作用绘景中,可以证明

$$[H_0(t), H_1(t)] = 0. \quad (5)$$

时间演化 Dyson 算符  $U(t)$  可以写为

$$U(t) = \exp\left[-i \int_0^t H(t') dt'\right] = \exp(-iMt), \quad (6)$$

这里

$$\begin{aligned} M(t) &= g\alpha(t) [S_+ a^2 + a^{+2} S_-], \\ \alpha(t) &= \int_0^t [f(vt')] dt' = \int_0^t \left[\sin\left(\frac{p\pi vt'}{L}\right) dt'\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ t - \frac{L}{2p\pi v} \sin\left(\frac{p\pi vt}{L}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

选择原子的速度  $v = gL/\pi$  (实验上可以作到),方程(7)式变为

$$\alpha(t) = \frac{1}{2g} \left[ gt - \frac{1}{2p} \sin(2pgt) \right]. \quad (8)$$

在二维原子基矢时间演化 Dyson 算符  $U(t)$  的矩阵表示为

$$U(t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & -i\hat{u}_{12} \\ -i\hat{u}_{21} & \hat{u}_{22} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

(9)式中的算符为

$$\begin{aligned} \hat{u}_{11} &= \cos(\hat{A}g\alpha(t)), \\ \hat{u}_{21} &= a^{+2} \frac{\sin(\hat{A}g\alpha(t))}{\hat{A}}, \\ \hat{u}_{22} &= \cos(\hat{B}g\alpha(t)), \\ \hat{u}_{12} &= a^2 \frac{\sin(\hat{B}g\alpha(t))}{\hat{B}}, \\ \hat{A} &= \sqrt{a^2 a^{+2}}, \\ \hat{B} &= \sqrt{a^{+2} a^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

为建立量子力学通道,设  $\rho_A$  表示原子系统的初态,而  $\rho_F$  表示场系统的初态,考虑原子的初态为激发态  $|+\rangle$  和基态  $|-\rangle$  的叠加

$$\rho_A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2, \quad (11)$$

其中  $E_1 = |-\rangle\langle-|$ ,  $E_2 = |+\rangle\langle+|$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . 方程(11)是如下形式的 Schatten 分解<sup>[18]</sup>:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_k \lambda_k E_k, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \\ E_i &\perp E_j (i \neq j), \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\lambda_k$  是  $\rho_A$  的本征值,  $E_k$  是与之联系的一维投影.设初始场为相干态

$$\begin{aligned} \rho_F &= |\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{n,m} |n\rangle\langle m|, \\ F_{n,m} &= \exp(-\bar{n}) \frac{\beta^n \beta^{*m}}{\sqrt{n!m!}}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\beta = \sqrt{\bar{n}} \exp(i\varphi)$ ,  $\bar{n}$  是初始平均光子数,  $\varphi$  是初始相干场的位相角.为简单起见,取  $\varphi=0$ .原子与场全系统的初态可写为

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_F. \quad (14)$$

设该系统中原子时间演化的上升算符  $\xi_i^*$  和依赖时间的量子力学通道  $\Pi_i^*$  如下:

$$\xi_i^* : A \rightarrow A \otimes F, \quad (15)$$

$$\Pi_i^* : A \rightarrow A. \quad (16)$$

这样,通过原子和场的双光子相互作用后,原子与场全系统的终态  $\xi_i^* \rho_A \in A \otimes F$  可以写为

$$\xi_i^* \rho_A = U_i(t) \rho_A \otimes \rho_F U_i^+(t). \quad (17)$$

进一步,由上升算符  $\xi_i^*$  和量子力学通道  $\Pi_i^*$ ,可以写出原子的终态

$$\begin{aligned} \Pi_i^* \rho_A &= \text{Tr}_F(U_i(t) \rho_A \otimes \rho_F U_i^+(t)) \\ &= \begin{bmatrix} P_{22} & P_{21} \\ P_{12} & P_{11} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$p_{22} = \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,n} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)) + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2,n+2} \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)), \quad (19)$$

$$p_{21} = p_{12}^* = \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,n-2} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)) \times (i \sin(\sqrt{(n)(n-1)})) + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2,n} \cos(\sqrt{(n)(n-1)}g\theta(t)) \times (-i \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)), \quad (20)$$

$$p_{11} = \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,n} \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)) + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2,n+2} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)}g\theta(t)). \quad (21)$$

因而  $\Pi_t^* \rho_A$  可以写为

$$\Pi_t^* \rho_A = p_{22} | + + \rangle + p_{21} | + - \rangle + p_{12} | - + \rangle + p_{11} | - - \rangle. \quad (22)$$

很明显,原子的反转时间演化为

$$W(t) = p_{22} - p_{11}. \quad (23)$$

其数值结果呈示于图 1 中.

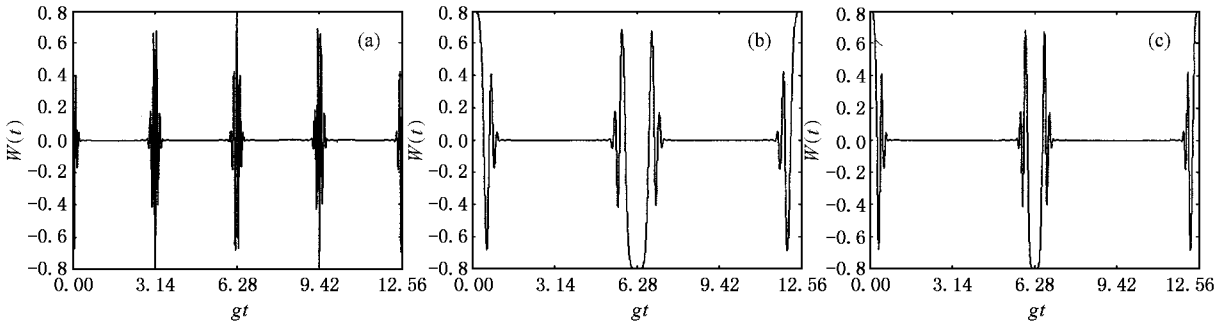


图 1 原子反转  $W(t)$  的时间演化:原子初始处于基态与激发态的叠加态,初始场处于平均光子数  $\bar{n} = 25$  的相干态 (a)不考虑原子的运动 (b)考虑原子的运动,  $\nu = gL/\pi, \rho = 1$  (c)考虑原子的运动,  $\nu = gL/\pi, \rho = 2$

很容易将 (18) 式的矩阵对角化,得到其本征值

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(p_{22} + p_{11}) \pm [ (p_{22} - p_{11})^2 + 4|p_{21}|^2 ]^{1/2}. \quad (24)$$

原子的约化熵由下式给出<sup>[10]</sup>:

$$S_A(t) = -\mu_+ \ln \mu_+ - \mu_- \ln \mu_-. \quad (25)$$

图 2 数值结果表明了其结果.

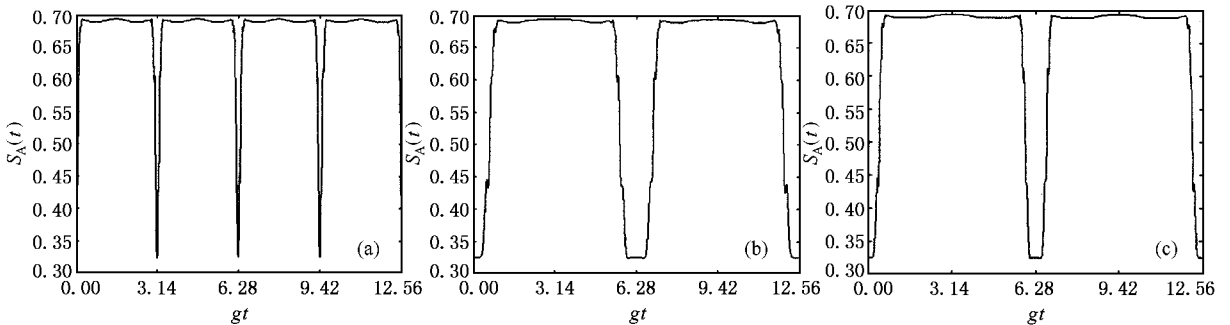


图 2 原子的约化熵  $S_A(t)$  时间演化:原子初始处于基态与激发态的叠加态,初始场处于平均光子数  $\bar{n} = 25$  的相干态 (a)不考虑原子的运动 (b)考虑原子的运动,  $\nu = gL/\pi, \rho = 1$  (c)考虑原子的运动,  $\nu = gL/\pi, \rho = 2$

为定义量子互熵,给出描述原子初态  $\rho_A$  和其终

$$\sigma_E = - \sum_k \lambda_k E_k \otimes \Pi_t^* E_k. \quad (26)$$

态  $\Pi_t^* \rho_A$  之间关联的复合态为

量子互熵  $S(\rho_A: \Pi_t^* \rho_A)$  定义为<sup>[19]</sup>

$$\mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A) = \sup_E \{ \mathcal{S}(\sigma_E, \sigma_0) ; E = \{E_k\} \}, \quad (27)$$

其中  $\sup$  表示取上限,  $\sigma_0 = \rho_A \otimes \Pi_i^* \rho_A$  是一个普通的复合态,  $\mathcal{S}(\sigma_E, \sigma_0)$  是量子相对熵<sup>[20]</sup>

$$\mathcal{S}(\sigma_E, \sigma_0) \equiv \text{Tr} \sigma_E (\ln \sigma_E - \ln \sigma_0). \quad (28)$$

经过一些简单计算 (28) 式可简化为

$$\mathcal{S}(\sigma_E, \sigma_0) = \sum_k \lambda_k \mathcal{S}(\Pi_i^* \sigma_E, \Pi_i^* \rho_A). \quad (29)$$

因为由 (11) 式给定的初始原子态是非简并的 Schatten 分解式, 所以量子互熵可唯一给定:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A) &= \mathcal{S}(\sigma_E, \sigma_0) \\ &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathcal{S}(\Pi_i^* \sigma_E, \Pi_i^* \rho_A) \\ &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \text{Tr} \Pi_i^* E_k (\ln \Pi_i^* E_k - \Pi_i^* \rho_A). \end{aligned} \quad (30)$$

$\mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A)$  的计算主要涉及矩阵  $\Pi_i^* E_k$  和  $\Pi_i^* \rho_A$  的对角化.  $\Pi_i^* \rho_A$  的对角化已由 (24) 式给出. 为将  $\Pi_i^* E_k$  对角化, 首先由 (19)–(21) 式给出的量子力学通道写出  $\Pi_i^* E_k$  的矩阵元

$$\begin{aligned} &+ |\Pi_i^* E_1| + \\ &= F_{n+2, n+2} \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t))^2, \\ &+ |\Pi_i^* E_2| + \\ &= F_{n, n} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t))^2, \\ &+ |\Pi_i^* E_1| - \\ &= F_{n+2, n} \cos(\sqrt{n(n-1)} g \theta(t)) \\ &\times (-i \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ |\Pi_i^* E_2| - \\ &= F_{n, n-2} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t)) \\ &\times (i \sin(\sqrt{(n)(n-1)} g \theta(t))), \\ &- |\Pi_i^* E_1| - \\ &= F_{n+2, n+2} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t))^2, \\ &- |\Pi_i^* E_2| - \\ &= F_{n, n} \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)} g \theta(t))^2. \end{aligned} \quad (31)$$

由 (31) 式, 可得  $\Pi_i^* E_k$  的本征值

$$\begin{aligned} \nu_{\pm}^k &= \frac{1}{2} \{ + | \Pi_i^* E_k | + + - | \Pi_i^* E_k | - \\ &\pm [ ( + | \Pi_i^* E_k | + - - | \Pi_i^* E_k | - )^2 \\ &+ 4 | + | \Pi_i^* E_k | - |^2 ]^{1/2} \} k = 1, 2. \end{aligned} \quad (32)$$

这样, 由 (30) 式给出的量子互熵可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A) &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k ( \nu_+^k (\ln \nu_+^k - \ln \mu_+) ) \\ &+ \nu_-^k (\ln \nu_-^k - \ln \mu_-). \end{aligned} \quad (33)$$

(33) 式给出的量子互熵的物理意义为: 在该式中, 由原子初态  $\rho_A$  携带的信息有多少能通过量子力学通道正确传送到终态  $\Pi_i^* \rho_A$ . 量子互熵的降低意味着传送原子初态信息的减少. 另外由 (25) 式给出的原子约化熵量度了原子和场纠缠的程度<sup>[11, 22]</sup>. 量子互熵和原子约化熵遵守下列不等式<sup>[23]</sup>:

$$0 \leq \mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A) \leq S_A(t). \quad (34)$$

由 (33) 式确定的量子互熵表明: 量子互熵不仅决定于场模的光子统计分布, 而且通过时间因子  $\theta(t) = \frac{1}{2g} [gt - \frac{1}{2p} \sin(2pgt)]$  决定于原子的运动速度  $v$  与场模结构参数  $p$ . 图 3 显示了量子互熵的时间演化.

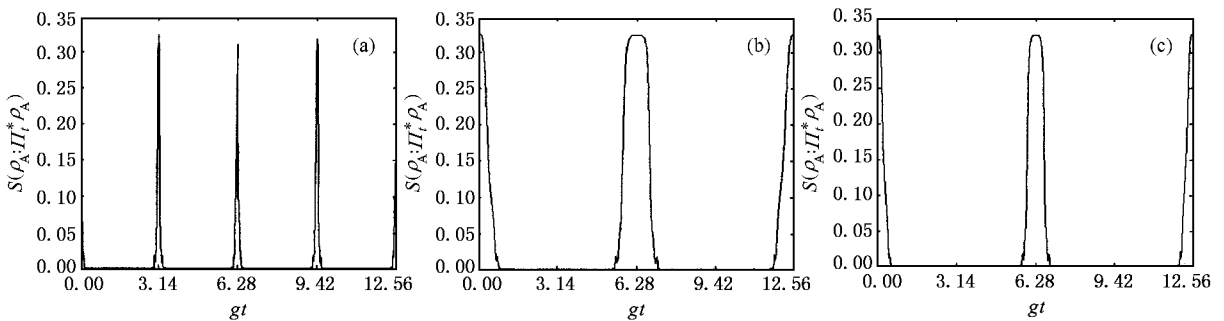


图 3 量子互熵  $\mathcal{S}(\rho_A : \Pi_i^* \rho_A)$  的时间演化. 原子初始处于基态与激发态的叠加态, 初始场处于平均光子数  $\bar{n} = 25$  的相干态. (a) 不考虑原子的运动; (b) 考虑原子的运动,  $v = gL/\pi, p = 1$ ; (c) 考虑原子的运动,  $v = gL/\pi, p = 2$

### 3. 数值结果及讨论

包含在量子互熵(33)式中的级数很难精确求解,借助于数值计算与作图,可以直观地展示具有原子运动的双光子过程的量子互熵的时间演化.图3显示了初始平均光子数=25,考虑与不考虑原子运动两种情况下量子互熵的时间演化.

首先,我们讨论不考虑原子运动情况下量子互熵的时间演化.在图3(a)中,表明了不考虑原子运动相应于标准双光子 J-C 模型的量子互熵演化的规律.从图中可以看出:量子互熵周期性地演化,演化周期为  $T = \pi/g$ .在靠近时刻  $t = n\pi/g$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ),量子互熵达到峰值  $S_{\max}(\rho_A : \Pi_t^* \rho_A)$ ,而在其余时刻,几乎为零.图1(a)和图2(a)表明了这种情况下原子反转  $w(t)$  和原子的约化熵  $S_A(t)$  时间演化.不考虑原子运动情况下的所有结论与文献[12]一致.

其次,我们研究考虑原子运动情况下量子互熵的时间演化.在图3(b)和(c)中,考虑原子运动,  $v = gL/\pi$ ,能够看到量子互熵演化的周期性扩大一倍,  $T = 2\pi/g$ .在靠近时刻  $t = 2n\pi/g$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ),量子互熵达到峰值  $S_{\max}(\rho_A : \Pi_t^* \rho_A)$ ,而在其余时刻,几乎为零.

根据(19)–(21)式,可得出定量解释<sup>[24]</sup>.

在强场条件  $\bar{n} \gg 1$  下,光场光子数可由泊松分布转化为高斯分布,则有

$$\sqrt{(n+1)(n+2)} \approx (\bar{n} + 1),$$

$$\sqrt{(n)(n-1)} \approx (\bar{n}) \text{ 和 } F_{n,n} = F_{n+2,n+2} \text{ 成立.}$$

因此在  $t = 2n\pi/g$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 而  $\bar{n} = 25$  时,

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{(n+1)(n+2)}gt)^2 &= 1, \\ \sin(\sqrt{(n+1)(n+2)}gt)^2 &= 0, \\ \sin(\sqrt{(n)(n-1)}gt)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

将(35)式代入(19)–(21)式,得出

$$\begin{aligned} p_{22} &= \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,n} = \lambda_2, \\ p_{21} &= p_{12}^* = 0, \\ p_{11} &= \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2,n+2} = \lambda_1, \end{aligned} \quad (36)$$

此时,由(18)式可知原子的终态为

$$\Pi_t^* \rho_A = \text{Tr}_F(U_I(t)\rho_A \otimes \rho_F U_I^+(t)) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_2 E_2 + \lambda_1 E_1 \\ &= \rho_A, \end{aligned} \quad (37)$$

此即为原子初态(11)式.

由图3(b)(c)可以看出,正是在  $t = 2n\pi/g$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 这些时刻附近,量子互熵达到峰值  $S_{\max}(\rho_A : \Pi_t^* \rho_A)$ ,且其峰值等于原子初始约化熵  $S_A(0) = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2 = 0.325$  (见图3(b)(c)).这意味着在量子互熵取其峰值的时刻,量子力学通道处于“开放态”,原子初态所携带的全部信息能通过量子力学通道正确地传送到终态.

在其他时刻,由于量子互熵取其零值,表示量子力学通道处于“关闭态”,原子初态的信息不能通过量子力学通道传送.由(19)–(22)式知:在  $2n\pi/g < t < (n+1)\pi/g$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) 的这些时间内,原子终态  $\Pi_t^* \rho_A$  由(22)式确定.很显然,从中已无法分离出原子初态的信息.

物理上量子力学通道的“开”和“关”的周期性可归结为原子和场的双光子相互作用特性.比较图1(b)(c)和图3(b)(c)可以发现,量子力学通道“开放态”发生在原子反转的回复区域,而量子力学通道处于“关闭态”发生在原子反转的崩溃区域,比较图2(b)(c)和图3(b)(c)可以进一步理解量子互熵与原子和场纠缠之间的关系.图2(b)(c)给出了这种情况下原子约化熵的时间演化.可清晰地看出,在  $2n\pi/g < t < (n+1)\pi/g$  的时间范围内,原子约化熵达到最大,而量子互熵取零值.这表明量子力学通道处于“关闭态”,原子初态的信息不能传送到终态,可归结为原子与场的强烈纠缠;而在  $t = 2n\pi/g$  时刻附近,原子约化熵降低到它的初始值  $S_A(0) = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2 = 0.325$ ,而量子互熵取其峰值,量子力学通道处于“开放态”,原子初态所携带的全部信息能通过量子力学通道正确地传送到终态,可归结为原子与场完全退纠缠,原子保留了初态的全部信息.

考虑原子运动,  $v = gL/\pi$ ,能够看到原子运动和场模结构对量子互熵演化周期的影响,可以归结为:(1)原子的运动和场模结构不破坏量子互熵演化的周期性,但将其演化周期扩大一倍,  $T = 2\pi/g$ ;(2)原子运动导致量子互熵最大和最小值的持续时间增加(图3(b));(3)场模结构参数增加(图3(c))  $p = 2$  导致量子互熵最小值的持续时间增加和最大值的持续时间减少.

物理上,这些特点归结为原子运动和场模结构

导致原子与场模结构相互作用时间的改变.事实上,对于不考虑与考虑原子的运动两种情况,参数  $p_{ij}$  和  $i | \Pi_i^* E_k | j (i, j, k = 1, 2)$  的差别在于时间因子:当考虑原子的运动时,时间因子为  $g\theta(t)$ ,当不考虑原子的运动时,时间因子为  $gt$ ,这两者之间的关系已由(8)式确定,即  $g\theta(t) = \frac{1}{2g} \left[ gt - \frac{1}{2p} \sin(2pgt) \right]$ .  $g\theta(t)$  相对  $gt$  由两部分组成,一部分是线性部分  $(1/2)gt$ ,另一部分是非线性部分  $\frac{1}{4p} \sin(2pgt)$ ,由于非线性部分很小 ( $\leq (1/4)p$ ),所以有近似式成立,  $g\theta(t) \approx (1/2)gt$ ,这正好说明原子的运动导致了原子反转回复周期加倍(见图 1(b),  $p = 1$ ; 1(c),  $p = 2$ )和原子约化熵周期加倍(见图 2(b),  $p = 1$ ; 2(c),  $p = 2$ ),从而导致了量子互熵演化周期加倍.但非线性部分  $\frac{1}{4p} \sin(2pgt)$  对原子约化熵的最大值和最小值的持续时间产生影响.从而导致了量子互熵最大值和最小值的持续时间产生相应变化.

很显然,可以通过原子运动和选择场模结构控制量子力学通道的“开启”和“关闭”的持续时间.

## 4. 结 论

我们用量子信息理论研究了具有原子运动的双

光子 J-C 模型动力学,具体给出了代表该模型中原子态变化的量子力学通道,导出了量子互熵和原子约化熵.讨论了原子运动和场模结构对量子互熵的影响,以及原子量子力学通道“开启”与“关闭”状态和原子与场纠缠程度的关系.我们的讨论使得这一研究更接近与双光子过程的实验实现,我们的结论表明:

1. 由于运动原子和场的双光子相互作用,量子互熵的时间演化是周期性的.传输原子初态信息的量子力学通道,在原子反转的回复区域处于“开放态”,归结为原子与场的完全退纠缠.在原子反转的崩溃区域处于“关闭态”,归结为原子与场的强烈纠缠.

2. 双光子过程中原子的运动导致了量子互熵演化周期增大,量子互熵最大值和最小值的持续时间增加,即量子力学通道的“开启”和“关闭”的周期和持续时间延长.

3. 场模结构参数  $p$  增加,导致量子互熵最小值的持续时间增加和最大值的持续时间减少,即量子力学通道的“关闭”的持续时间延长和“开启”持续时间缩短.

我们得出可以通过原子运动和选择场模结构控制量子力学通道的“开启”和“关闭”的周期和持续时间的结论对于量子通信中信息的正确传送是十分重要的.

- [ 1 ] Ohya M 1983 *IEEE Trans. Information Theory* **29** 770  
Preprint Quant-ph/9610005; 9806042
- [ 2 ] Wu Y 2001 *Phys. Rev. A* **63** 052303  
Divincenzo D P 1995 *Science* **270** 255  
Lloyd S 1993 *Science* **261** 1569; **273**(1996), 1073
- [ 3 ] Schumacher B 1995 *Phys. Rev. A* **51** 2738  
Jozsa R, Schumacher B 1994 *J. Mod. Opt.* **41** 2343
- [ 4 ] Wu Y and Yang X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086  
Wu Y 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1586
- [ 5 ] Schumacher B 1995 *Phys. Rev. A* **51** 2738
- [ 6 ] Ingarden R S, Kossalowski A, Ohya M 1997 *Information Dynamics and Open Systems* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht)  
Ohya M, Pets D 1993 *Quantum Entropy and Its Use* (Springer-Verlag, Berlin)
- [ 7 ] Inoue K, Ohya M, Suyari H 1998 *Physica D* **120** 117
- [ 8 ] Faruichi S, Ohya M, Suyari H, Preprint Quant-ph/9804036
- [ 9 ] Sukumar C V, Buck B 1981 *Phys. Lett. A* **83** 211
- [ 10 ] Brune M, Raimond J M, Haroche S 1987 *Phys. Rev. A* **35** 154  
Brune M et al 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1899
- [ 11 ] Poenix S J D, Knight P L 1988 *Ann. Phys. (N.Y.)* **186** 381  
Poenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023  
Poenix S J D, Knight P L 1990 *J. Opt. Soc. Am.*, **B 7** 116
- [ 12 ] Fang M F, Liu X 2000 *Chin. Phys. Soc.* **49** 0435
- [ 13 ] Diedrich F, Bergquist J C, Itano W M, Wineland D 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 403
- [ 14 ] Schlicher R R 1989 *Opt. Commun.* **70** 97-102
- [ 15 ] Joshi A, Lawande S V 1992 *Int. J. Mod. Phys. B* **6** 3539  
Bartzis V 1992 *Physica A* **180** 428  
Joshi A, Lawande S V 1990 *Phys. Rev. A* **42** 1752
- [ 16 ] Liu X J, Wang Q H 1999 *Acta Sinica Quantan Oprica* **5** 1
- [ 17 ] Meschede D, Walther H, Muller G 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 551
- [ 18 ] Rempe G, Walther H, Klein N 1985 *Phys. Rev. Lett.* **58** 353
- [ 19 ] Schatten R 1960 *Springer-Verlay*, Berlin
- [ 20 ] Faruichi S, Ohya M, Syuari H, Preprint Quant-ph/9804036
- [ 21 ] Umegaki H et al 1962 *Math. Sem. Rep.* **14** 59
- [ 22 ] Fang M F and Zhou G H 1994 *Phys. Lett. A* **184** 397
- [ 23 ] Poenix S J D and Knight P L 1988 *Ann. Phys. (N.Y.)* **186** 381
- [ 24 ] Kuang L M, Chen G H and Wu Y S 2003 *Quantum Semiclass. Opt.* **5** 341

# Quantum mechanical channel and quantum mutual entropy in the two-photon Jaynes-Cummings model with atomic motion \*

Liu Xiao-Juan<sup>1,2,3)</sup> Fang Moa-Fa<sup>1,2)</sup> Zhou Qing-Ping<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*

<sup>2)</sup> *Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*

<sup>3)</sup> *Department of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China*

( Received 7 April 2004 ; revised manuscript received 8 July 2004 )

## Abstract

The dynamics of the two-photon Jaynes-Cummings model with atomic motion are studied by using the quantum information theory, and the quantum mechanical channel representing the state change of atom is given; the quantum mutual entropy and reduced entropy of the atom are derived. The influences of the atomic motion and the field structure on the quantum mutual entropy are examined. It is shown that the properties of quantum mechanical channel are strongly dependent on the atomic motion, the field model structure, and the entanglement between the atom and the field.

**Keywords** : two-photon Jaynes-Cummings model, atomic motion, quantum mutual entropy, quantum reduced entropy, quantum mechanical channel

**PACC** : 4250

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10374025 ), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China ( Grant No. 01JJy3030 ), and the Scientific Research Fund of Education Bureau of Hunan Province ( Grant No. 03c543 ).