二维运动电荷的 Mei 对称性

楼智美
(绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

(2004 年 5 月 19 日收到;2004 年 6 月 22 日收到修改稿)

把 Mei 对称性方法用于电磁场中带电粒子的运动,从二维运动电荷的 Mei 对称性出发,运用比较系数法,得到与 Mei 对称性相应的生成元的普遍表达式及电磁场所满足的偏微分方程组.对一特例进行了讨论.

关键词:二维运动电荷,电磁场,Mei 对称性
PACC:0320

1. 引 言

Mei 对称性是近几年发展起来的一种研究力学系统对称性的新方法,它是力学系统的动力学函数在无限小变换下仍然满足运动方程的一种不变性,在一定条件下也可导致守恒量.

一直以来,许多学者致力于各类力学系统 Mei 对称性的研究[1—12],都没有涉及到力学系统拉格朗日函数的具体表达式.二维运动电荷是一典型的力学系统,文献[13,14]讨论了二维运动电荷的 Noether 对称性和 Lie 对称性.本文从二维运动电荷的 Mei 对称性出发,运用比较系数法,得到与 Mei 对称性相应的生成元的普遍表达式及电磁场所满足的偏微分方程组,最后对一特例进行了讨论.

2. Mei 对称性

二维运动电荷系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+A_1(x,y,t)\dot{x}+A_2(x,y,t)\dot{y}-V(x,y,t),\qquad(1)$$

其中 $\boldsymbol{A}=(A_1(x,y,t),A_2(x,y,t),0)$ 为矢势,$V(x,y,t)$ 为标势.

系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\qquad(q_\alpha=x,y).\qquad(2)$$

引进无限小群变换

$$t^*=t+\varepsilon\tau(x,y,t),$$
$$x^*=x+\varepsilon\eta_1(x,y,t),$$
$$y^*=y+\varepsilon\eta_2(x,y,t),\qquad(3)$$

其无限小生成元向量为

$$X^{(0)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\eta_1\frac{\partial}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial}{\partial y}.\qquad(4)$$

(4)式的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\eta}_1-\dot{x}\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial\dot{x}}+(\dot{\eta}_2-\dot{y}\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial\dot{y}},\qquad(5)$$

其中 ε 为无限小参数,τ,η_1,η_2 为无限小变换的生成元.

在无限小变换下,

$$L^*=L+\varepsilon X^{(1)}(L).\qquad(6)$$

方程(2)的形式保持不变,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial x}=0,\qquad(7\mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial y}=0.\qquad(7\mathrm{b})$$

将 L 代入(7a)和(7b)式,得到关于广义速度的多项式,运用比较系数法,即令所有 $\dot{x}^m\dot{y}^n$ 的系数为零,可确定无限小变换的生成元 τ,η_1,η_2 的形式.

在(7a)式中令 $\dot{x}\ddot{x}$的系数为零,得

$$\tau_x=0,\qquad(8)$$

其中下标 x 为对 x 求偏导,以下类同.令 $\dot{x}\ddot{y}$的系数为零,得

$$\tau_y=0.\qquad(9)$$

由(8)和(9)式,可令

$$\tau=\rho(t).\qquad(10)$$

令 $\ddot{x}$的系数为零,得

$$\eta_{1x}=\tau_t=\dot{\rho}.\qquad(11)$$

令 $\ddot{y}$的系数为零,得

$$\eta_{1y} = \tau_{2x} = 0. \tag{12}$$

在(7b)式中令 $\ddot{y}$ 的系数为零,得

$$\eta_{2y} = \tau_t = \dot{\rho}. \tag{13}$$

由(11)—(13)式,可解得

$$\eta_1 = \dot{\rho}\, x - \Omega(t) y + a_1(t), \tag{14}$$

$$\eta_2 = \dot{\rho}\, y + \Omega(t) x + a_2(t). \tag{15}$$

定义电场强度为 $\boldsymbol{E} = (E_1(x,y,t), E_2(x,y,t), 0)$,磁感应强度为 $\boldsymbol{B} = (0,0,B(x,y,t))$,由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$,得

$$E_1(x,y,t) = - V_x - A_{1t}, \tag{16}$$

$$E_2(x,y,t) = - V_y - A_{2t}, \tag{17}$$

$$B(x,y,t) = - A_{2x} - A_{1y}. \tag{18}$$

在(7a)式中令 $\dot{y}$ 的系数为零,并利用(16)—(18)式,得

$$X^{(0)}(B) = - \dot{\rho}\, B + 2\dot{\Omega}, \tag{19}$$

其中只含磁感应强度 B,可以直接求解.在(7a)式中令常数项为零,得

$$X^{(0)}(E_1) = - \eta_{1x}E_1 - \eta_{2x}E_2 - \eta_{2t}B + \eta_{1tt} - \tau_{tt}A_1. \tag{20}$$

在(7b)式中令常数项为零,得

$$X^{(0)}(E_2) = - \eta_{1y}E_1 - \eta_{2y}E_2 + \eta_{1t}B + \eta_{2tt} - \tau_{tt}A_2. \tag{21}$$

(20)和(21)式为电场强度和磁感应强度相互耦合的偏微分方程,由微分方程的封闭性知

$$\tau_{tt} = 0, \tag{22}$$

则无限小变换的生成元为

$$\tau = \alpha t + \beta, \tag{23}$$

$$\eta_1 = \alpha x - \Omega(t) y + a_1(t), \tag{24}$$

$$\eta_2 = \alpha y + \Omega(t) x + a_2(t), \tag{25}$$

其中 α, β 为任意常数.(19)—(21)式可写成

$$X^{(0)}(B) = - \alpha B + 2\dot{\Omega}, \tag{26}$$

$$X^{(0)}(E_1) = - \alpha E_1 + \Omega E_2 + (\dot{\Omega}\, x - \dot{a}_2) B + \ddot{\Omega} y + \ddot{a}_1, \tag{27}$$

$$X^{(0)}(E_2) = - \Omega E_1 - \alpha E_2 + (\dot{\Omega}\, x + \dot{a}_1) B - \ddot{\Omega} x + \ddot{a}_2. \tag{28}$$

(26)—(28)式就是与二维运动电荷的 Mei 对称性相应的电磁场必须满足的偏微分方程组.从(26)式求得磁感应强度 B,代入(27)和(28)式,可解得电场强度 E_1 和 E_2,且 B, E_1 和 E_2 应满足法拉第电磁感应定律

$$E_{2x} - E_{1y} + B_t = 0. \tag{29}$$

将 B, E_1 和 E_2 代入(16)—(18)式,可解得矢势和标势.

3. 讨 论

一般情况下电磁场满足的偏微分方程组较难求解,但若令 $\alpha = \beta = \Omega = 0$, $a_2 \neq 0$,则偏微分方程组简化为

$$a_1 \frac{\partial B}{\partial x} + a_2 \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \tag{30}$$

$$a_1 \frac{\partial E_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial E_1}{\partial y} = - \dot{a}_2 B + \ddot{a}_1, \tag{31}$$

$$a_1 \frac{\partial E_2}{\partial x} + a_2 \frac{\partial E_2}{\partial y} = \dot{a}_1 B + \ddot{a}_2. \tag{32}$$

由(30)式,可解得

$$B = B\left(x - \frac{a_1}{a_2} y, t\right), \tag{33}$$

将上式分别代入(31)和(32)式,可得

$$E_1 = E_{10} + \frac{\ddot{a}_1}{a_2} y - \frac{\dot{a}_2}{a_2} yB, \tag{34}$$

$$E_2 = E_{20} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} y + \frac{\dot{a}_1}{a_2} yB, \tag{35}$$

其中

$$E_{10} = E_{10}\left(x - \frac{a_1}{a_2} y, t\right),$$

$$E_{20} = E_{20}\left(x - \frac{a_1}{a_2} y, t\right).$$

[1] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[2] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[3] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[4] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[5] Chen P S and Fang J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1044 (in Chinese)[陈培胜、方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[6] Fang J H, Yan X H and Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese)[方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[8] Qiao Y F, Zhao S H and Li R J 2004 *Chin. Phys.* **13** 292

[9] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 331 (in Chinese)[张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[10] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese)[葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[11] Ge W K and Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2105 (in Chinese) [葛伟宽、张 毅 2003 物理学报 **52** 2105]

[12] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[13] Haas F and Goedert J 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 6837

[14] Haas F and Goedert J 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 4661

Mei symmetry for two-dimensional charged particle in motion

Lou Zhi-Mei

(*Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing 312000, China*)

(Received 19 May 2004; revised manuscript received 22 June 2004)

Abstract

The motion of a charged particle in an electromagnetic field is studied by Mei symmetry. Based on the Mei symmetry of two-dimensional particle motion, the generator and the partial differential equations for the electromagnetic field are obtained by comparing the coefficients of all the monomials. A specific example is given in this paper.

Keywords: two-dimensional particle motion, electromagnetic field, Mei symmetry

PACC: 0320