

# 一类耦合非线性振子同步混沌 Hopf 分岔 及其电路仿真\*

马文麒 杨承辉

(北华大学理学院物理系, 吉林 132013)

(2003 年 10 月 17 日收到 2004 年 6 月 17 日收到修改稿)

对于一类同时存在扩散耦合和梯度耦合的非线性振子系统, 通过空间傅里叶变换, 得到具有不同波矢的各运动模式的相互独立的运动方程. 计算各横截模的 Lyapunov 指数, 可在耦合参数平面上确定同步混沌的稳定区域. 在稳定区域边界, 一对共轭横截模式失稳, 导致同步混沌的 Hopf 分岔. 对耦合 Lorenz 振子系统进行了数值模拟, 并设计了耦合 Lorenz 振子系统的电路, 进行耦合振子系统同步混沌 Hopf 分岔的电路仿真实验. 计算和仿真的结果表明, Hopf 分岔的特征频率等于失稳横截模式的振荡频率.

关键词: 耦合非线性振子, 同步混沌, 横截模式, 电路仿真

PACC: 0545

## 1. 引言

许多实际系统, 包括物理学、化学、生物学等领域中的研究对象, 都是由相互作用的非线性单元组成的复杂系统. 耦合非线性振子是这些实际系统的一个很好的模型. 十几年来, 对耦合非线性振子系统同步混沌的研究, 引起了越来越大的兴趣<sup>[1-5]</sup>. 耦合非线性振子系统的混沌同步, 及同步混沌失稳时发生的分岔现象<sup>[6-11]</sup>, 不仅具有重要的理论意义, 而且在混沌保密通讯中具有实际的应用前景<sup>[12]</sup>, 成为非线性科学研究的热点之一.

本文研究一类同时具有扩散耦合和梯度耦合的全同非线性振子组成的系统. 这是空间离散时间连续的非线性系统. 在耦合参数平面上的一定区域, 系统中各振子做稳定的同步混沌运动. 在该区域边界, 系统中的振子失去同步, 并在振子的混沌运动中出现一个特定频率的振荡, 即发生 Hopf 分岔. 文献<sup>[8, 10]</sup>中得到了这类耦合非线性振子系统同步混沌失稳时发生 Hopf 分岔的规律: Hopf 分岔产生的特征频率等于系统的一对碰零的 Lyapunov 指数对应的切矢的旋转频率. 本文进一步给出 Hopf 分岔

的发生机理: 通过线性稳定性分析和空间傅里叶变换, 得到一组相互独立的单一运动模式的动力学方程. 分别计算各运动模式的 Lyapunov 指数谱, 可确定同步混沌稳定区域的边界. 在同步混沌稳定区域的边界上, 一对共轭横截模式将失稳, 导致 Hopf 分岔. 分岔后失稳横截模式的振荡频率出现在系统状态变量的频谱中, 即为 Hopf 分岔的特征频率.

将对耦合 Lorenz 振子系统做具体的数值计算, 并给出耦合 Lorenz 振子系统的仿真电路, 用于模拟耦合非线性振子系统的混沌同步和同步混沌失稳时发生的 Hopf 分岔现象.

## 2. 耦合非线性振子系统

考虑  $N$  个全同的非线性振子, 最近邻振子之间存在扩散耦合和梯度耦合, 采用周期性边界条件, 系统的动力学可用下面的微分方程组表示:

$$\begin{aligned} \dot{h}(j) = & f(h(j)) + (e+r)I(h(j+1) - h(j)) \\ & + (e-r)I(h(j-1) - h(j)), \\ & j = 0, 1, \dots, N-1, \\ & h(N+j) = h(j), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $h(j) \in R^n$  为单个振子的态矢,  $\dot{h}(j) = f(h(j))$

\* 吉林省教育厅科学基金(批准号 2001020)资助的课题.

为单个振子的运动方程,  $e$  和  $r$  分别为扩散耦合和梯度耦合强度系数,  $\Gamma$  为耦合矩阵。(1)式代表实际中广泛存在于非线性单元组成的系统中的反应扩散过程。

在单个振子的运动方程给定以后,耦合振子系统的运动状态由耦合系数  $e$  和  $r$  决定,在  $e$ - $r$  平面上的一定区域,系统中各振子作同步的混沌运动,系统处于状态空间的同步流形,

$$M = h(0) = h(1) = \dots = h(N-1) = h_s, \quad (2)$$

式中  $h_s$  为单个振子的混沌解,即  $\dot{h}_s = f(h_s)$ 。在耦合参数  $e$ - $r$  平面上可以确定同步混沌稳定区域的边界,越过同步混沌稳定区域边界,同步混沌失稳,系统中出现复杂的时空混沌运动。

为研究耦合混沌振子系统同步混沌失稳后的运动,把(1)式在同步流形  $h_s$  附近线性化,令

$$h(j) = h_s + \xi(j), \quad (3)$$

代入(1)式,得

$$\dot{\xi}(j) = Df(h_s)\xi(j) + (e+r)\Gamma(\xi(j+1) - \xi(j)) + (e-r)\Gamma(\xi(j-1) - \xi(j)), \quad (4)$$

式中  $Df(h_s)$  为非线性函数  $f(h)$  在同步流形  $h_s$  上的 Jacobian 矩阵。对上式作空间离散傅里叶变换<sup>[41]</sup>,令

$$\xi(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \exp(-2\pi ijk/N), \quad (5)$$

式中  $\eta_k$  为波矢为  $k$  的运动模式的模矢,为时间的复值函数  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k = N/\lambda$  为波矢,  $\lambda$  为波长,  $k = (\lambda = \infty)$  的运动模式为同步混沌,  $k \neq 0$  描述与同步流形正交的横截运动模式。将(5)式代入(4)式,可得

$$\dot{\eta}_k = \{Df(h_s) - [a(N,k)e + ib(N,k)r]\Gamma\}\eta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

式中  $a(N,k) = 4\sin^2(\pi k/N)$ ,  $b(N,k) = 2\sin(2\pi k/N)$ 。与(1)式不同,(6)式中具有各运动模式的运动微分方程相互独立,可单独求解。波矢为  $k$  和  $N-k$  的运动模式的运动方程共轭,是一对共轭模式。共轭模式具有相同的 Lyapunov 指数和振荡频率。

对微分方程(6)做数值积分,可求出每个横截模式的 Lyapunov 指数谱,包括  $n$  个 Lyapunov 指数。用各横截模式的最大 Lyapunov 指数小于零的条件,确定该模的稳定区域边界,进而确定同步混沌的稳定区域。

在同步混沌的稳定区域边界,一对原被抑制的共轭横截模式失稳,同步混沌发生 Hopf 分岔,失稳

横截模式的振荡频率将出现在系统状态变量的频谱中,即为 Hopf 分岔的特征频率。横截模矢一般做正规转动,适当定义其位相,可计算横截模矢的平均旋转频率<sup>[13,44]</sup>,与系统状态变量的频谱对照,可检验这一推断的正确性。

下面以耦合 Lorenz 振子系统为例,通过数值计算,具体说明耦合非线性振子系统同步混沌 Hopf 分岔的发生机理。

### 3. 耦合 Lorenz 振子同步混沌的失稳和分岔

Lorenz 振子的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \quad (7)$$

参数取值为  $\sigma = 10.0$ ,  $\rho = 28.0$ ,  $\beta = 1.0$ 。振子做混沌振荡。将  $N$  个全同的 Lorenz 振子按(1)式的方式耦合,耦合系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}(j) &= \alpha(y(j) - x(j)), \\ \dot{y}(j) &= \rho x(j) - y(j) - x(j)z(j) + (\epsilon + r)(x(j+1) - x(j)) + (\epsilon - r)(x(j-1) - x(j)), \\ \dot{z}(j) &= x(j)y(j) - \beta z(j). \end{aligned} \quad (8)$$

取  $N = 4$ ,由(6)式可得  $k = 1$  的横截模式的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_x &= \alpha(\eta_y - \eta_x), \\ \dot{\eta}_y &= (\rho - z_s)\eta_x - \eta_y - x_s\eta_z - (2e + 2ir)\eta_x, \\ \dot{\eta}_z &= x_s\eta_y + y_s\eta_x - \beta\eta_z, \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $(x_s, y_s, z_s)$  为同步轨道  $(\eta_x, \eta_y, \eta_z)$  为  $k = 1$  横截模式的分量形式,各分量都为复数。 $k = 3$  模式的运动方程与(9)式共轭。对上式做数值积分,计算横截模式的 Lyapunov 指数谱:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\eta_i(t)|}{|\eta_i(0)|} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

式中  $|\eta| = (\eta^* \eta)^{1/2}$ 。由最大 Lyapunov 指数小于零的条件确定该横截模式的稳定区域,当  $N = 4$  时,即为系统同步混沌的稳定区域。在同步混沌稳定区域边界,  $k = 1$  和  $k = 3$  模式的最大 Lyapunov 指数由负变正,这对横截模式失稳,加入系统的运动,发生 Hopf 分岔,失稳模式的振荡频率出现在系统状态变量的频谱中。

失稳模式的振荡频率可由计算模矢的转动频率得到<sup>[13,14]</sup>. 定义相位角<sup>[15]</sup>

$$\varphi = \arctan[\operatorname{Im}(\eta_x) / \operatorname{Re}(\eta_x)], \quad (11)$$

式中  $\operatorname{Im}(\eta_x)$ ,  $\operatorname{Re}(\eta_x)$  分别为失稳横截模式最大 Lyapunov 指数对应模矢的  $x$  分量的虚部和实部(用模矢的  $y$  分量计算得到的结果相同). 该模式的平均振荡频率为

$$f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi t} \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}. \quad (12)$$

用(8)–(12)式数值计算的结果如图 1 所示, 振子数  $N=4$ , 参数  $\sigma=10.0$ ,  $\rho=28.0$ ,  $\beta=1.0$ . 图 1(a) 为耦合参数  $\epsilon$ - $r$  平面上  $k=1$  和  $k=3$  的共轭横截模式的失稳曲线,  $S$  为稳定的同步混沌区域,  $U$  为不同步区域,  $U$  区中失稳线附近为不同步混沌, 较远处

可能出现周期或准周期运动. 图 1(b) 为  $\epsilon=14.0$ ,  $k=1$  横截模式的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  及该模振荡频率  $f$  随  $r$  的变化. 当  $r=7.945$  时,  $\lambda_{\max}=0$ , 频率为  $f=-2.678$ , 负号表示模矢顺时针旋转. 图 1(c) 为对于失稳线附近  $S$  区域内一点(14.0, 7.93), 系统状态变量  $x(1)$  的功率谱, 为具有典型混沌特征连续谱. 图 1(d) 为在失稳线附近  $U$  区域一点(14.0, 7.95), 系统状态变量  $x(1)$  的功率谱, 在混沌连续谱背景上出现一条频率为  $f=2.67\text{Hz}$  的新谱线, 与用(11)和(12)式数值计算出的  $k=1$  的横截模式的振荡频率准确地相等, 为 Hopf 分岔产生的特征频率.  $k=3$  模式的旋转频率  $f=2.678$ , 与  $k=1$  模式的旋转频率等值反号, 表明  $k=3$  模式的模矢顺时针旋转, 即共轭模矢以相同的频率相对反向旋转.

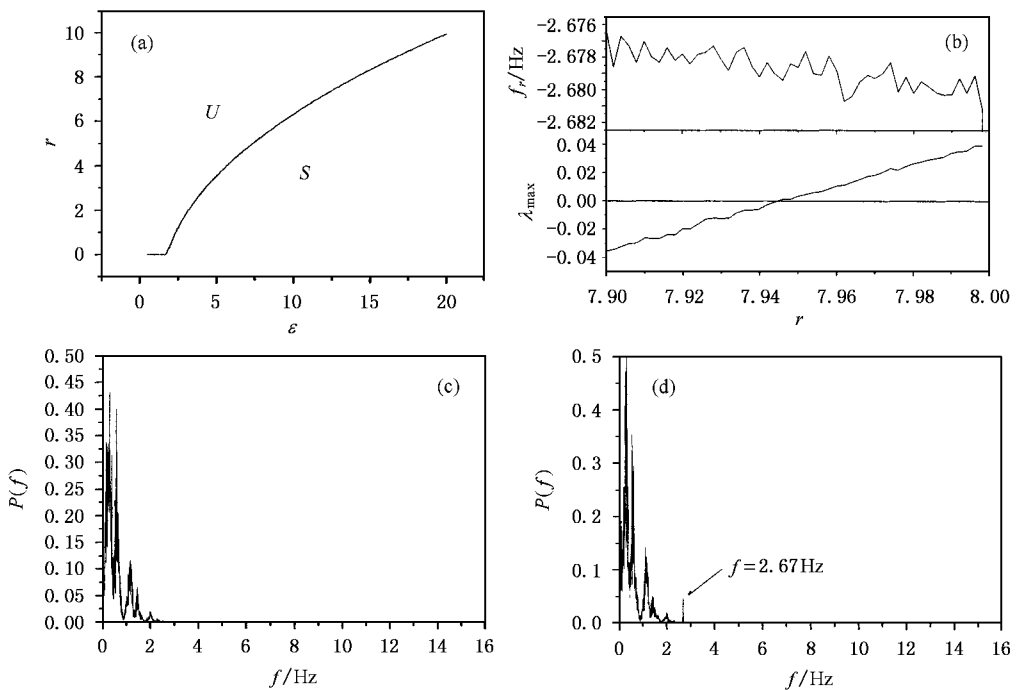


图 1 耦合 Lorenz 振子系统同步混沌稳定性及同步混沌 Hopf 分岔的数值计算结果  $\sigma=10.0$ ,  $\rho=28.0$ ,  $\beta=1.0$ ,  $N=4$ . (a) 为耦合参数  $\epsilon$ - $r$  平面上  $k=1$  横截模式的失稳曲线,  $S$  为稳定的同步混沌区域,  $U$  为不同步区域 (b) 为  $\epsilon=14.0$ ,  $k=1$  横截模式的最大 Lyapunov 指数及该模式旋转频率随  $r$  的变化 (c) 和 (d) 为在失稳线两侧, 系统状态变量  $x(1)$  的功率谱

### 4. 耦合 Lorenz 振子系统 Hopf 分岔的电路仿真

电子电路被广泛用于模拟非线性系统中出现的各种复杂现象<sup>[16–18]</sup>. 为适于电路仿真, 需对 Lorenz

振子的运动方程(9)做一简单的变换<sup>[16]</sup>, 令  $u = x/10$ ,  $v = y/10$ ,  $w = z/20$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha(v - u), \\ \dot{v} &= \rho u - v - 20uw, \\ \dot{w} &= 5uv - \beta w. \end{aligned} \quad (13)$$

仿真电路如图 2 所示, 图中运算放大器  $A_1$ — $A_8$  及

相关电路完成加、减及积分运算,乘法器  $M_1, M_2$  及相关电路做乘法运算. 端子  $u, v, w$  的电压表示运动方程 (13) 中三个变量, 端子  $V_c$  输入耦合信号. 电

阻  $R_5, R_{11}$  和  $R_{18}$  分别由参数  $\sigma, \rho, \beta$  决定. 当参数  $\sigma = 10.0, \beta = 1.0, \rho = 28.0$  时,  $R_5 = 80\text{k}\Omega, R_{11} = 38.6\text{k}\Omega, R_{18} = 11.1\text{k}\Omega$  其他元件值见图 2.

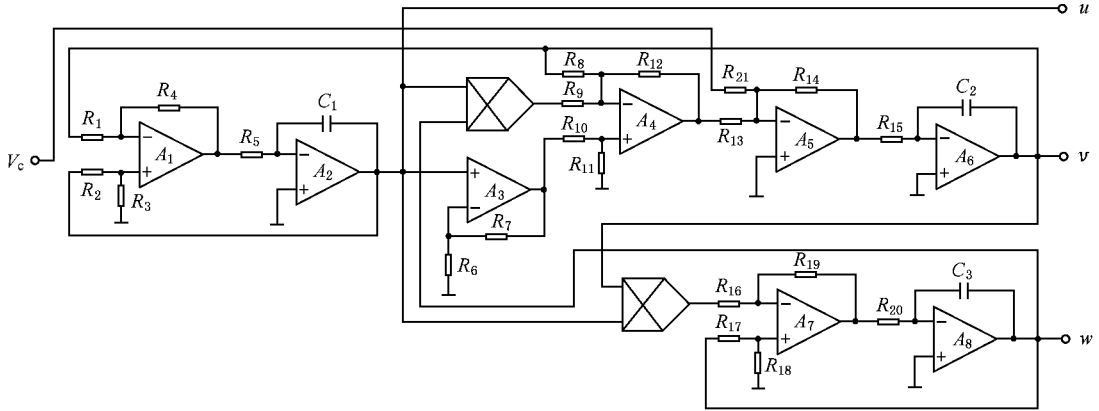


图 2 单个 Lorenz 振子的仿真电路  $A_1$ — $A_8$  为运算放大器,  $M_1$  和  $M_2$  为乘法器,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = R_7 = R_{13} = R_{14} = R_{16} = R_{17} = R_{19} = 100\text{k}\Omega, R_5 = 80\text{k}\Omega, R_8 = 200\text{k}\Omega, R_{10} = 50\text{k}\Omega, R_9 = R_{12} = 10\text{k}\Omega, R_{11} = 38.6\text{k}\Omega, R_{15} = 40\text{k}\Omega, R_{18} = 11.1\text{k}\Omega, R_{20} = 158\text{k}\Omega, C_1 = C_2 = C_3 = 1.25\mu\text{F}, V_c$  端接耦合电路输出端

耦合 Lorenz 振子系统仿真电路的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{u}(j) &= \sigma(u(j) - u(j)), \\ \dot{v}(j) &= \rho u(j) - u(j) - 20u(j)u(j) \\ &\quad + (\epsilon + r)(u(j+1) - u(j)) \\ &\quad + (\epsilon - r)(u(j-1) - u(j)), \\ \dot{w}(j) &= 5u(j)u(j) - \beta u(j), \end{aligned} \quad (14)$$

式中第二个方程中耦合项由图 3 所示电路实现, 电阻  $R_5$  和  $R_6$  的值由耦合系数决定, 其他电阻均为  $100\text{k}\Omega, R_5 = 100(\epsilon + r)\text{k}\Omega, R_6 = 100(\epsilon - r)$

( $\text{k}\Omega$ ) 端子  $C(J)$  输出耦合信号, 接图 2 中单个振子电路  $V_c$  端, 其他端子分别连接第  $J$  振子及与之相邻两振子  $u$  端.

取振子数  $N = 4$ , 则耦合系统的仿真电路如图 4 所示, 图中  $L_1$ — $L_4$  为 4 个相同 Lorenz 振子电路(图 2),  $CP_1$ — $CP_4$  为 4 个耦合电路(图 3), 各振子的初始状态由不同的延时电路设置, 图中未画出.

我们用 EWB5.0 研究了耦合 Lorenz 振子系统同步混沌的稳定性及同步混沌的 Hopf 分岔. 仿真实验中, 耦合电路(图 3)当  $R_5 = 4.60\text{k}\Omega, R_6 = 16.03\text{k}\Omega$  (耦合参数  $\epsilon = 14.0, r = 7.76$ ) 时, 系统做同步混沌振荡. 当  $R_5 = 4.58\text{k}\Omega, R_6 = 16.13\text{k}\Omega$  (耦合参数  $\epsilon = 14.0, r = 7.80$ ) 时, 同步混沌失稳, 发生 Hopf 分岔. 图 5 为示波器显示的振子 1  $u$  端电压  $u(1)$  随时间变化曲线. 图 5(a) 为分岔前的同步混沌振荡. 图 5(b) 为分岔后  $u(1)$  的混沌振荡, 这时各振子已不同步. 图中明显可见分岔产生的频率成分已叠加到系统的混沌振荡上. 图 6(a) 为相邻振子  $u$  端电压差值的利萨如图, 示波器水平输入为  $\Delta u_{12} = u(1) - u(2)$ , 垂直输入为  $\Delta u_{23} = u(2) - u(3)$ . 由于  $\Delta u_{ij}$  中同步成分被消去, 突显出  $k = 1$  失稳横截模式的振荡特征, 近于圆形的利萨如图表明相邻振子的位相差为  $2\pi/N = \pi/2$ , 表明该模式为波长为  $N$  的行波. 图 6(b) 为  $\Delta u_{ij}$  频谱, 频线  $f = 2.74\text{Hz}$ , 为 Hopf 分岔的特征频率, 十分接近理论计算得到的结果.

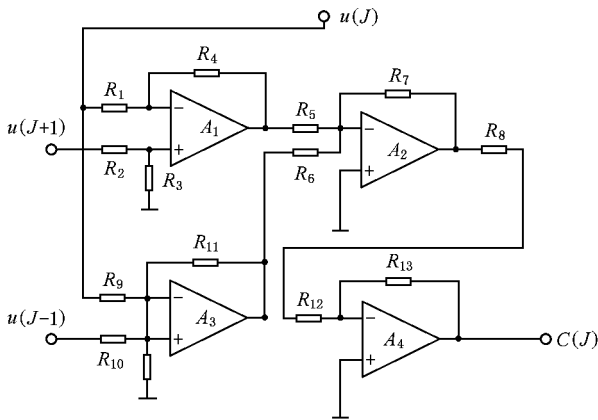


图 3 耦合 Lorenz 系统的耦合电路单元 由 4 个运算放大器和若干电阻组成  $R_5 = 100(\epsilon + r)\text{k}\Omega, R_6 = 100(\epsilon - r)\text{k}\Omega$ , 其他电阻均为  $100\text{k}\Omega, u(J), u(J+1), u(J-1)$  端分别连接本振子和相邻两振子  $u$  端,  $C(J)$  连接本振子  $V_c$  端

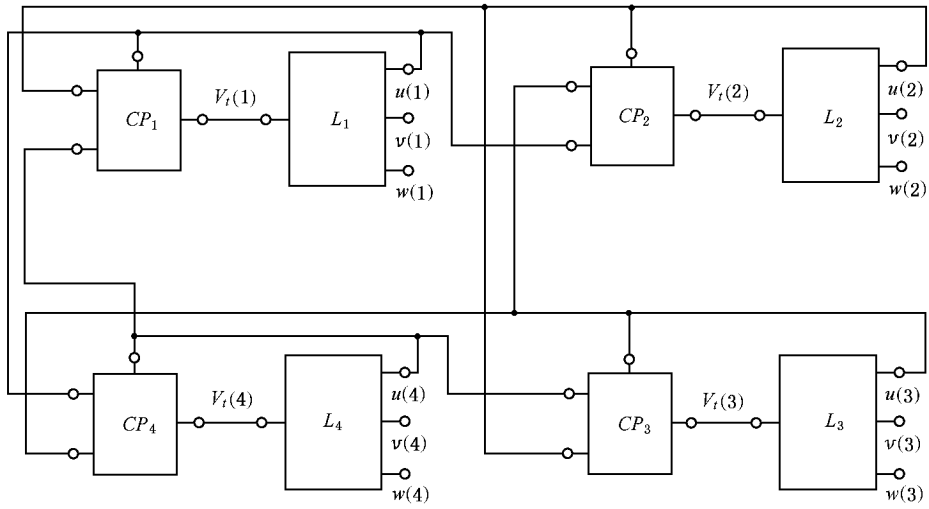
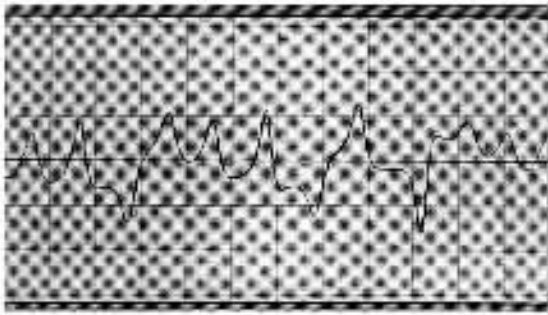
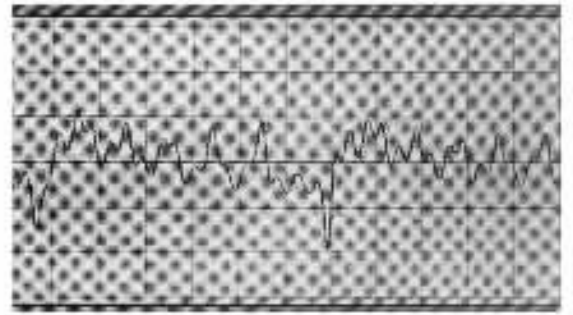


图 4 同时具有扩散耦合和梯度耦合的 Lorenz 振子系统 (17) 式的仿真电路  $L_1—L_4$  为 4 个如图 2 所示的 Lorenz 振子电路,  $CP_1—CP_4$  为 4 个如图 3 所示的耦合电路



(a) 分岔前的同步混沌振荡

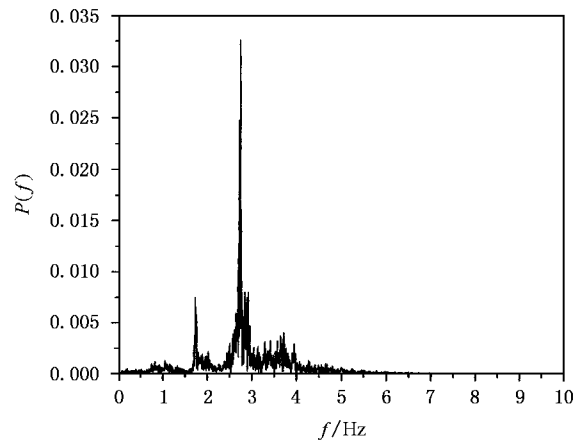


(b) 分岔后  $u(1)$  的混沌振荡

图 5 示波器显示的振子 1u 端电压  $u(1)$  随时间变化曲线



(a) 利萨如图, 示波器水平输入为  $\Delta u_{12} = u(1) - u(2)$ , 垂直输入  $\Delta u_{23} = u(2) - u(3)$



(b)  $\Delta u_{ij}$  频谱, 频线  $f = 2.74\text{Hz}$ , 为 Hopf 分岔的特征频率

图 6 失稳横截模式 ( $k = 1$ ) 的振荡特征

## 5. 结 论

本文研究了一类耦合非线性振子同步混沌 Hopf 分岔的发生机理. 对于同时具有扩散耦合和梯度耦合的非线性振子系统, 通过线性稳定性分析和空间傅里叶变换, 得到具有确定波矢的各运动模式相互独立的运动方程. 由此计算各横截模式(波矢  $k \neq 0$ ) 的 Lyapunov 指数, 根据各横截模式最大 Lyapunov 指数的正负, 可在耦合参数平面上确定该模式的稳定区域的边界, 进而确定同步混沌的稳定

区域. 在同步混沌稳定区域边界, 一对共轭横截模式失稳而加入系统的运动, 各振子失去同步. 系统状态变量的频谱中出现失稳横截模式的振荡频率, 即发生 Hopf 分岔. 失稳横截模式的振荡频率就是 Hopf 分岔的特征频率.

本文用电子电路仿真实验研究了耦合 Lorenz 振子系统的同步混沌的稳定性和系统失稳时发生的 Hopf 分岔, 实验结果与理论分析和数值计算结果很好地符合. 这种仿真电路可以作为耦合非线性振子系统的实际模型, 用于研究时空非线性系统中各种复杂现象.

- 
- [ 1 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Heagy J F, Carroll T L and Pecora L M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3528
- [ 3 ] Lai Y C *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 55
- [ 4 ] Heagy J F, Pecora L M and Carroll T L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4185
- [ 5 ] Pecora L M and Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2019
- [ 6 ] Rosenblum M G, Pikovsky A S and Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [ 7 ] Lai Y C 1998 *Phys. Rev. E* **58** R6911
- [ 8 ] Hu G, Yang J Z, Ma W Q and Xiao J H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5314
- [ 9 ] Matias M A *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 219
- [ 10 ] Ma W Q *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 787 [in Chinese] [ 马文麒等 1999 物理学报 **48** 787 ]
- [ 11 ] Zhang X and Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 (in Chinese) [ 张 旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702 ]
- [ 12 ] Kuang J Y *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [ 匡锦瑜等 2001 物理学报 **50** 1856 ]
- [ 13 ] Zhan M, Hu G and Yang J Z 2000 *Phys. Rev. E* **62** 2963
- [ 14 ] Ma W Q *et al* 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 174
- [ 15 ] Chen Y H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 731 (in Chinese) [ 陈永红等 2002 物理学报 **51** 731 ]
- [ 16 ] Cuomo K M *et al* 1993 *IEEE Trans. CAS* **40** 626
- [ 17 ] Carroll T L and Pecora L M 1992 *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** 659
- [ 18 ] Yue L J, Chen Y Y and Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097 (in Chinese) [ 岳丽娟、陈艳艳、彭建华 2001 物理学报 **50** 2097 ]

# Hopf bifurcation from synchronous chaos and its circuit simulation in a coupled nonlinear oscillator system<sup>\*</sup>

Ma Wen-Qi Yang Cheng-Hui

( *Department of Physics , School of Science , Beihua University , Jilin 132013 , China* )

( Received 17 October 2003 ; revised manuscript received 17 June 2004 )

## Abstract

For a coupled nonlinear oscillator system with diffusion and gradient couplings , spatial Fourier transformation is performed and the dynamic equations of various space modes are derived. By calculating the Lyapunov exponents of the transverse modes , one can determine the stable region of the synchronous chaos on the plane of coupling parameters. On the boundary of the stable region , a couple of conjugate transverse modes destabilize , and a Hopf bifurcation takes place. Numerical simulations are carried out for the coupled Lorenz oscillator system. An electronic circuit is designed for simulating the bifurcation in the system. Results from the simulations show that the frequency created by the Hopf bifurcation is equal to the oscillation frequency of the destabilized transverse modes.

**Keywords** : coupled nonlinear oscillators , synchronous chaos , transverse mode , circuit simulation

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Science Foundation from the Education Bureau of Jilin Province , China( Grant No. 2001020 ).