

厄尔尼诺大气物理机理的变分迭代解法*

莫嘉琪^{1)†} 林万涛²⁾

¹⁾ 安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

²⁾ 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2004 年 5 月 11 日收到, 2004 年 6 月 17 日收到修改稿)

研究了一个厄尔尼诺大气物理机理振荡, 利用变分迭代理论, 简捷地得到了该模型解的近似展开式. 通过与特殊情形下模型的精确解的比较, 得到的一次近似解具有完全符合的精确度.

关键词: 非线性, 变分迭代, 厄尔尼诺现象

PACC: 0545

厄尔尼诺(El Niño)大气物理现象是发生在热带大气和海洋中的异常事件, 是热带大气和海洋运动相互作用的表现. El Niño 大气物理现象是一个复杂的非线性系统, 它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化. 它的气候异常, 带来了许多灾害, 对全球的经济发展和人类生活都带来严重影响. 因此对它的规律和预防的研究, 为当前学术界所关注的问题. 许多学者已经用了不同的方法对它的局部性和整体性的性态作了多方位的研究^[1-12]. Lin 等人在大气物理、海洋气候、动力系统等方面, 利用数值分析等方法研究了相关的问题^[13-17].

非线性问题的理论和方法在学术界的研究中是一个十分热门的课题^[18]. 许多学者做了大量的工作^[19-23], 并解决了许多数学物理问题. Mo 等人也研究了 El Niño 大气物理和一些非线性问题^[24-29].

El Niño 大气物理的振荡性态需要海洋-大气流动正负两种反馈. 这种异常简化为带状 SST 梯度, 因而也与南方涛动流动强度有关, 这导致弱信风沿着赤道行进. 弱信风驱动着海洋流动变化, 加强了 SST 的异常. 正的海洋-大气反馈或耦合海洋-大气的不稳定性导致了赤道太平洋不停变暖.

本文讨论一个典型的 El Niño 海-气模型. 在一定的情况下, 从数学物理理论的角度, 利用数学中的变分迭代方法简捷而有效地得到了相应非线性问题的近似解, 从而可以较直接地讨论某些相关物理量的定量方面的特征.

考虑如下一个 El Niño 时滞海-气模型:

$$\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 - BT^3(t - \delta), \quad (1)$$

其中 T 为东赤道附近太平洋中的异常海表温度距平 SST, A, B, δ 和 ϵ 为正的模型参数, 其物理含义和定义参见文献 [2, 16].

引入泛函 F :

$$F = T + \int_0^t \lambda \left[\frac{dT}{dt} - AT + \epsilon T^3 + BT^3(\tau - \delta) \right] d\tau, \quad (2)$$

其中 \bar{T} 为 T 的限制变量, λ 为 Lagrange 乘子.

计算(2)式的变分 δF :

$$\delta F = \delta T + (\lambda \delta T)|_{\tau=t} - \int_0^t (\lambda' + A\lambda) \delta T d\tau.$$

令 $\delta F = 0$, 于是驻值条件为

$$\frac{d\lambda}{d\tau} + A\lambda = 0, \quad \tau > t, \quad (3)$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=t} = -1. \quad (4)$$

由(3)和(4)式, 得

$$\lambda = -\exp(-A(\tau - t)). \quad (5)$$

再由(2)和(5)式, 构造如下的变分迭代:

$$T_{n+1} = T_n - \int_0^t \exp(-A(\tau - t)) \times \left[\frac{dT_n}{d\tau} - AT_n + \epsilon T_n^3 + BT_n^3(\tau - \delta) \right] d\tau. \quad (6)$$

显然, 若由(6)式决定的函数列 $\{T_n(t)\}$ 收敛, 则 $T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)$ 是方程(1)的解.

* 国家自然科学基金(批准号 90111011 和 10471039)及浙江省自然科学基金(批准号 J102009)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

现在首先选择初始近似 $T_0(t)$, 使得它为满足

$$\frac{dT}{dt} = AT \quad (7)$$

的解. 由(7)式得

$$T_0(t) = C \exp(At), \quad (8)$$

其中 C 为任意常数.

将初始近似解(8)式代入(6)式, 得到方程(1)解的一次近似:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= T_0(t) - \int_0^t \exp(-A(\tau-t)) \\ &\quad \times (\varepsilon T_0^3 + BT_0^3(\tau-\delta)) d\tau \\ &= C \exp(At) - \int_0^t \exp(-A(\tau-t)) \\ &\quad \times [\varepsilon C^3 \exp(3A\tau) + BC^3 \exp(3A(\tau-\delta))] d\tau \\ &= C \exp(At) - \frac{\varepsilon C^3}{2A} (\exp(3At) - \exp(At)) \\ &\quad - \frac{BC^3}{2A} (\exp(3At) - \exp(A(t-3\delta))). \quad (9) \end{aligned}$$

用相同的方法, 可得方程(1)的更高次的近似解.

为了指出上述结果的精度, 我们以一种特殊的情形作如下比较: 考虑对应的非时滞下的 El Niño 海-气模型. 将 $B=0$ 代入(1)式, 得

$$\frac{dT}{dt} = AT - \varepsilon T^3. \quad (10)$$

不难得到(10)式的通解为

$$T(t) = \left[\frac{\varepsilon}{A} + C \exp(-2At) \right]^{-1/2},$$

其中 C 为任意常数. 通解在初始条件 $T(0)$ 下(10)式的精确解为

$$T(t) = \left[\frac{\varepsilon}{A} + \left(\frac{1}{T(0)^2} - \frac{\varepsilon}{A} \right) \exp(-2At) \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

如果再考虑 ε 足够地小, 由(11)式得

$$\begin{aligned} T(t) &= T(0) \exp(At) - \frac{\varepsilon(T(0))^3}{2A} \\ &\quad \times \exp(3At) [1 - \exp(-2At)] + O(\varepsilon^2). \quad (12) \end{aligned}$$

再考虑用变分迭代方法得到的 El Niño 海-气模型(1)式的一次近似解. 在这种情况下, 用 $B=0$ 代入(9)式, 并考虑到 $C=T(0)$, 得

$$\begin{aligned} T_{\text{app}} &= T(0) \exp(At) - \frac{\varepsilon(T(0))^3}{2A} \\ &\quad \times \exp(3At) [1 - \exp(-2At)]. \quad (13) \end{aligned}$$

上式与精确解(12)式比较, 可知用变分迭代方法得到的一次近似解(13)式有较高的近似度.

因此, 由(9)式可以从 El Niño 海-气模型(1)式的状态下, 直接分析东赤道附近太平洋中的异常海面温度距平 SST 的状态.

由(9)式出发, 还能进一步研究东太平洋赤道 SST 异常、温度异常和信风强度异常的定量和定性性态.

- [1] Feng G L et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 [in Chinese] [封国林等 2002 物理学报 **51** 1181]
- [2] Liu S K et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 [in Chinese] [刘式适等 2002 物理学报 **51** 10]
- [3] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 [in Chinese] [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
- [4] Feng G L et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 [in Chinese] [封国林等 2001 物理学报 **50** 606]
- [5] Wang B et al 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
- [6] Guan X P et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 [in Chinese] [关新平等 2003 物理学报 **52** 276]
- [7] Guan X P et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 753 [in Chinese] [关新平等 2002 物理学报 **51** 753]
- [8] Guan X P et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 [in Chinese] [关新平等 2001 物理学报 **50** 1670]
- [9] Hong L and Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 613 [in Chinese] [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [10] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [11] Lu J H and Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [12] Wang C 2001 *Adv. Atmospher. Sci.* **18** 674
- [13] Lin W T et al 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1358
- [14] Lin W T et al 2001 *Acta Air Dynam.* **19** 348 [in Chinese] [林万涛等 2001 空气动力学报 **19** 348]
- [15] Lin W T et al 2002 *Adv. Atmospher. Sci.* **19** 699
- [16] Lin W T et al 2002 *Prog. Natur. Sci.* **12** 102 [in Chinese] [林万涛等 2002 自然科学进展 **12** 102]
- [17] Lin W T and Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **49** supp II 5
- [18] de Jager E M and Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holl)
- [19] Bell D C and Deng B 2003 *Nonlin. Anal. Real World Appl.* **3** 515
- [20] Adams K L et al 2003 *J. Eng. Math.* **45** 197
- [21] Lin F and Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049
- [22] Ruan H Y and Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 [in Chinese] [阮航宇、陈一新 2002 物理学报 **52** 1313]
- [23] Luo S K 2002 *Chin. Phys.* **11** 1097
- [24] Mo J Q 1989 *Sci. China A* **32** 1306
- [25] Mo J Q and Wang H 2002 *Prog. Natur. Sci.* **12** 945
- [26] Mo J Q et al 2003 *Prog. Natur. Sci.* **13** 768
- [27] Mo J Q and Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 [in Chinese] [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

- [28] Mo J Q and Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245(in Chinese) [29] Mo J Q *et al* 2004 *Prog. Natur. Sci.* **14** 550
[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]

A variational iteration method for solving El Niño mechanism of atmospheric physics^{*}

Mo Jia-Qi¹⁾ Lin Wan-Tao²⁾

¹⁾ *Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*

²⁾ *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

(Received 11 May 2004 ; revised manuscript received 17 June 2004)

Abstract

The El Niño atmospheric physics mechanism is studied. Using the variational iteration theory, the approximation of the solution for its model is obtained for short-cut calculation. And compared to the special case for the exact solution of the model, the first approximate solution from the variational iteration method is in excellent agreement with the exact solution in degree of accuracy.

Keywords : nonlinear, variational iteration, El Niño phenomenon

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90111011 and 10471039), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 102009).