第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1457-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.4, April, 2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

# 含速率平方阻力项的一维相对论谐振子的 Lagrange 函数与守恒量

楼智美
(绍兴文理学院物理系，绍兴 312000)
(2004 年 8 月 2 日收到；2004 年 8 月 25 日收到修改稿)

用 Taylor 级数展开的方法得到含速率平方阻力项的一维相对论谐振子的运动微分方程. 从守恒量的性质及运动微分方程出发得到了系统的 Lagrange 函数和守恒量的表达式.

关键词：相对论谐振子，Lagrange 函数，守恒量
PACC：0320

## 1. 引 言

已知力学系统的 Lagrange 函数，可以研究系统的对称性与守恒量[1—6]、系统的稳定性与周期性. 因此，力学系统的 Lagrange 函数在物理学的发展中起到很重要的作用. 保守的力学系统的 Lagrange 函数易求，但非保守的力学系统的 Lagrange 函数却较难求，从力学系统的运动微分方程出发求系统的 Lagrange 函数或 Hamilton 函数是分析力学的一大任务，已引起不少学者的重视[7—12]. 含速率平方阻力项的一维相对论谐振子是一典型的力学系统，本文运用 Taylor 级数展开的方法写出其运动微分方程，从守恒量的性质及运动微分方程出发，得到了一维相对论谐振子的 Lagrange 函数与守恒量的表达式.

## 2. 一维相对论谐振子的运动微分方程

设一维相对论谐振子振动体的静质量为 $m_0$，弹簧的劲度系数为 $k$，振子处在某种介质中，所受阻力与速率的平方成正比，则振子的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-\omega_0^2 x \mp \beta v^2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}, \tag{1b}$$

式中，$\omega_0^2 = \frac{k}{m_0}$ 为系统的经典固有角频率，$\beta$ 为系统的阻尼系数. (1b) 式中，$v > 0$ 时取负号，$v < 0$ 时取正号. 对 (1b) 式进行 Taylor 级数展开，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx (-\omega_0^2 x \mp \beta v^2)(1 - \alpha^2 v^2) = g(x, v), \tag{2}$$

式中

$$\alpha^2 = \frac{3}{2c^2}.$$

## 3. 一维相对论谐振子的 Lagrange 函数与守恒量

设系统存在一守恒量 $I = I(x, v)$，则

$$v\frac{\partial I}{\partial x} + g(x, v)\frac{\partial I}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

设

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial v} = \frac{\partial^2 I}{\partial v \partial x}, \tag{4}$$

对于自治系统，由 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ 得[12]

$$I = v\frac{\partial L}{\partial v} - L. \tag{5}$$

由 (5) 式得

$$\frac{\partial I}{\partial v} = vG, \tag{6}$$

式中

$$G = \frac{\partial^2 L}{\partial^2 v}.$$

将 (6) 式代入 (3) 式得

$$\frac{\partial I}{\partial x} + gG = 0. \tag{7}$$

由(7),(4)式得

$$v\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial(gG)}{\partial v}=0. \tag{8}$$

将(2)式代入(8)式得

$$G(x,v)=\frac{1}{(1-\alpha^2v^2)^2}\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x). \tag{9}$$

则系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L&=\int\mathrm{d}v\int G(x,v)\mathrm{d}v+C_1(x)v+C_2(x)\\&=\frac{v}{4\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha v}{1-\alpha v}\right)\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\\&\quad+C_1(x)v+C_2(x),\end{aligned} \tag{10}$$

式中 $C_1(x)$,$C_2(x)$是关于 $x$ 的任意函数,由于 Lagrange 函数的选择不是唯一的,可令

$$C_1(x)=0.$$

将(10)式代入 Lagrange 方程,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0, \tag{11}$$

可得

$$C_2(x)=\int-\omega_0^2x\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\mathrm{d}x.$$

则系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L&=\frac{v}{4\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha v}{1-\alpha v}\right)\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\\&\quad-\int\omega_0^2x\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{12}$$

将(12)式代入(5)式得守恒量

$$\begin{aligned}I&=\frac{v^2}{2(1-\alpha^2v^2)}\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\\&\quad+\int\omega_0^2x\exp(\alpha^2\omega_0^2x^2\pm2\beta x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{13}$$

由(11)式可进一步求得系统的广义动量和 Hamilton 函数.


[1] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetry and Invariant of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[2] Zhao Y Y, Mei F X 1993 *Adv. Mech.* **23** 360 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1993 力学进展 **23** 360]

[3] Zhang Y, Mei F X 2000 *Acta Math. Phys.* **20** 95 (in Chinese) [张毅、梅凤翔 2000 数学物理学报 **20** 95]

[4] Fang J H, Zhao S Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 445

[5] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[6] Lou Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2046 (in Chinese) [楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[7] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅰ (New York: Springer-Verlag)

[8] Ge W K, Mei F X 2001 *Acta Armamentarii* **22** 241 [葛伟宽、梅凤翔 2001 兵工学报 **22** 241]

[9] López G 1996 *Ann. Phys.* **251** 363, 372

[10] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[11] Willy S 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 2227

[12] Goldstein G 1980 *Classical Mechanics* (Reading: Addison-Wesley)

# Lagrangian function and conserved quantity of one-dimensional relativistic harmonic oscillator containing a quadratic velocity drag force term

Lou Zhi-Mei
(*Department of Physics*, *Shaoxing College of Arts and Sciences*, *Shaoxing* 312000, *China*)
(Received 2 August 2004; revised manuscript received 25 August 2004)

Abstract

In this paper, the differential kinematic equation of one-dimensional relativistic harmonic oscillator containing a quadratic velocity drag force term is obtained by using Taylor series expansion. The expressions of Lagrangian function and conserved quantity are obtained based on the differential kinematic equation and the characteristic of the conserved quantity.

**Keywords**: relativistic harmonic oscillator, Lagrangian function, conserved quantity
**PACC**: 0320