第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1464-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.4,April,2005

相对论性力学系统的 Mei 对称性导致的新守恒律*

张 毅[1)] 葛伟宽[2)]

[1)](苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

[2)](湖州师范学院物理系,湖州 313000)

(2004 年 8 月 20 日收到;2004 年 9 月 16 日收到修改稿)

研究相对论性力学系统的 Mei 对称性和守恒律. 基于动力学函数在无限小变换下的不变性,建立了相对论性力学系统的 Mei 对称性的定义和判据;直接由相对论性力学系统的 Mei 对称性导出了一类新守恒律,给出了 Mei 对称性导致新守恒律的条件和新守恒律的形式,并举例说明结果的应用.

关键词:相对论, 力学系统, Mei 对称性, 守恒律

PACC:0330, 0320

1. 引 言

由动力学系统的对称性来寻找系统的守恒律是数学物理科学,特别是分析力学的一个近代发展方向. 自 1918 年 Noether 揭示出对称性与守恒律之间的潜在关系以来,Noether 对称性理论已取得重大进展[1—6]. 20 世纪 70 年代末发展起来的 Lie 对称性理论也取得了重要进展[5—12]. 近年梅凤翔提出了一种新的不变性[13—18],即约束力学系统运动微分方程中出现的动力学函数在群的无限小变换后仍满足原来方程的不变性,称之为形式不变性或 Mei 对称性[13—25]. Mei 对称性不同于 Noether 对称性,也不同于 Lie 对称性. Mei 对称性仅在一定条件下才导致守恒律,由 Mei 对称性寻找守恒律的途径主要有两条:一是通过 Noether 对称性或 Lie 对称性得到 Noether 守恒律[13];二是通过特殊 Lie 对称性得到 Hojman 守恒律[16—17]. 本文则给出了一类直接由 Mei 对称性导致的新守恒律. 文中研究相对论性力学系统,经典情况可作为其特例. 首先,建立了相对论性力学系统的 Mei 对称性的定义和判据;其次,给出了直接由系统的 Mei 对称性导致新守恒律的条件和新守恒律的形式;最后,举例说明结果的应用.

2. Mei 对称性的定义和判据

设力学系统由 N 个质点组成,系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,则系统的相对论性动力学方程为[25]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

式中 Q_s 为非势广义力,$L=\tilde{T}-V$ 为系统的相对论性 Lagrange 函数,$\tilde{T}$ 为相对论性的广义动能[25]

$$\tilde{T}=m_{0i}c^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\right), \tag{2}$$

式中 m_{0i} 为第 i 个粒子的静止质量,$\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 个粒子的位矢,$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为第 i 个粒子的速度,c 为光速.

引入 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

则(1)式可写为

$$E_s(L)=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

设系统非奇异,则由方程(4)可解出广义加速度,有

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{5}$$

取时间 t 和广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 的无限小单参数变换群

* 江苏省"青蓝"工程基金和江苏省高等学校自然科学基金(批准号:01KJD130002,04KJA130135)资助的课题.

$$t^* = t + \Delta t,$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^* = q_s + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{7}$$
$$(s = 1,2,\cdots,n),$$

式中，ε 为无限小参数，ξ_0，ξ_s 为群的无限小变换的生成元或生成函数.

假设在无限小变换(6)式下，Lagrange 函数 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$成为 $L^* = L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*/\mathrm{d}t^*)$，非势广义力 $Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$成为 $Q_s^* = Q_s(t^*,\boldsymbol{q}^*,\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*/\mathrm{d}t^*)$.

定义　在无限小变换(6)式下，如果系统的动力学函数 L^*，Q_s^* 仍满足原来的方程，即成立

$$E_s(L^*) = Q_s^* \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

则这种不变性称为相对论性力学系统(1)的 Mei 对称性.

将系统的动力学函数 L^*，Q_s^* 展开，有

$$L^* = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(L)] + o(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$Q_s^* = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(Q_s)] + o(\varepsilon^2), \tag{10}$$

式中 $X^{(1)}$是无限小生成元向量 $X^{(0)}$的一次扩展，有

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}, \tag{11}$$

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{12}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \alpha_k\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}. \tag{13}$$

将(9)和(10)式代入(8)式，并利用方程(1)，可得到下述判据.

判据　对相对论性力学系统(1)，如果无限小变换(6)式的生成元满足如下确定方程：

$$E_s(X^{(1)}(L)) = X^{(1)}(Q_s) \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{14}$$

则相应对称性为相对论性力学系统的 Mei 对称性.

3．Mei 对称性导致的新守恒律

相对论性力学系统的 Mei 对称性仅在一定条件下才导致守恒律.由 Mei 对称性寻找守恒律的途径主要有两条：一是通过 Noether 对称性或 Lie 对称性得到 Noether 守恒律[13]；二是通过特殊 Lie 对称性得到 Hojman 守恒律[16,17].下面的定理则提供了一个由相对论性力学系统的 Mei 对称性直接导出守恒律的方法，给出了由 Mei 对称性导致新守恒律的条件和新守恒律的形式.

定理 1　如果无限小变换(6)式是系统的 Mei 对称性变换，且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$X^{(1)}(X^{(1)}(L)) + X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + X^{(1)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0, \tag{15}$$

则相对论性力学系统(1)存在守恒律，形如

$$I_{\mathrm{M}} = X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}} = \mathrm{const}. \tag{16}$$

证

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}} ={}& X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_k}\right.\\&\left. + \alpha_k\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k}\right)\xi_0 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\&+ \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 - \alpha_s\xi_0\right) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}.\end{aligned}$$

由于无限小变换(6)式是系统的 Mei 对称性变换，根据 Mei 对称性的判据有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\right) = \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + X^{(1)}(Q_s).$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}} ={}& X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_k}\right.\\&\left. + \alpha_k\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k}\right)\xi_0 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}\\&+ \left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + X^{(1)}(Q_s)\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\&+ \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 - \alpha_s\xi_0\right)\\={}& X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\xi_s\\&+ \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\\&+ X^{(1)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}\\={}& X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + X^{(1)}(X^{(1)}(L))\end{aligned}$$

$$+X^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}=0.$$

证毕.

显然,定理 1 给出的守恒律(16)式不同于已知的由系统的 Noether 对称性导致的 Noether 守恒律,也不同于由特殊 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒律,它是直接由系统的 Mei 对称性导致的新的守恒律.

定理 2 如果无限小变换(6)式的生成元满足关系

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)=L,\\&X^{(1)}(Q_s)=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{17}$$

则相对论性力学系统(1)的 Mei 对称性结构方程(15)等价于 Noether 等式,系统的 Mei 对称性也是系统的 Noether 对称性,守恒律(16)式归为相对论性力学系统(1)的 Noether 守恒律.

定理 3 如果无限小变换(6)式的生成元满足关系

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)=0,\\&X^{(1)}(Q_s)=0\qquad(s=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{18}$$

则相对论性力学系统(1)的 Mei 对称性守恒律(16)式是平凡的,即 $I_{\mathrm{M}}=0$.

定理 4 如果无限小变换(6)式相应于系统的 Mei 对称性,且生成元 ξ_0,ξ_s 满足关系

$$\xi_s=\dot{q}_s\xi_0\qquad(s=1,2,\cdots,n),\tag{19}$$

则相对论性力学系统(1)的 Mei 对称性守恒律(16)式是平凡的,即 $I_{\mathrm{M}}=0$.

证 设生成元 ξ_0,ξ_s 满足关系式(19),容易验证

$$X^{(1)}(X^{(1)}(L))=\xi_0\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}X^{(1)}(L).\tag{20}$$

由(15),(16)和(20)式,定理得证.

本文结果具有普遍意义,对相对论性情况和经典情况都适用.当 $|\dot{\boldsymbol{r}}_i|\ll c$ 时,将(2)式展开,取 $\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}$ 幂级数展开式的前两项,则相对论性的广义动能 $\tilde{T}$ 化为经典动能 $T=\frac{1}{2}m_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ [25],本文结果化为经典情况下的结果.

4. 算 例

例 设一平行板电容器的均匀电场强度为 E(单位:V·m^{-1}),沿 x 轴正向,在电容器中有一初速度为零,带有电荷 q 的粒子在运动[26].试研究该系统的 Mei 对称性和守恒律.

取粒子的位置 x 为广义坐标,即 $q_1=x$,则相对论性的广义动能为

$$\tilde{T}=m_0c^2(1-\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}),\tag{21}$$

势能为

$$V=E_p=-qEq_1,\tag{22}$$

相对论性 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L&=\tilde{T}-V\\&=m_0c^2(1-\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2})+qEq_1,\end{aligned}\tag{23}$$

非势广义力为

$$Q_1=0.\tag{24}$$

系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{m_0\ddot{q}_1}{(1-\dot{q}_1^2/c^2)^{3/2}}-qE=0.\tag{25}$$

系统的 Mei 对称性确定方程(14)为

$$E_1(X^{(1)}(L))=0,\tag{26}$$

其中

$$X^{(1)}(L)=qE\xi_1+\frac{m_0\dot{q}_1}{\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1-\dot{q}_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right).\tag{27}$$

方程(26)有解

$$\begin{aligned}&\xi_0=-t,\\&\xi_1=q_1-\frac{m_0c^2}{qE\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}};\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\xi_0=\ln\dot{q}_1,\\&\xi_1=\dot{q}_1.\end{aligned}\tag{29}$$

与无限小生成元(28)和(29)式相应的变换都是系统的 Mei 对称性变换.对应于生成元(28)式,由结构方程(15)得到规范函数 $G_{\mathrm{M}}=0$,由定理 1,可得到如下守恒量:

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}}=&\frac{m_0\dot{q}_1}{\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}}\left(q_1-\frac{m_0c^2}{qE\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}}\right)\\&-qEq_1t+\frac{m_0c^2t}{\sqrt{1-\dot{q}_1^2/c^2}}=\mathrm{const}.\end{aligned}\tag{30}$$

对应于生成元(29)式,由结构方程(15)得到规范函数

$$G_{\mathrm{M}}=-qE\dot{q}_1.\tag{31}$$

将生成元(29)式和规范函数(31)式代入(16)式,得到的守恒量是平凡的,即有 $I_{\mathrm{M}}=0$.

[1] Noether A E 1918 *Invariante Variationsprobleme Nachr Akad Wiss Göttingen Math. Phys.* K Ⅰ，Ⅱ **235**

[2] Djukić D S，Vujanović B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[3] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[4] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[5] Zhao Y Y，Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京 科学出版社)]

[6] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[7] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[8] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[9] Mei F X 2000 *Acta Mechanica* **141** 135

[10] Zhang Y，Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[11] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[12] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[13] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Techn.* **9** 120

[14] Wang S Y，Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[15] Mei F X 2002 *J. Beijing Inst. Techn.* **22** 133 (in Chinese) [梅凤翔 2002 北京理工大学学报 **22** 133]

[16] Mei F X 2003 *J. Beijing Inst. Techn.* **23** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 1]

[17] Wang S Y，Shang M，Mei F X 2003 *J. Beijing Inst. Techn.* **23** 271 (in Chinese) [王树勇、尚 玫、梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 271]

[18] Zhang Y，Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[19] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[20] Fang J H，Yan X H，Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[21] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 269

[22] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[23] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 331 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[24] Fang J H 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 349

[25] Luo S K 1987 *Teach. Mater. Commun.* **5** 31 (in Chinese) [罗绍凯 1987 教材通讯 **5** 31]

[26] Wang Z F 2003 *Analytical Mechanics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [王振发 2003 分析力学(北京 科学出版社)]

A new conservation law from Mei symmetry for the relativistic mechanical system*

Zhang Yi

(*Department of Civil Engineering*，*University of Science and Technology of Suzhou*，*Suzhou* 215011，*China*)

Ge Wei-Kuan

(*Department of Physics*，*Huzhou Teachers College*，*Huzhou* 313000，*China*)

(Received 20 August 2004; revised manuscript received 16 September 2004)

Abstract

This paper studies the Mei symmetry and conservation law of the relativistic mechanical system. The definition and criterion of Mei symmetry for the relativistic mechanical system are established，which are based upon the invariance of dynamical functions under infinitesimal transformations. A new conservation law is deduced directly from the Mei symmetry of the system，and the condition under which a Mei symmetry can lead to a new conservation law is obtained and the form of the conservation law is presented. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: relativity，mechanical system，Mei symmetry，conservation law

PACC: 0330，0320

* Project supported by the "Qing Lan" Program Foundation of Jiangsu Province and the Natural Science Foundation of Higher Education of Jiangsu Province，China (Grant Nos. 01KJD130002，04KJA130135).