第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1485-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.4,April,2005

推广的多分量费米型量子可导非线性 Schrödinger 模型的可积性*

田晓东 岳瑞宏
(西北大学现代物理研究所,西安 710069)
(2004 年 7 月 5 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

导出了推广的多分量费米型量子可导非线性 Schrödinger 模型的哈密顿量. 利用代数 Bethe ansatz 方法,找到了此模型的量子 monodromy 矩阵所满足的量子 Yang-Baxter 方程,并证明了其可积性.

关键词:可导非线性 Schrödinger 模型,量子 Yang-Baxter 方程,代数 Bethe ansatz 方法
PACC:0370,0200,0547

1. 引 言

自 20 世纪 60 年代以来,可积性问题的研究已经成为理论物理和数学物理领域中非常活跃的研究课题之一. 量子反散射方法(代数 Bethe ansatz 方法)作为一种普适而有效的方法已被广泛应用于研究低维量子可积模型. 许多文章利用此方法研究了非线性 Schrödinger (NLS)模型的一些情况:自旋$\frac{1}{2}$粒子的 NLS 模型[1]、玻色子的 NLS 模型[2]、推广的超矩阵 NLS 模型[3]以及玻色子的可导 NLS(DNLS)模型[4,5]. 本文将给出推广的费米子的量子 DNLS 模型,并证明其可积性. NLS 模型的哈密顿量含有动能项和相互作用项,相互作用项为粒子数的平方型. 而 DNLS 模型与通常的 NLS 模型的差别在于相互作用项的不同. 对前者而言,相互作用不仅依赖粒子数,而且依赖于粒子数的坐标导数项. 此模型的具体运动方程为

$$\mathrm{i}u_{kt} = u_{kxx} + 2\sum_{i\neq k=1}^{n} u_i^{\dagger}u_iu_k - 2\mathrm{i}g\sum_{i\neq k=1}^{n} u_i^{\dagger}\partial_x(u_iu_k) - 3g^2\sum_{i\neq k=1}^{n}\sum_{j\neq i\neq k=1}^{n} u_i^{\dagger}u_j^{\dagger}u_iu_ju_k, \tag{1}$$

式中,g 为耦合常数,常算子 $u_i(x,t)$,$u_i^{\dagger}(y,t)$满足反对易关系

$$[u_i(x,t),u_j(y,t)]_+ = [u_i^{\dagger}(x,t),u_j^{\dagger}(y,t)]_+ = 0, \tag{2}$$

$$[u_i(x,t),u_j^{\dagger}(y,t)]_+ = \delta(x-y)\delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

2. 系统的可积性

对一个非线性系统而言,其可积性依赖于能否找到一对 Lax 算子. 上述的运动方程为坐标的二次微分方程,因此,我们试图找到一对一阶的微分方程组——Lax 对. 使得该方程组的自洽性条件给出所要求的运动方程. 一般地,我们假设此模型的 Lax 算子具有如下形式:

$$U_q(x,\lambda) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} f_1\rho_1(x)+\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_1(x) \\ 0 & f_2\rho_2(x)+\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 & u_2(x) \\ & 0 & & & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_n\rho_n(x)+\frac{\lambda}{2} & u_n(x) \\ u_1^{\dagger}(x) & u_2^{\dagger}(x) & \cdots & \cdots & u_n^{\dagger}(x) & -g\rho(x)-\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:90103001)资助的课题.

式中，$\rho_j = u_j^\dagger u_j$，$\rho = \sum_{j=1}^{n} u_j^\dagger u_j$，$\lambda$ 为谱参量，f_j 为待定的参数.

定义有限间隔的 monodromy 矩阵为

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :P\exp\left(\int_{x_1}^{x_2} U_q(x,\lambda)\mathrm{d}x\right):, \tag{5}$$

式中，“ : : ”代表算子正规序，P 代表顺序积分. 显然矩阵(5)式满足微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x_2} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :U_q(x_2,\lambda) T_{x_1}^{x_2}(\lambda):. \tag{6}$$

令

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = (1 + V(x_2,\lambda))\exp(Z(x_2,x_1;\lambda)) \times (1 + V(x_1,\lambda))^{-1}, \tag{7}$$

式中，Z 和 V 具有如下的结构：

$$Z = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Z_{n+1n+1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & V_{1n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & V_{2n+1} \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & V_{nn+1} \\ V_{n+11}^\dagger & V_{n+12}^\dagger & \cdots & \cdots & V_{n+1n}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

矩阵中 $*$ 代表在下面的讨论中不需要明显写出的表示式.

同样地，让

$$U_q(x,\lambda) = U_d(x) + U_{nd}(x).$$

这里 $U_d(x)$，$U_{nd}(x)$ 分别表示形如 Z，V 的分块对角和非对角矩阵. 于是方程(7)可分解为以下两式：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_2} = :U_{nd} + [U_d, V] - VU_{nd}V:, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x_2} = :U_d + U_{nd}V:. \tag{11}$$

对(10)，(11)两式取分量，则有

$$\frac{\mathrm{d}V_{jn+1}}{\mathrm{d}x} = :(U_{nd})_{jn+1} + \sum_{i=1}^{n+1}[(U_d)_{ji}V_{in+1} - V_{ji}(U_d)_{in+1}] : - :\sum_{i,k=1}^{n+1} V_{ji}(U_{nd})_{ik}V_{kn+1}:, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_{n+1n+1}}{\mathrm{d}x} = :(U_d)_{n+1n+1} + \sum_{i=1}^{n+1}(U_{nd})_{n+1i}V_{in+1}:. \tag{13}$$

利用展开式

$$V_{jn+1}(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(V_{jn+1})_n}{\lambda^n},$$

由方程(12)可得 $(V_{jn+1})_n$ 的前几项，

$$(V_{jn+1})_1 = -u_j, \tag{14}$$

$$(V_{jn+1})_2 = \mathrm{i}\partial_x u_j + g\sum_{k\neq j=1}^{n} u_k^\dagger u_k u_j, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(V_{jn+1})_3 = {} & u_{jxx} - \mathrm{i}g\sum_{k\neq j=1}^{n}\partial_x(u_k^\dagger u_k u_j) \\ & - \mathrm{i}f_j u_j^\dagger u_j u_{jx} - \mathrm{i}g\sum_{k=1}^{n} u_k^\dagger u_k u_{jx} + \sum_{i\neq j=1}^{n} u_i^\dagger u_i u_j \\ & + g^2\sum_{k\neq j=1}^{n}\sum_{\substack{m\neq k=1\\ m\neq j=1}}^{n} u_k^\dagger u_m^\dagger u_k u_m u_j.\end{aligned} \tag{16}$$

而方程(13)又可写成

$$Z_{n+1n+1} = Z_{-1} + Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n}{\lambda^n}, \tag{17}$$

式中

$$Z_{-1} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}\int_{-L}^{+L}\mathrm{d}x,$$

$$Z_0 = -\mathrm{i}g\int_{-L}^{+L}\rho(x)\mathrm{d}x,$$

$$Z_n = :\sum_{j=1}^{n}\int_{-L}^{+L}\mathrm{i}u_j^\dagger(V_{jn+1})_n\mathrm{d}x:.$$

这样，我们就获得了 $T_{-L}^{+L}(\lambda)$ 的各分量的展开式，其中 Z_{-1} 是正比于一维体积的量，当 $L\to\infty$ 时，$Z_{-1}\to\infty$. 但在下面无限区间的 monodromy 矩阵的定义中该振荡因子将被 $e(x,\lambda)$ 所抵消. 至此我们就获得了 $T(\lambda)$ 的各分量的展开式. Z_n 前几项为

$$Z_1 = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\mathrm{d}x,$$

$$Z_2 = :-\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}u_j^\dagger u_{jx}\mathrm{d}x + \mathrm{i}g\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}u_j^\dagger u_k^\dagger u_k u_j\mathrm{d}x:,$$

$$\begin{aligned}Z_3 = {} & \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}:\Big[\mathrm{i}u_j^\dagger u_{jxx} + \mathrm{i}\sum_{i\neq j}^{n}\rho_j\rho_i + g\sum_{k\neq j=1}^{n}\rho_j\partial_x\rho_k \\ & + 2g\sum_{k\neq j=1}^{n}u_j^\dagger u_{jx}\rho_k - \mathrm{i}g^2\sum_{k\neq j=1}^{n}\sum_{\substack{m\neq k=1\\ m\neq j=1}}^{n}\rho_j\rho_k\rho_m\Big]:\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由上述 monodromy 矩阵对普参数的展开，我们可以明显地构造系统的哈密顿量及其他的几个物理量，如粒子数 $\mathrm{i}Z_1$，动量 $\mathrm{i}\hbar Z_2$(精确到一个常数). 可以证明如此构造的算子如 $\mathrm{i}Z_1$，$\mathrm{i}\hbar Z_2$ 都可与 Z_3 交换. 这提示我们系统是否存在其他的守恒流，对这样一个无穷自由度的系统而言，无穷多的守恒流将意味着系统是可解的. 这是本文的重点.

如果我们定义体系哈密顿量 $H=-\mathrm{i}Z_3$，从反对易关系(2)，(3)式和演化方程 $\mathrm{i}u_{kt}=[u_k,H]$，容易得出运动方程(1). 所以体系哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} :\Big[& u_j^{\dagger}u_{jxx}+\sum_{i\neq j}^{n}\rho_j\rho_i \\
& -\mathrm{i}g\sum_{k\neq j}^{n}\rho_j\partial_x\rho_k-2\mathrm{i}g\sum_{k\neq j}^{n}u_j^{\dagger}u_{jx}\rho_k \\
& -g^2\sum_{k\neq j}^{n}\sum_{\substack{m\neq k\\ m\neq j}}^{n}\rho_j\rho_k\rho_m\Big]:\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

式中求和均从 1 开始.

3. 有限间隔的 QYBE

引入符号　[6]，其运算规则满足

$$X\,uu^{\dagger}\,Y\quad=u^{\dagger}XYu,$$

其中 X 和 Y 可以是 monodromy 矩阵(5)式的元素. 可以证明(见附录)两个 monodromy 矩阵的直积满足微分方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\mu)\right) \\
&=\quad \mathscr{L}(x_2;\lambda,\mu)\,T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\mu)\quad,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(x;\lambda,\mu) &= U_q(x,\lambda)\underset{s}{\otimes}I+I\underset{s}{\otimes}U_q(x,\mu) \\
&\quad +\mathscr{L}_{\Delta}(x;\lambda,\mu).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

这里，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\Delta}(x;\lambda,\mu) = -\sum_{j=1}^{n}\ &\{[u_j^{\dagger}(x)(f_je_{jj}-ge_{n+1n+1})+e_{jn+1}] \\
&\underset{s}{\otimes}[(f_je_{jj}-ge_{n+1n+1})u_j(x)+e_{n+1j}]\},
\end{aligned}
$$

其中，e_{ij} 定义为 $(e_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$ 的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵，$\underset{s}{\otimes}$ 代表 Grassman 代数中的直积，且宇称算子 $p(i)=0(1\leqslant i\leqslant n)$，$p(n+1)=1$.

引入一个 $(n+1)^2\times(n+1)^2$ 矩阵，

$$
R(\lambda,\mu)=\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}e_{ii}\otimes e_{jj}+\sum_{i\neq j=1}^{n+1}b_{ij}e_{ij}\otimes e_{ji},
\tag{21}
$$

式中 $a_{ij}=1$. 当 $i,j=1,2,\cdots,n+1$ 且 $i\neq j$ 时，$b_{ij}=\mathrm{i}(\lambda-\mu)$. 当 $i=1,2,\cdots,n$ 时，$a_{ii}=1-\mathrm{i}(\lambda-\mu)$.

$$a_{n+1n+1}=1+\mathrm{i}(\lambda-\mu).$$

容易验证，当 $U_q(x,\lambda)$ 中的待定参数取值为 $f_j=2\mathrm{i}$，$g=-2\mathrm{i}$ 时，$R(\lambda,\mu)$ 和 $\mathscr{L}(x;\lambda,\mu)$ 满足

$$
R(\lambda,\mu)\mathscr{L}(x;\lambda,\mu)=\mathscr{L}(x;\mu,\lambda)R(\lambda,\mu).
\tag{22}
$$

由方程(19)和(22)，我们发现 DNLS 模型的 monodromy 矩阵(5)式满足 QYBE[7]

$$
\begin{aligned}
&R(\lambda,\mu)\,T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\mu) \\
&=T_{x_1}^{x_2}(\mu)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\lambda)R(\lambda,\mu).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

4. 无限间隔的 QYBE 和系统的可积性

定义

$$
T(\lambda)=\lim_{\substack{x_1\to-\infty\\ x_2\to+\infty}}e(-x_2,\lambda)\,T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,e(x_1,\lambda).
\tag{24}
$$

这里 $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ 形如(5)式，

$$e(x,\lambda)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda Mx\right),$$

$$M=\sum_{i=1}^{n}e_{ii}-e_{n+1n+1}.$$

为找出 $T(\lambda)$ 矩阵元之间的对易关系，我们必须消去由直积 $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\mu)\to\pm\infty$ 时所产生的振荡项. 为此，把 $\mathscr{L}(x;\lambda,\mu)$ 分为两部分，

$$
\mathscr{L}(x;\lambda,\mu)=\mathscr{L}_0(\lambda,\mu)+\mathscr{L}_1(x;\lambda,\mu),
\tag{25}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_0(\lambda,\mu) &= \lim_{|x|\to\infty}\mathscr{L}(x;\lambda,\mu) \\
&=\frac{\mathrm{i}}{2}(\lambda+\mu)\sum_{i,j=1}^{n}e_{ii}\otimes e_{jj} \\
&\quad+\frac{\mathrm{i}}{2}(\lambda-\mu)\sum_{i=1}^{n}e_{ii}\otimes e_{n+1n+1} \\
&\quad-\frac{\mathrm{i}}{2}(\lambda-\mu)\sum_{j=1}^{n}e_{n+1n+1}\otimes e_{jj} \\
&\quad-\frac{\mathrm{i}}{2}(\lambda+\mu)e_{n+1n+1}\otimes e_{n+1n+1} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}e_{jn+1}\otimes e_{n+1j}.
\end{aligned}
$$

$\mathscr{L}_1(x;\lambda,\mu)$ 是依赖于场的部分，当 $x\to\pm\infty$ 时，$\mathscr{L}_1(x;\lambda,\mu)$ 为零.

于是利用(22)式可得

$$
R(\lambda,\mu)\varepsilon(x;\lambda,\mu)=\varepsilon(x;\mu,\lambda)R(\lambda,\mu),
\tag{26}
$$

式中 $\varepsilon(x;\lambda,\mu)=\exp(\mathscr{L}_0(\lambda,\mu)x)$. 利用(25)式可以求出微分方程(19)的积分形式

$$
\begin{aligned}
&T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x_2}(\mu) \\
&=\varepsilon(x_2-x_1;\lambda,\mu)+\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\,\varepsilon(x_2-x;\lambda,\mu) \\
&\quad\times\quad\mathscr{L}_1(x;\lambda,\mu)\,T_{x_1}^{x}(\lambda)\underset{s}{\otimes}T_{x_1}^{x}(\mu)\quad.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

(27)式等号右端第二项当 $x_1, x_2 \to \pm\infty$ 时为零. 因此,在这种极限情况下,

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) \underset{s}{\otimes} T_{x_1}^{x_2}(\mu) \to \varepsilon(x_2 - x_1; \lambda, \mu),$$

这便是振荡项. 为去掉这一项,我们定义

$$W(\lambda,\mu) = \lim_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} \varepsilon(-x_2; \lambda,\mu) T_{x_1}^{x_2}(\lambda) \underset{s}{\otimes} T_{x_1}^{x_2}(\mu) \varepsilon(x_1; \lambda,\mu). \tag{28}$$

由(23)和(26)式,可得 $W(\lambda,\mu)$ 满足方程

$$R(\lambda,\mu) W(\lambda,\mu) = W(\mu,\lambda) R(\lambda,\mu). \tag{29}$$

此方程代表在无限间隔极限下的 QYBE.

下面我们设法将(29)式由两个 monodromy 矩阵的直积形式表示. 将 $W(\lambda,\mu)$ 改写成

$$W(\lambda,\mu) = C_+(\lambda,\mu) T(\lambda) \underset{s}{\otimes} T(\mu) C_-(\lambda,\mu). \tag{30}$$

这里,

$$C_+(\lambda,\mu) = \lim_{x\to\infty} \varepsilon(-x; \lambda,\mu) E(x; \lambda,\mu), \tag{31}$$

$$C_-(\lambda,\mu) = \lim_{x\to-\infty} E(-x; \lambda,\mu) \varepsilon(x; \lambda,\mu), \tag{32}$$

式中

$$E(x; \lambda,\mu) = e(x,\lambda) \underset{s}{\otimes} e(x,\mu).$$

将 $E(x; \lambda,\mu)$ 和 $\varepsilon(x; \lambda,\mu)$ 的具体形式代入(31),(32)式并利用主值积分

$$\lim_{x\to\pm\infty} P\left(\frac{\exp(\mathrm{i}kx)}{k}\right) = \pm \mathrm{i}\pi\delta(k),$$

可以得到

$$C_+(\lambda,\mu) = I + \rho_+ \sum_{i=1}^{n} e_{jn+1} \otimes e_{n+1j}, \tag{33}$$

$$C_-(\lambda,\mu) = I + \rho_- \sum_{i=1}^{n} e_{jn+1} \otimes e_{n+1j}, \tag{34}$$

式中 I 为 $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ 单位矩阵,

$$\rho_\pm = \pm \frac{\mathrm{i}}{\lambda - \mu} - \pi\delta(\lambda - \mu) = \pm \frac{\mathrm{i}}{\lambda - \mu \mp \mathrm{i}\epsilon}.$$

通过方程(30),我们可将无限间隔情况下的 QYBE (29)式重新写成

$$R(\lambda,\mu) C_+(\lambda,\mu) T(\lambda) \underset{s}{\otimes} T(\mu) C_-(\lambda,\mu) = C_+(\mu,\lambda) T(\mu) \underset{s}{\otimes} T(\lambda) C_-(\mu,\lambda) R(\lambda,\mu). \tag{35}$$

通过对比此方程两边的矩阵元,我们可以得出量子 monodromy 矩阵的矩阵元之间所有可能的代数关系. 由对易关系 $[A_{n+1n+1}(\lambda), A_{n+1n+1}(\mu)] = 0$ ($A_{ij}(\lambda)$ 表示 $T(\lambda)$ 的第 i 行第 j 列的矩阵元)以及方程(7)可知,当 $x_1, x_2 \to \infty$ 时 $V \to 0$,

$$Z_{n+1n+1} = \ln A_{n+1n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{\lambda^n},$$

因此对所有 n, m 有

$$[Z_n, Z_m] = 0.$$

这样我们就找到了系统的无穷多的守恒流,由此证明此模型是量子可积的.

5. 结 论

由以上讨论可以看出:推广的多分量费米型 DNLS 模型,存在一个推广的 Lax 对表述形式,由其定义的 monodromy 矩阵无论是在有限间隔还是无限间隔情况下都可导出 QYBE,从而说明此模型是量子可积的. 而且,由量子 Yang-Baxter 关系可以给出 monodromy 矩阵的所有矩阵元所满足的代数关系,由这些代数关系可以准确求解系统的本征值和本征函数.

附录 微分方程(19)的证明

利用扩展方法[6],

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda) \underset{s}{\otimes} T_{x_1}^{x_2}(\mu)\right) = \left[U_q(x_2+\epsilon,\lambda) \underset{s}{\otimes} I + I \underset{s}{\otimes} U_q(x_2,\mu)\right] T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda) \underset{s}{\otimes} T_{x_1}^{x_2}(\mu) + K_+ + K_-, \tag{A1}$$

式中

$$K_+ = \sum_{j=1}^{n} \{[T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda), u_j^\dagger(x_2)]_\pm \underset{s}{\otimes} \mathrm{i}(f_j e_{jj} - g e_{n+1n+1}) \tilde{T}_{x_1}^{x_2}(\mu) u_j(x_2) + [T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda), u_j^\dagger(x_2)]_\pm \underset{s}{\otimes} \mathrm{i} e_{n+1j} T_{x_1}^{x_2}(\mu)\}, \tag{A2}$$

$$K_- = \sum_{j=1}^{n} \{(f_j e_{jj} - g e_{n+1n+1}) u_j^\dagger(x_2+\epsilon) \tilde{T}_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda) \underset{s}{\otimes} [u_j(x_2+\epsilon), T_{x_1}^{x_2}(\mu)]_\pm + \mathrm{i} e_{jn+1} \tilde{T}_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda) \underset{s}{\otimes} [u_j(x_2+\epsilon), T_{x_1}^{x_2}(\mu)]_\pm\}. \tag{A3}$$

给矩阵 $T_{x_1}^{x_2}$ 的费米子矩阵元前加一负号,构成的新矩阵即为 $\tilde{T}_{x_1}^{x_2}$.

若 $\epsilon > 0$,则有

$$[u_j(x_2+\epsilon), T_{x_1}^{x_2}(\mu)]_\pm = 0,$$

因此

$$K_- = 0.$$

为求出 K_+,我们引入变换 Ω,

$$[T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda), u_j^\dagger(x_2)]_\pm = \mathrm{i}:\Omega\{T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(q;\lambda), u_j^*(x)\}_{PB}:, \tag{A4}$$

式中

$$T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(q;\lambda) = :P\exp\left(\int_{x_1}^{x_2+\epsilon} U_q(x,\lambda)\mathrm{d}x\right):,$$

$$U_q(x,\lambda) = \Omega^{-1}U_q(x,\lambda).$$

利用基本泊松关系

$$\{u_i(x,t),u_j^*(x',t)\}_{PB} = -\mathrm{i}\delta_{ij}\delta(x-x'),$$

$$\{u_i^*(x,t),u_j^*(x',t)\}_{PB} = \{u_i(x,t),u_j(x',t)\}_{PB} = 0$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n),$$

可得

$$\{T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(q;\lambda),u_j^*(x_2)\}_{PB}$$

$$= T_{x_2}^{x_2+\epsilon}(q;\lambda)[(f_je_{jj}-ge_{n+1n+1})u_j^*(x_2)+e_{jn+1}]T_{x_1}^{x_2}(q;\lambda).$$

对上式取极限 $\epsilon\to 0$，并由(A4)式可得

$$\lim_{\epsilon\to 0}[T_{x_1}^{x_2+\epsilon}(\lambda),u_j^\dagger(x_2)]_\pm$$

$$= [u_j^\dagger(x_2)(f_je_{jj}-ge_{n+1n+1}+e_{jn+1})]T_{x_1}^{x_2}(\lambda). \tag{A5}$$

再对(A1)式取极限，利用(A5)式，最终可得微分方程(19).

若 $\epsilon<0$，重复上述方法，仍可导出微分方程(19).

[1] Pu F C, Zhao B H 1986 *Nucl. Phys.* B **275** 77

[2] Thacker H B, Wilkinson D 1979 *Phys. Rev.* D **19** 3660；Creamer D B, Thacker H B, Wilkinson D 1980 *Phys. Rev.* D **21** 1523

[3] Zhou Y K 1989 *Nucl. Phys.* B **326** 775

[4] Mallick B B, Bhattacharyya T 2002 *Nucl. Phys.* B **634** 611

[5] Kundu A, Mallick B B 1993 *J. Math. Phys.* **34** 1052

[6] Skylanin E K 1990 *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems* Jimbo M ed (Singapore: World Scientific) p121

[7] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312；Baxter B J 1972 *Ann. Phys.* (NY) **70** 193

Integrability of the generalized multi-component Fermi quantum derivative nonlinear Schrödinger model*

Tian Xiao-Dong　Yue Rui-Hong

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

(Received 5 July 2004; revised manuscript received 27 October 2004)

Abstract

With the help of Lax operator, the monodromy matrix is constructed, and the Hamiltonian is obtained. By using algebraic Bethe ansatz method, it has been shown that the monodromy matrix satisfies the Yang-Baxter equation on both a finite interval and an infinite interval. So the integrability of this model is proved.

Keywords: derivative nonlinear Schrödinger model, quantum Yang-Baxter equation, algebraic Bathe ansatz method

PACC: 0370, 0200, 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90103001).