

# 两个延迟耦合 FitzHugh-Nagumo 系统的 动力学行为<sup>\*</sup>

袁国勇<sup>1)2)</sup> 杨世平<sup>2)</sup> 王光瑞<sup>3)</sup> 陈式刚<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> 中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 100088)

<sup>2)</sup> 河北师范大学物理学院, 石家庄 050016)

<sup>3)</sup> 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2004 年 7 月 12 日收到, 2004 年 11 月 25 日收到修改稿)

考虑了两个延迟耦合 FitzHugh-Nagumo 系统, 首先分析两点延迟耦合的动力学行为, 给出静息态的局部稳定和不稳定的参数区. 螺旋波同步、共同的静息态以及两个系统不同的状态出现在静息态稳定参数区内, 在这些态的过渡耦合强度参数区内会出现很多演化图样, 它们反映了螺旋波波头、波体和波尾的不同, 也反映空间尺度对螺旋波的影响. 讨论了静息态局部不稳定参数区内, 两点延迟耦合的动力学行为和相应参数下两个延迟耦合反应-扩散系统的斑图动力学行为.

关键词: FitzHugh-Nagumo 系统, 螺旋波, 同步

PACC: 0547, 0570L, 0545

## 1. 引 言

可激性是许多物理、生物系统的一个普遍特性. 早在 1952 年, Hodgkin 和 Huxley<sup>[1]</sup>给出了薄膜电流的定量描述, 并将其应用到神经的可激与传导中. 随后, FitzHugh 和 Nagumo<sup>[2]</sup>发展了基本数学模型. 自此以后, 这方面的工作得到了广泛的开展. 一般二维可激系统中常出现的两种耗散结构是平面行波和旋转螺旋波. 螺旋波的动力学行为很多年来一直是人们研究的焦点之一, 螺旋波的形成和发展有着丰富的动力学内容, 例如, 系统的自组织行为、波头的运动<sup>[3-7]</sup>以及周期脉冲和噪声的影响<sup>[8]</sup>、螺旋波破碎及时空混沌的转变<sup>[9-12]</sup>等.

最近, 由于实验技术的提高, 可以在光敏感的 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应中实现两个实验系统的耦合, 从中能够观测到缺陷湍流系统的螺旋波同步现象<sup>[13]</sup>; 更为多彩的图灵斑图图样也出现在两个耦合的支持图灵斑图的系统中<sup>[14]</sup>. 为了对两个耦合系统的动力学机制有深入的了解, 我们考虑两个延迟耦合的螺旋波可激系统, 第一个系统的初始态是

一个螺旋波, 另一个系统最初处于静息态. 我们的结果有利于理解三维卷波的一些性质, 比如三维性对平面螺旋波有很大的破坏作用. BZ 反应的实验结果表明, 存在着两种失稳, 一种是长波失稳 (Eckhaus 失稳); 另一种是从螺旋波头开始的失稳, 最近的实验表明, 这类系统的失稳是由于 Doppler 效应与三维效应共同引起的.

在本文中, 我们首先考虑了两点延迟耦合系统的动力学行为, 所得的结果有助于理解两个延迟耦合二维系统的一些斑图的形成; 其次给出两延迟耦合二维可激系统中出现的各种图样以及相应的耦合强度范围, 同时给出一些图样的解释, 最后考虑了不同延迟的影响.

## 2. 两个延迟耦合的 FitzHugh-Nagumo (FHN) 反应扩散系统

在本文中, 我们采用了早期的 FHN 模型. 与其他模型相比, 在这个模型中发展起来的螺旋波有很宽的恢复区, 使得螺旋波有非常强的自调节功能, 螺旋波失稳 (Eckhaus 失稳和 Doppler 失稳) 最不容易发

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究专项基金、国家自然科学基金 (批准号: 10147201, 10247003)、激光技术创新基金 (批准号: 20030512)、国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10335010) 和中国工程物理研究院科学技术基金 (批准号: 200404430) 资助的课题.

生在此类模型中. 这将有利于我们理解两个系统相互作用的机制. 两个延迟耦合的 FHN 系统可以写为

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} [f(u_1, v_1) + \alpha(u_2(t - \tau) - u_1(t - \tau))] + \nabla^2 u_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = g(u_1, v_1);$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} [f(u_2, v_2) + \alpha(u_1(t - \tau) - u_2(t - \tau))] + \nabla^2 u_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = g(u_2, v_2),$$

式中, 反应项  $f(u, v) = -v - u(u - 0.03)(u - 1.0)$ ,  $g(u, v) = -v + 2.5u$ ;  $\alpha$  是系统(1)(2)的耦合系数;  $\tau$  是延迟时间;  $\varepsilon$  应该足够的小, 以保证各自系统的可激性.

### 3. 两点延迟耦合的动力学行为

首先, 考虑没有扩散项时的情况. 可以认为两个系统在各自空间上只有一点, 这两个点延迟耦合在一起, 整个系统的动力学行为可以描述如下:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} [f(u_1, v_1) + \alpha(u_2(t - \tau) - u_1(t - \tau))], \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = g(u_1, v_1);$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} [f(u_2, v_2) + \alpha(u_1(t - \tau) - u_2(t - \tau))], \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = g(u_2, v_2).$$

为了便于计算, 作时间变换  $t' = \frac{1}{\varepsilon}t$ ,  $\tau' = \frac{1}{\varepsilon}\tau$ , 同时令  $a = 0.03$ ,  $r = 1.0 \times \varepsilon$ ,  $b = 2.5 \times \varepsilon$  (这里取  $\varepsilon = 0.001$ ) 则(3)(4)式变为

$$\frac{\partial u_1}{\partial t'} = -v_1 - u_1^3 + (a + 1)u_1^2 - au_1 + \alpha(u_2(t' - \tau') - u_1(t' - \tau')), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t'} = -rv_1 + bu_1;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t'} = -v_2 - u_2^3 + (a + 1)u_2^2 - au_2 + \alpha(u_1(t' - \tau') - u_2(t' - \tau')), \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t'} = -rv_2 + bu_2.$$

$(0, 0, 0, 0)$  是方程的一个定态解, 它的稳定性依赖于  $\tau'$  (或  $\tau$ ). (5)(6)式在定态解附近的特征方程可以写为

$$\Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda) = 0. \quad (7)$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= [(a + \lambda)(r + \lambda) + b + 2.0ce^{-\lambda\tau'}(r + \lambda)], \\ \Delta_2(\lambda) &= [(a + \lambda)(r + \lambda) + b]. \end{aligned} \quad (8)$$

根据辅角原理和儒歇定理, 对于参数  $b > r^2$  和  $4(b/r) > (a - 1)^2$ ,  $c$  存在一个临界值  $c^*$ ,

$$c^* = \sqrt{\frac{a^2 r^2 - 2b + 2\sqrt{4(2r^2 + 2ar + b^2)}}{4}}. \quad (9)$$

当  $c < c^*$  时  $(0, 0, 0, 0)$  总是局部稳定的.  $c > c^*$  时, 稳定行为依赖于延迟  $\tau'$ . 通过对  $\Delta_1(\lambda)$  分岔行为的分析, 我们可以得到相应的参数分隔线.

如果

$$\sin(\omega\tau') = \frac{\omega_{\pm}^3 - (b - r^2)\omega_{\pm}}{2\alpha(\omega_{\pm}^2 + r^2)} > 0, \quad (10)$$

则

$$\tau_{2\pm}^{j'} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \left[ 2\pi j + \arccos\left(\frac{-a\omega_{\pm}^2 - (ar + b)r}{2\alpha(\omega_{\pm}^2 + r^2)}\right) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

如果

$$\sin(\omega\tau') = \frac{\omega_{\pm}^3 - (b - r^2)\omega_{\pm}}{2\alpha(\omega_{\pm}^2 + r^2)} < 0, \quad (12)$$

则

$$\tau_{2\pm}^{j'} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \left[ (2j + 2)\pi - \arccos\left(\frac{-a\omega_{\pm}^2 - (ar + b)r}{2\alpha(\omega_{\pm}^2 + r^2)}\right) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

这里

$$\omega_{\pm} = \sqrt{(-A \pm \sqrt{A^2 - 4B})/2},$$

其中

$$A = a^2 + r^2 - 2b - 4c^2,$$

$$B = (ar + b)^2 - 4c^2 r^2.$$

图 1(a) 显示相应的参数分隔线图, 其中  $c, \tau$  取  $A, B$  处的值时  $(0, 0, 0, 0)$  态是局部稳定的 (I 区). 而取  $C, D, E, F$  处的值时  $(0, 0, 0, 0)$  态是局部失稳的 (II 区). 两点的动力学行为和两个延迟耦合 FHN 系统的斑图动力学在局部失稳和不失稳参数值下是完全不同的. 在下面的数值模拟中, 我们会清楚地看到这一点. 以下的数值结果主要使用的是  $A, B, C, D, E, F$  处的一些参数.

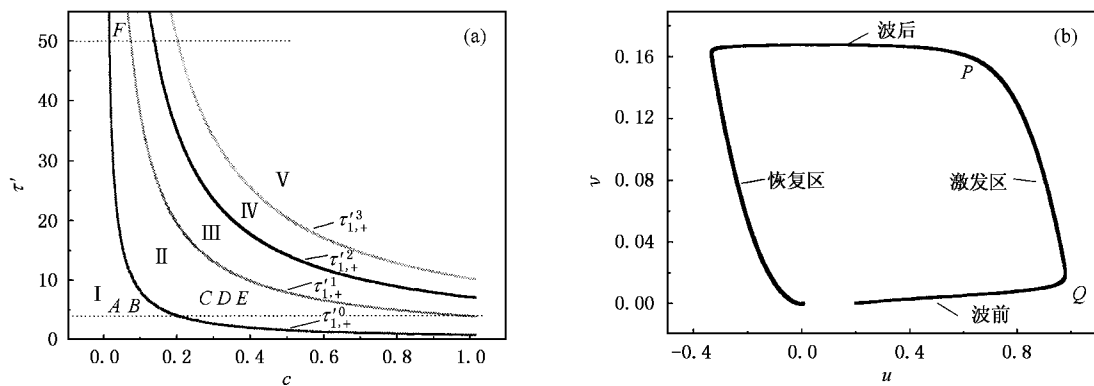


图 1 参数分隔线和相图 (a)  $(0,0,0)$  态局部稳定性的参数  $c$ - $\tau'$  图 (b) 单点可激系统的相图

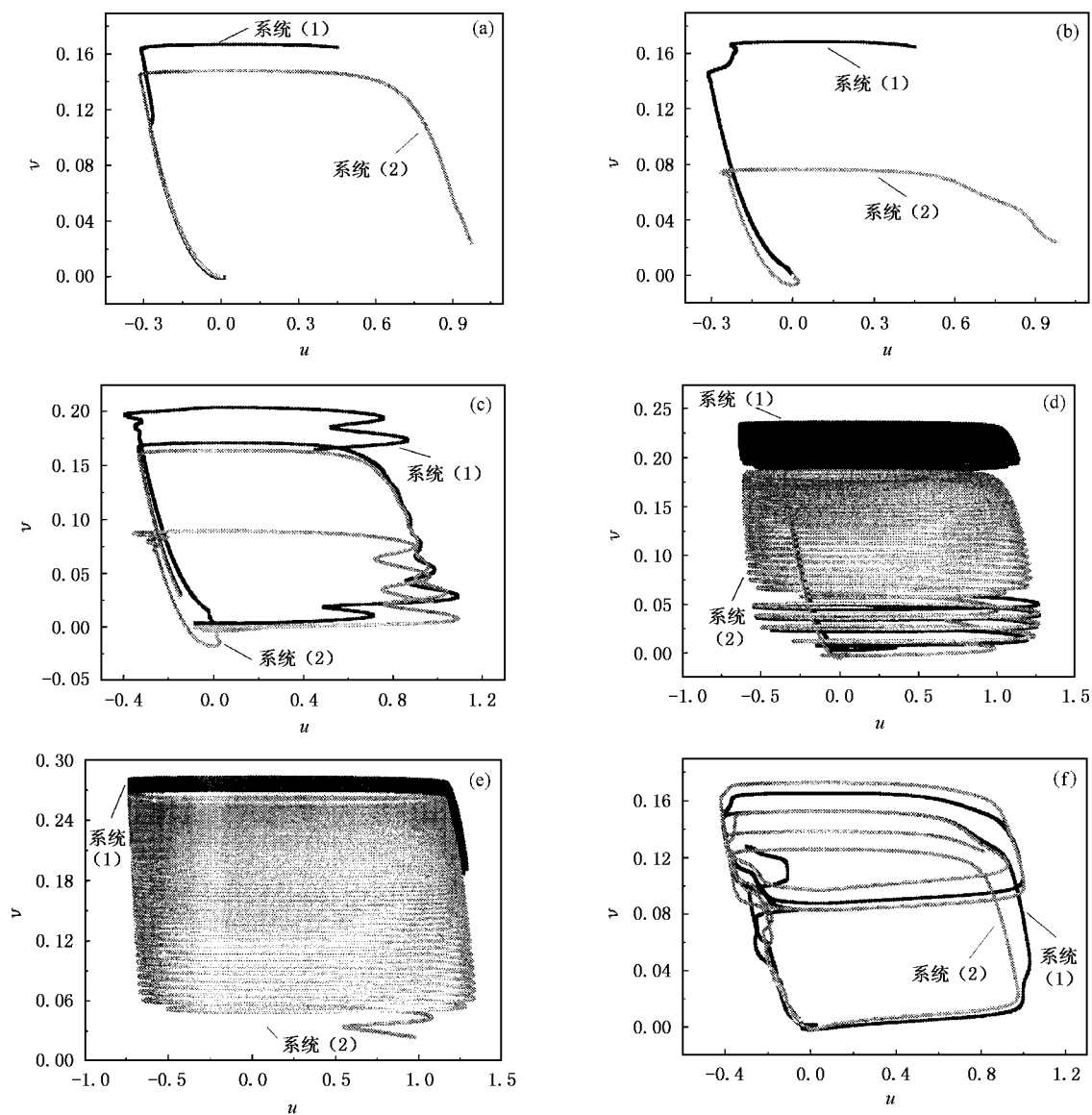


图 2 不同参数下的轨道图 (a)  $\tau'=4, c=0.02$  (b)  $\tau'=4, c=0.1$  (c)  $\tau'=4, c=0.27$  (d)  $\tau'=4, c=0.33$  (e)  $\tau'=4, c=0.4$  (f)  $\tau'=50, c=0.079$ . (a)(b) 对应着  $(0,0,0)$  局部稳定 (c)(d)(e)(f) 对应着  $(0,0,0)$  局部不稳

图 2 给出了不同参数区内返回到  $(0, \rho, \rho, \rho)$  态的轨道图. 考虑到下一节要用到这一节的结果, 选取系统 (1) 的初始值为未耦合时波背处的值 (图 1(b) 中的  $P$  点), 取系统 (2) 的初始值为未耦合时波峰处的值 (图 1(b) 中的  $Q$  点). 轨道依赖于参数  $\tau'$  (或  $\tau$ ) 和  $c$ , 在  $\tau'$  (或  $\tau$ ) 一定的条件下, 当  $c$  很小时, 两个系统的轨道基本上与未耦合时的轨道相吻合 (图 2(a)). 较大的  $c$  值会使第二个系统的可激态过早下跳 (图 2(b)),

从第 4 节中, 我们将会知道这使得两系统的螺旋波同步成为可能.  $c$  值很大时  $(0, \rho, \rho, \rho)$  态开始失稳, 这时系统不能稳定到  $(0, \rho, \rho, \rho)$ , 原有的可激轨道和  $u, v$  随时间的周期振荡共存.  $c$  值越大振荡越明显, 而  $c$  值越小可激轨道越明显 (从图 2(c)(d)(e) 中可以看到) 这两种运动的共存会带给我们丰富的时空图样. 从图 1(a) 可知, 失稳还依赖于  $\tau'$  (或  $\tau$ ) 图 2(f) 给出  $c$  很小、 $\tau'$  很大时的轨道图.

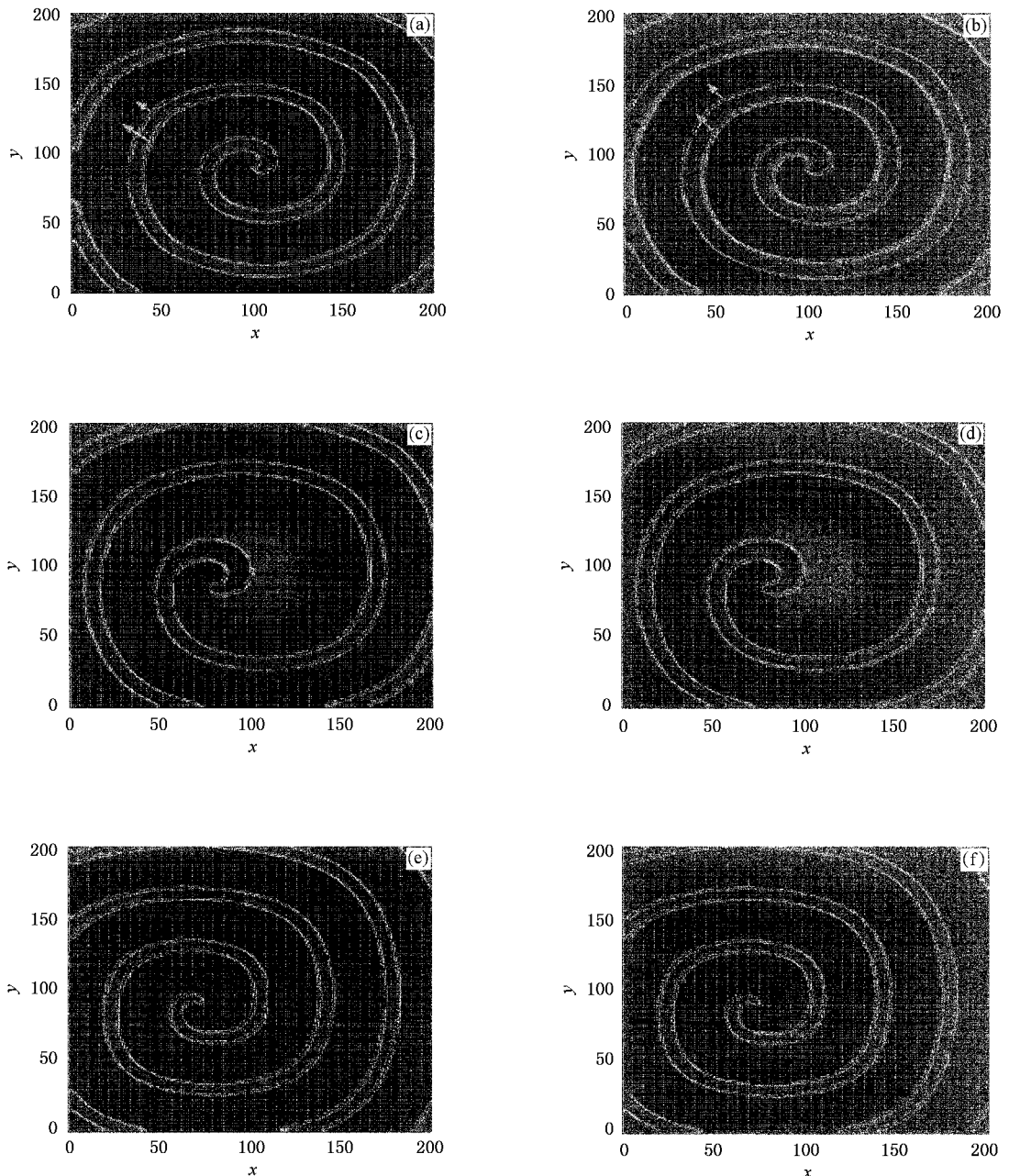


图 3 两个系统的螺旋波同步 ( $c = 0.098, \tau = 0.004$ ) (a)(b)  $t = 0.26$  (c)(d)  $t = 5.19$  (e)(f)  $t = 38$ . (a)(c)(e) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

## 4. 两延迟耦合 FHN 反应扩散系统的动力学行为

这里,我们考虑延迟耦合的两个 FHN 反应扩散系统,计算中选取的空间格点数为  $200 \times 200$ ,采用的时间延迟  $\tau' = 4$ . 耦合前,第一系统为一螺旋波,第二个系统处于静息态,这有利于我们看清一个平面螺旋波如何激发附近层及附近层反过来对它的

影响.

首先考虑耦合强度  $c$  小于临界强度的情况(此情况下  $(0, 0, 0, 0)$  点是稳定的,某位置经过激发态回到静息态后,只有周围位置的可激态扩散到这个位置,才可以再次被激发),两系统的螺旋波同步(图 3),共同的静息态(图 4),以及第一个系统始终为一个螺旋波(图 5,  $c$  小于 0.014)的现象会出现. 耦合加入后,由于可激性,在第二个系统中与第一个系统可激部分耦合的那些区域会在极短时间内被激发(即

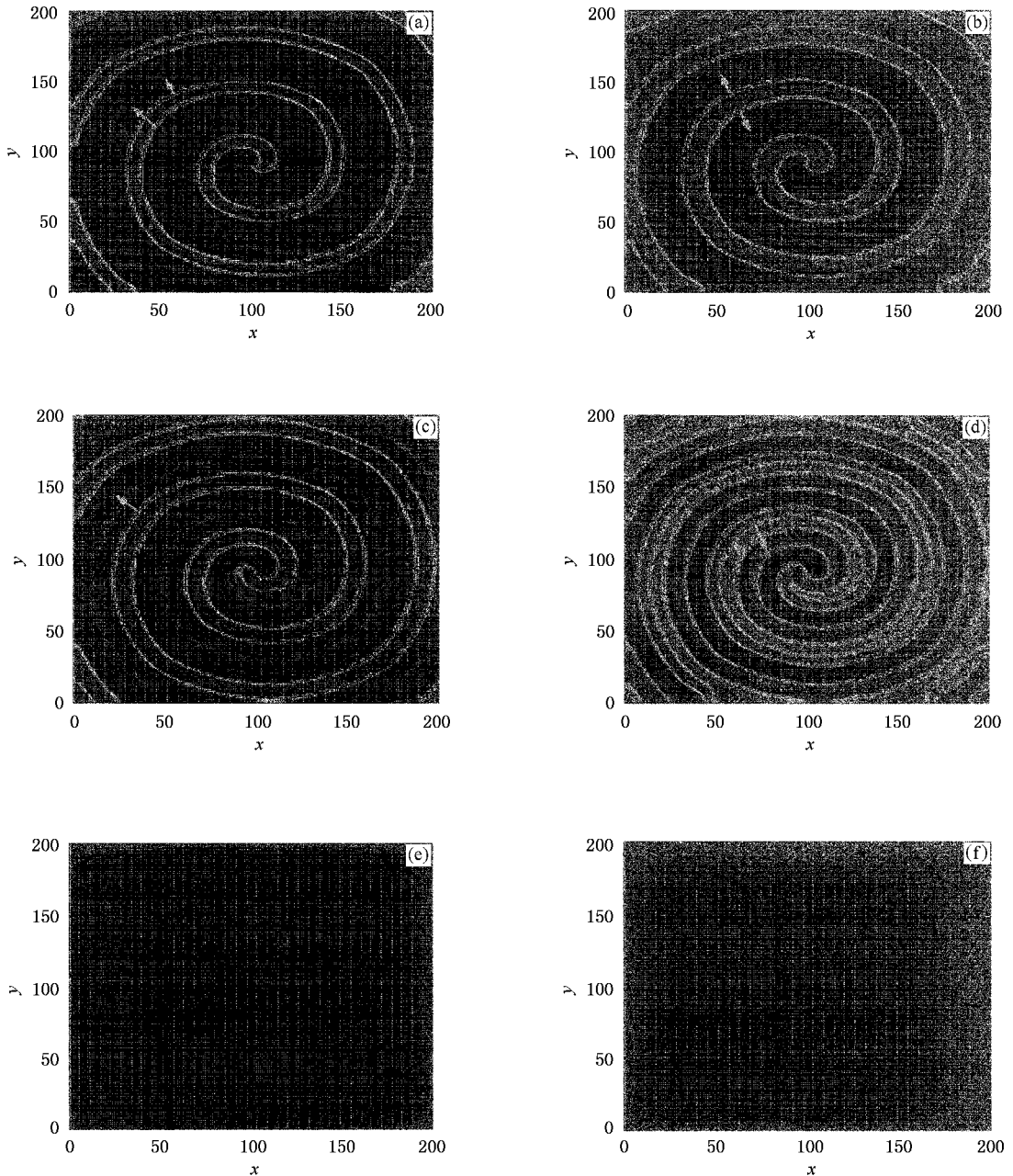


图 4 两个系统能达到静息态( $c = 0.066, \tau = 0.004$ ) (a)(b)  $t = 0.3$  (c)(d)  $t = 0.66$  (e)(f) 对应的的时间是  $t = 3.6$ . (a)(c)(e) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

这些格点很快就处于图 1(b)中  $Q$  点的状态),与第一个系统螺旋波波峰部分耦合的那些位置和第一个系统的相应位置具有相似的性质,很快能达到相同的动力学行为.而与第一个系统螺旋波波背部分相对应的那些区域和第一个系统的相应位置有不同的动力学性质.在第一个系统波背处,可激态只能向前扩散,而第二个系统中相应的位置具有波峰的动力学性质,可激态可以向后传.由图 2(a)(b)可知,如

果  $c$  值较大,第二个系统中与第一个系统波背、恢复区相对应的那些区域会丧失可激性,可激态很难向后传下去.经过一段时间的演化,两个能实现螺旋同步(图 3,  $c$  的范围是 0.094—0.240).与无延迟情况相比,同步后的螺旋波会以非常慢的速度向外传播.如果  $c$  值较小,尽管由于耦合作用处于可激态的时间间隔会变短,但仍可以支持可激态向后传,能够产生向后传播的波.在第二个系统中,向后传播的

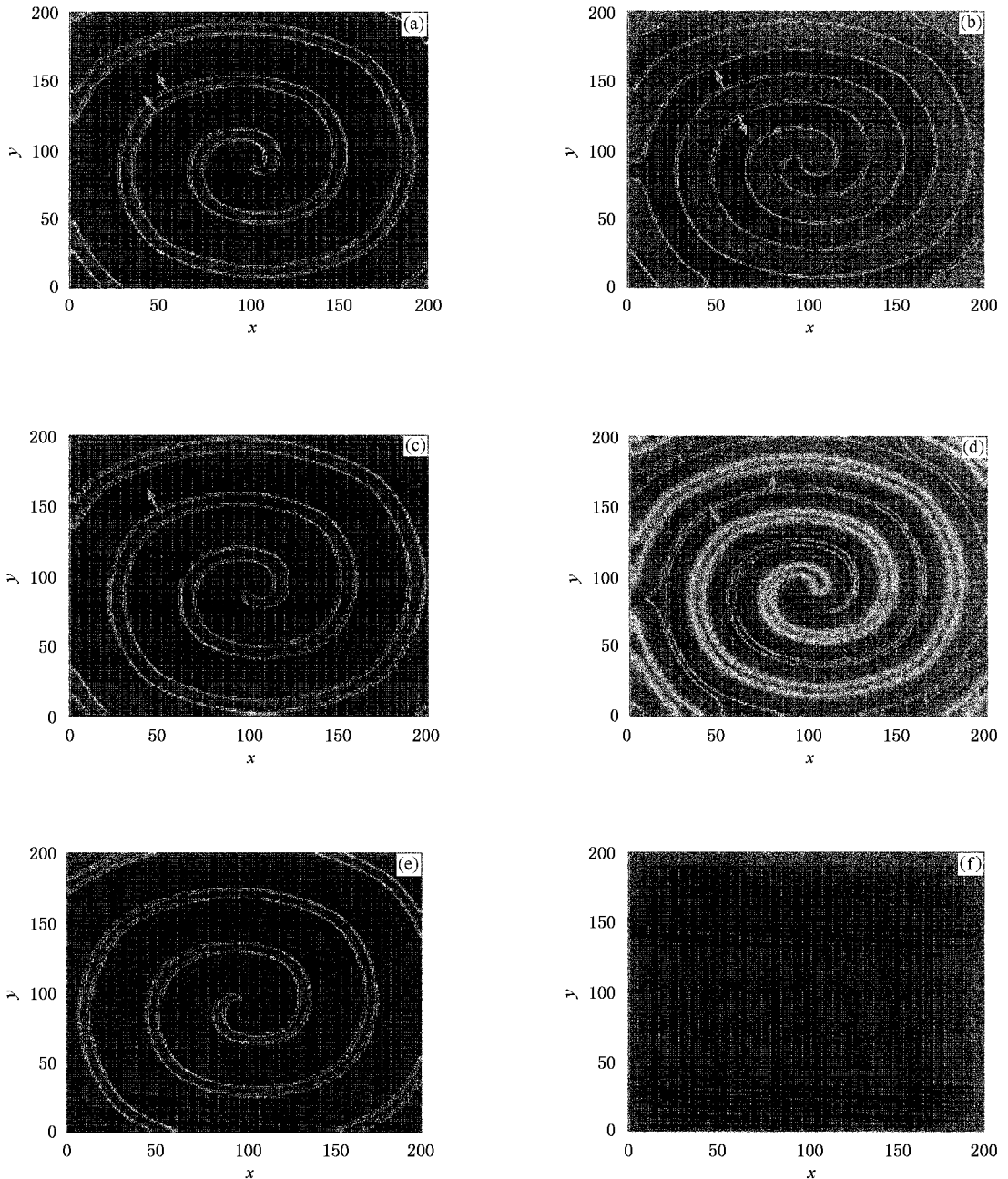


图5 第一个系统的螺旋波始终被保存下来的情况( $c=0.01$ ,  $\tau=0.004$ ) (a)(b) $t=0.6$  (c)(d) $t=0.99$  (e)(f) $t=2.26$ . (a)(c)(e)对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f)对应着第二个系统的空间图样.空间格点数为  $200 \times 200$ ,不同的灰度表示不同的  $u$  值

波和下一个向前传播的波相碰,整个可激区会消失.而第一个系统的螺旋波要经过与第二个系统的后传波恢复区相耦合的那些区域,耦合强度很小时,这些区域是可激的,尽管可激区的间隔会变窄,但螺旋波也能通过此区域,第一个系统的螺旋波会保存下来(图5).如果  $c$  不是足够地小,第一个系统与第二个系统的后传波恢复区相耦合的那些区域丧失可激

性,螺旋波不能通过此区域,共同的静息态会出现(图4, $c$ 的范围是0.077—0.31).

在上述各现象的过渡参数区内,会出现很多多彩的图样(图6、图7),它们反映了波头、波体和波尾的不同,也反映了不同边界对螺旋的影响.与无耦合时相比,两种不同动力学行为交界处的耦合参数要偏大.

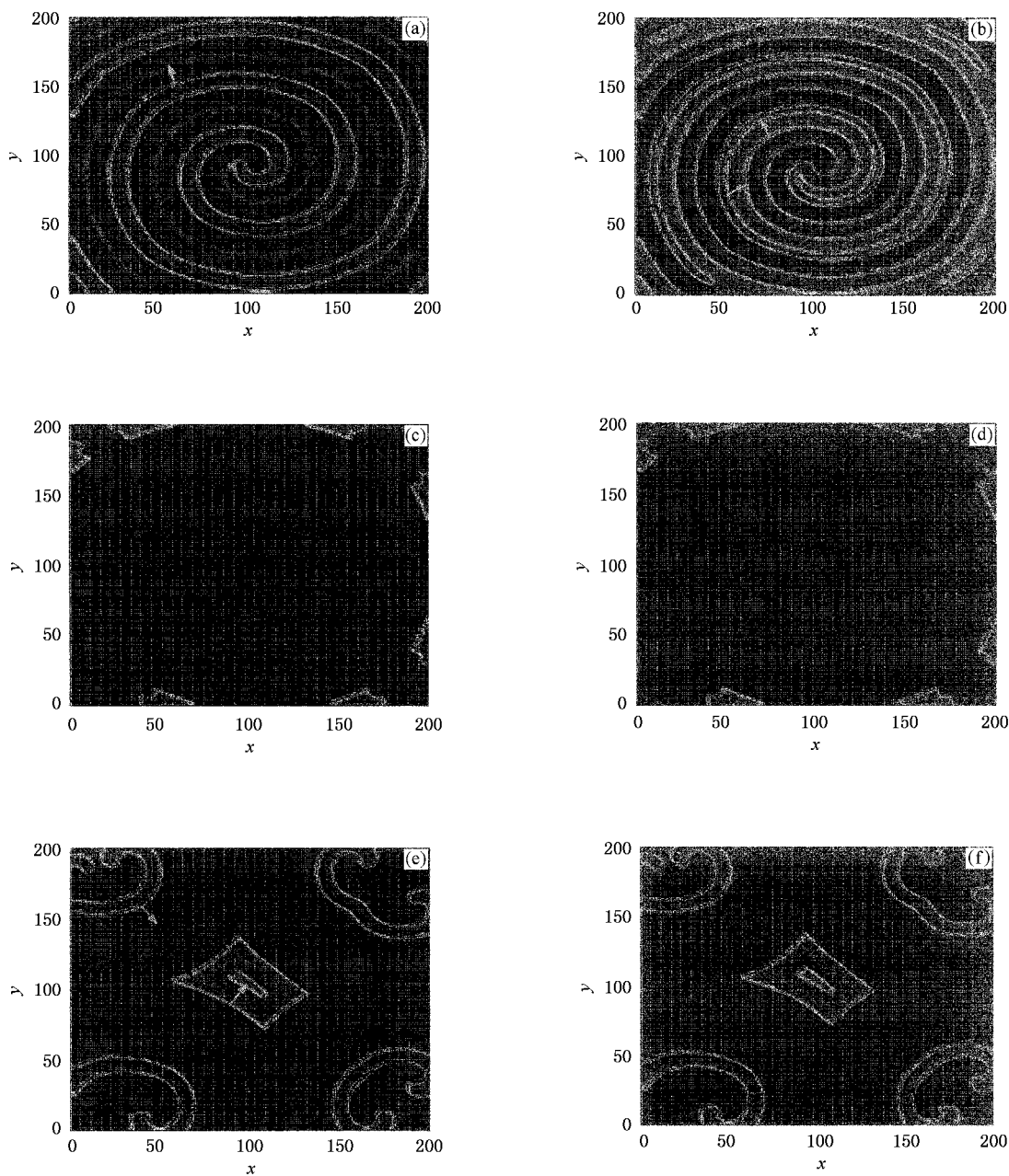


图6  $c = 0.083, \tau = 0.004$  时的图样 (a)(b)  $t = 0.86$  (c)(d)  $t = 0.96$  (e)(f)  $t = 9.27$ . (a)(c)(e) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

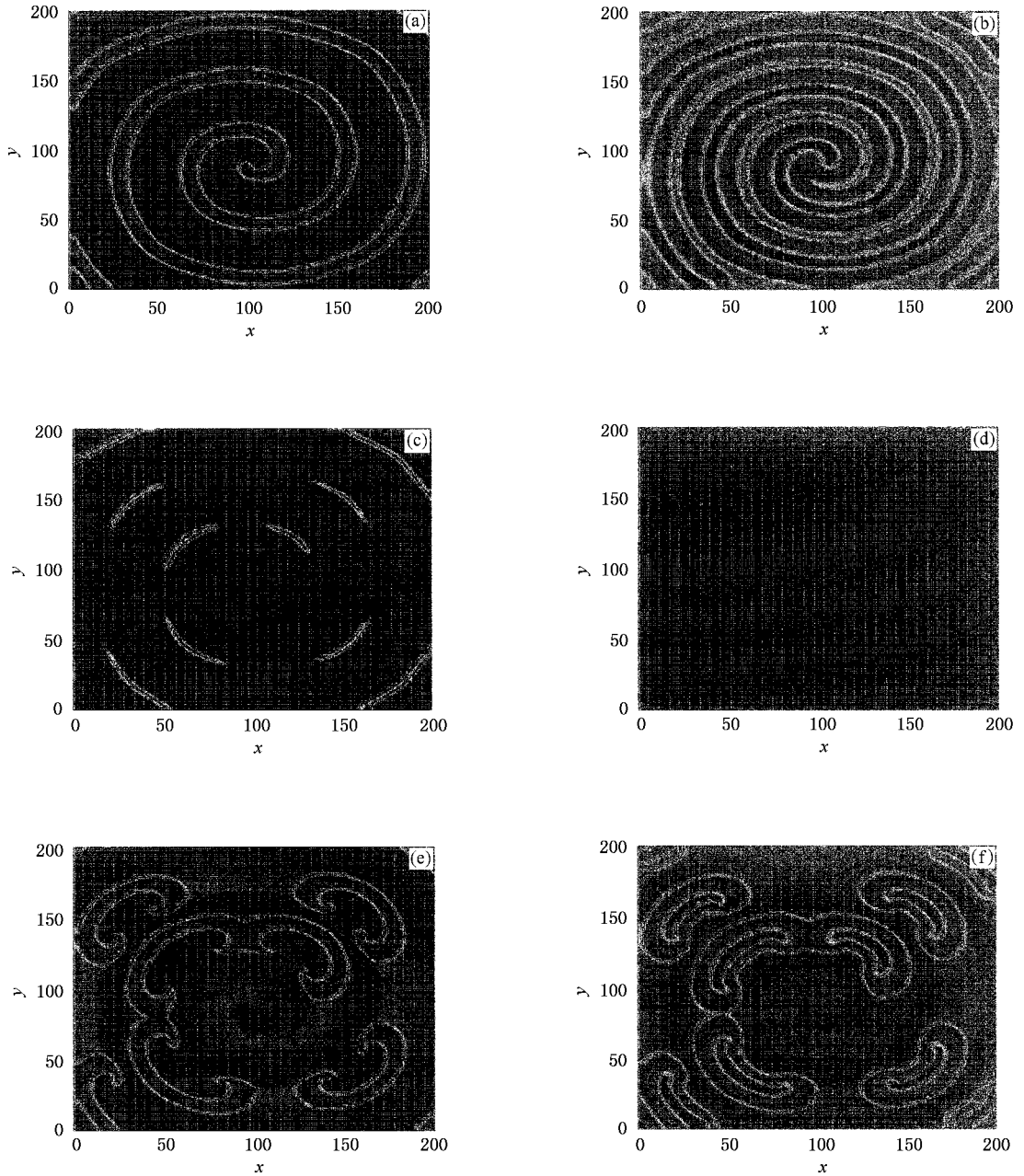


图7  $c=0.029, \tau=0.004$  时的图样, 最终两个系统演化到静息态 (a)(b) $t=0.86$  (c)(d) $t=2.16$  (e)(f) $t=4.05$ . (a)(c)(e) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

当  $c$  大于临界耦合强度时(如图 1(a)中  $C, D, E$  三点)( $0, 0, 0, 0$ )态开始失稳, 这时的轨道应该是可激轨道和  $u, v$  随时间周期振荡的混合, 这种可激轨道和周期振荡谁占主导地位对时空图样有着很大影响(图 8). 空间中的某个位置达到( $0, 0, 0, 0$ )态附近时, 不再是只有周围位置上的可激态扩散到此才被激发, 由于延迟耦合的作用, 这个位置自身也能够

激发, 整个时空图样受这两种作用共同支配. 在本文中, 令两个系统的扩散系数相同并一定, 通过调整  $c$  值来改变空间每个位置的动力学行为, 观测其不同的时空斑图. 两点在不同参数延迟耦合下,  $u_1, v_1, u_2, v_2$  以及差值  $u_1 - u_2, v_1 - v_2$  随时间的变化显示在图 9、图 10 中.  $c$  值较小的情况下, 每个点自振荡的振幅很小, 不足以使恢复态和静息态激发. 对静息



态的激发还是来源于周围位置上的可激态传到该位置,但可激轨道处于激发态的部分会受到周期性振荡的调制(图9).此参数下的两个延迟耦合 FHN 反应扩散系统支持同步的螺旋波,但这种同步是整体上的,两系统相对应的激发态区域是振荡的(图8

(c)(d)).随着  $c$  的增大,从激发到返回  $(0, 0, 0, 0)$  态的时间变短,激发区的周期振荡加大(图10),形成类似图8(e)(f)的图样.当  $c$  很大时,周期振荡开始形成,且周期和单个系统螺旋波的周期相比要小得多.这时,整个系统随时间振荡,可激性不明显.

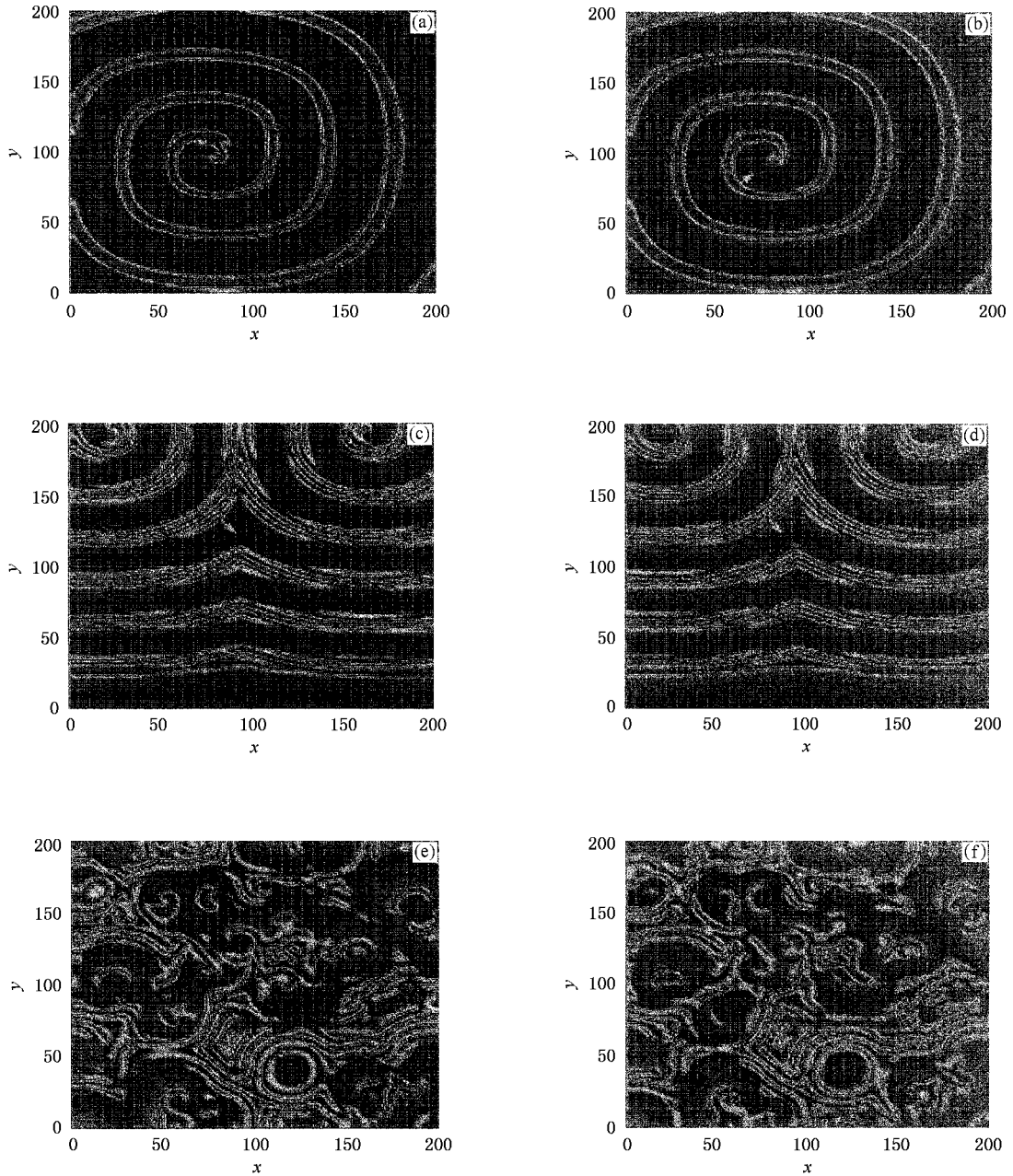


图8 静息态失稳,而  $c$  值不是很大时的几个振荡图样( $\tau = 0.004$ ) (a)(b)  $c = 0.25$ ,  $t = 31.21$ , 两个系统波体部分能实现同步,但波头相互振荡 (c)(d)  $c = 0.27$ ,  $t = 89.06$ , 大体上几乎同步,振荡发生在细微结构处 (e)(f)  $c = 0.33$ ,  $t = 13.79$ , 类似湍流发生. (a)(c)(e) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d)(f) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

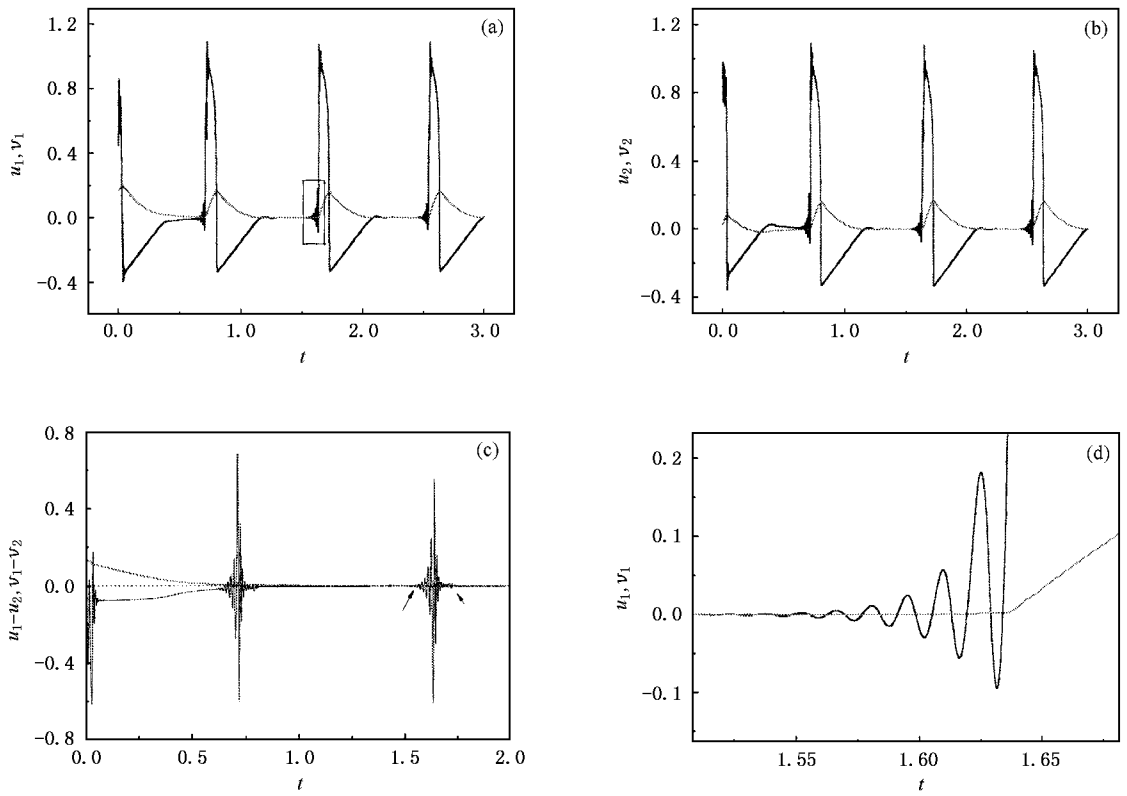


图 9 图 (c)(d) 所对应的单个格点的动力学行为 (a) 是第一个系统两变量随时间的变化 (b) 是第二个系统两变量随时间的变化 (c) 是相应的差值随时间的变化 (d) 是 (a) 中方框部分的放大.  $\tau' = 4, c = 0.27$

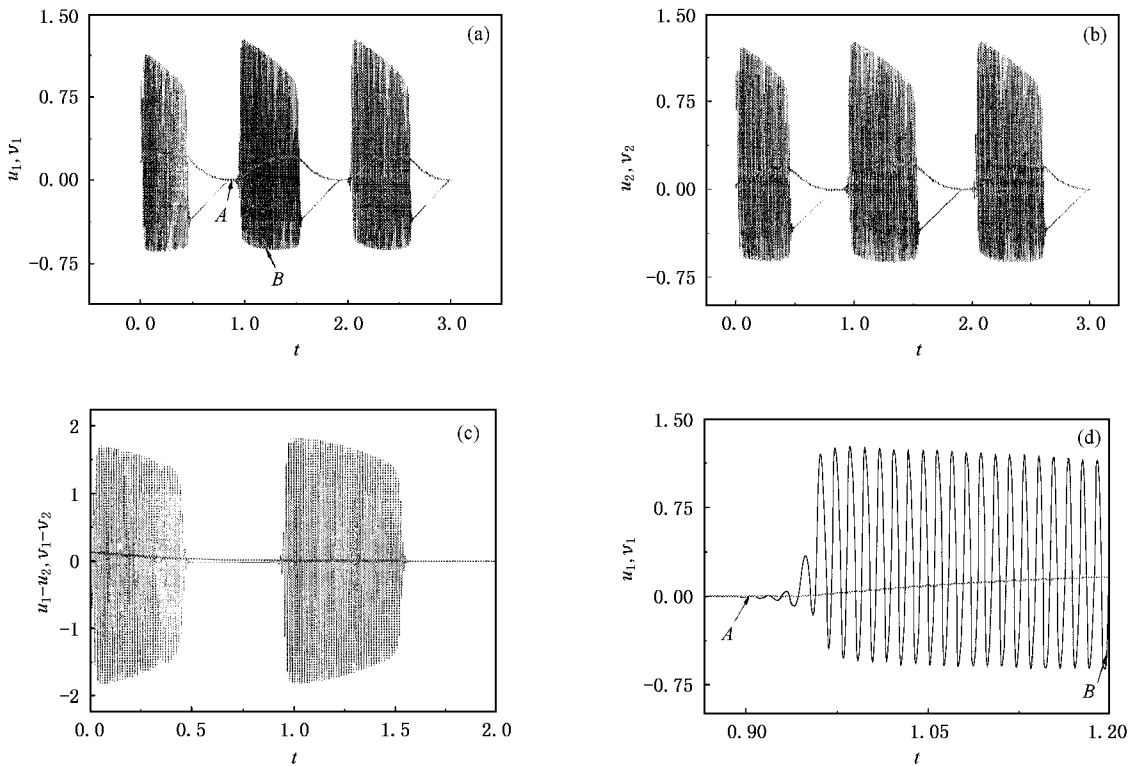


图 10 图 (e)(f) 所对应的单个格点的动力学行为 (a) 是第一个系统两变量随时间的变化 (b) 是第二个系统两变量随时间的变化 (c) 是相应的差值随时间的变化 (d) 是 (a) 中 A, B 之间部分的放大.  $\tau' = 4, c = 0.33$

### 5. 不同延迟的影响

从图 11(a)中,我们可以看到增加时间延迟  $\tau$  在较小的耦合强度下也可能是使静态点  $(0, 0, 0, 0)$  失稳. 伴随着  $\tau$  的增加, 螺旋波同步区的耦合强度参数范围会越来越小, 静态点  $(0, 0, 0, 0)$  失稳的图样会向

低耦合强度下的图样渗透. 静态失稳的时空斑图如图 11 所示, 两点延迟耦合各变量随时间的变化显示在图 12、图 13 中.

上述讨论有利于我们了解复杂系统的动力学行为. 复杂系统的动力学行为依赖于每个单元的特性和它们的相互作用. 不同的时间延迟可以用通过调整单元的相互作用来实现(如调整它们之间的间隔).

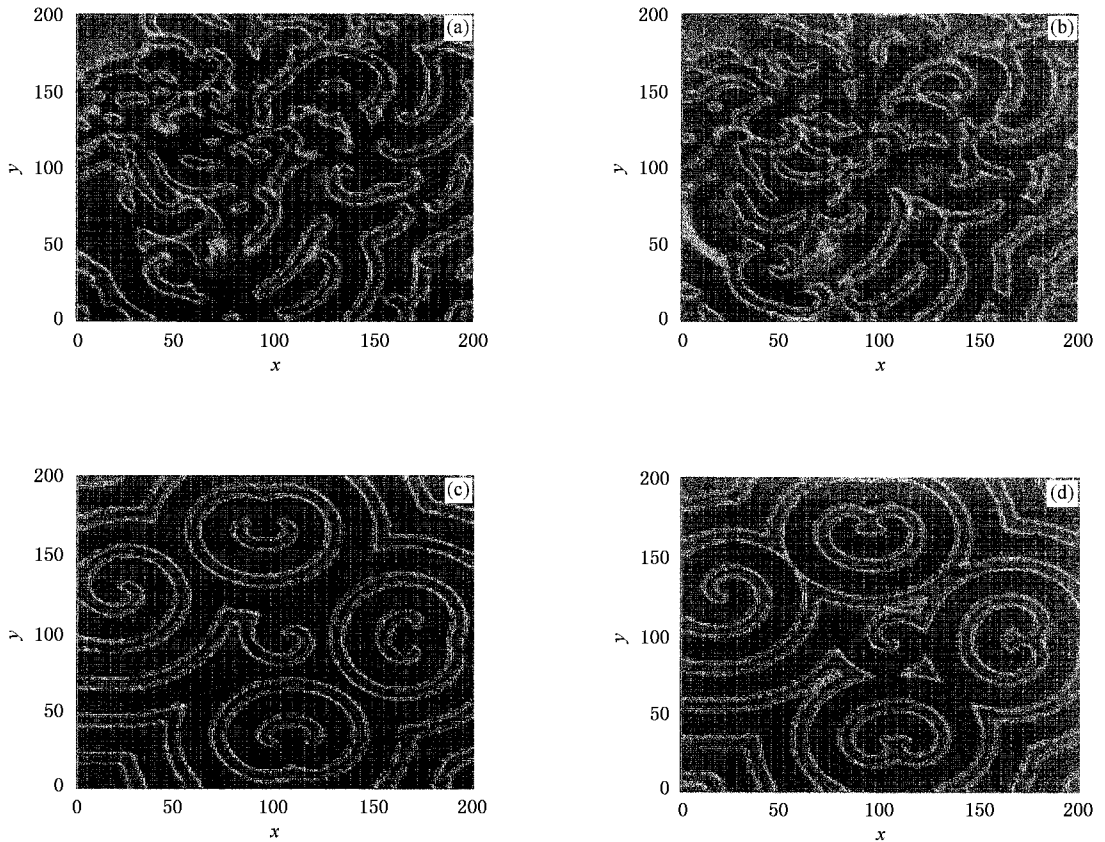


图 11 静态失稳,  $c$  值很小,  $\tau = 0.05$  时的图样 (a)(b)  $c = 0.07, t = 18.02$ , 两个系统相互振荡, 类似湍流态 (c)(d)  $c = 0.079, t = 17.32$ , 振动规则图样. (a)(c) 对应着第一个系统的空间图样 (b)(d) 对应着第二个系统的空间图样. 空间格点数为  $200 \times 200$ , 不同的灰度表示不同的  $u$  值

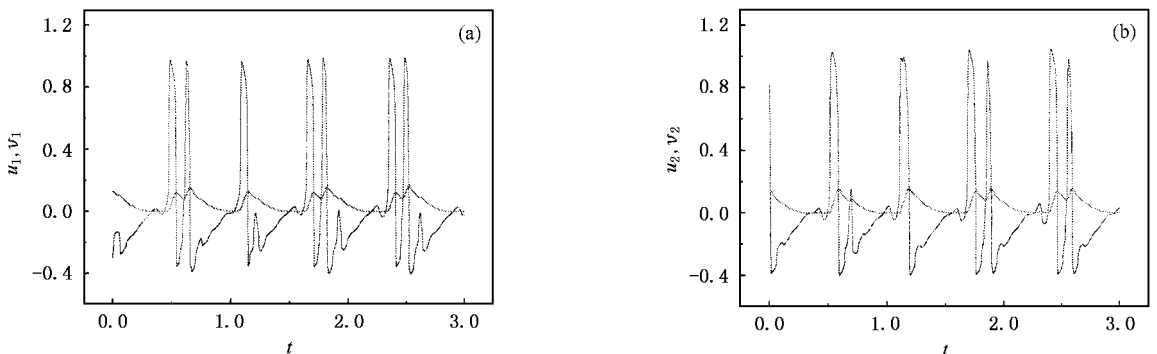


图 12 图 11(a)(b) 所对应的单个格点的动力学行为 (a) 是第一个系统两变量随时间的变化 (b) 是第二个系统两变量随时间的变化.  $\tau' = 50, c = 0.07$



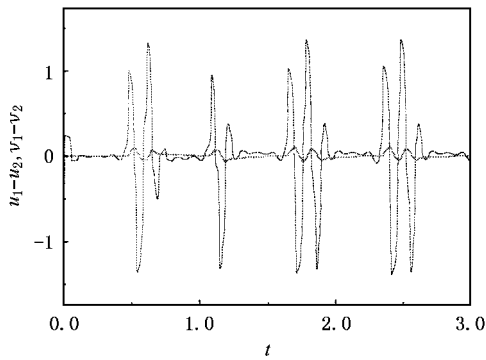


图 13 图 1(a)(b) 的差值随时间的变化.  $\tau' = 50, c = 0.07$

## 6. 结 论

我们考虑了两个延迟耦合的 FHN 系统,发现螺

旋波有很强的稳定性,从而便于我们研究两个(或双层)可激系统的相互作用机制及三维卷波的斑图行为.通过分析得到了定态局部稳定和不稳定的参数区.在稳定参数区,延迟  $\tau$  取一确定值,随  $c$  值的变化,可以观测到螺旋波同步、两系统的整个空间均回到静息态、一个系统始终保持螺旋波态而另一个系统从静息态到螺旋波重复演化以及许多过渡图样,并可以从相应参数下两点延迟耦合的动力学行为来解释这些图样.在不稳定参数区内,两点延迟耦合的动力学行为很复杂,可激性轨道和变量的周期振荡共存.当  $c$  较小时,可激性轨道占主导地位,当  $c$  很大时,则周期振荡支配这个动力学系统.相应参数下的时空斑图体现了这一点.

- 
- [ 1 ] Hodgkin A L , Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
- [ 2 ] FitzHugh R 1961 *Biophys. J.* **1** 445
- [ 3 ] Zykov V S , Engel H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016206
- [ 4 ] Zykov V S , Bordiougov G 2000 *Phys. Rev. E* **62** 5986
- [ 5 ] Braune M , Engel H 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016214
- [ 6 ] Kheowan O U , Chan C K , Zykov V S *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 035201R
- [ 7 ] Zykov V S , Kheowan O U , Rangsiman O *et al* 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026206
- [ 8 ] Sendina-Nadal I , Alonso S , Pérez-Muñuzuri V *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2734
- [ 9 ] Strain M C , Greenside H S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2306
- [ 10 ] Hildebrand M , Skφdt H , Showalter K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 088303
- [ 11 ] Bär M , Brusch L 2001 *New J. Phys.* **6** 5
- [ 12 ] Ouyang Q , Swinney H L , Li G *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1047
- [ 13 ] Hildebrand M , Cui J X , Mihaliuk E *et al* 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026205
- [ 14 ] Yang L F , Epstein I R 2004 *Phys. Rev. E* **69** 026211

# Dynamics of two FitzHugh-Nagumo systems with delayed coupling<sup>\*</sup>

Yuan Guo-Yong<sup>1,2)</sup> Yang Shi-Ping<sup>2)</sup> Wang Guang-Rui<sup>3)</sup> Chen Shi-Gang<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>( Graduate School of China Academy of Engineering Physics , Beijing 100088 , China )

<sup>2)</sup>( Department of Physics , Hebei Normal University , Shijiazhuang 050016 , China )

<sup>3)</sup>( Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China )

( Received 12 July 2004 ; revised manuscript received 25 November 2004 )

## Abstract

In this paper , we consider two FitzHugh-Nagumo ( FHN ) systems with delayed coupling. Firstly , dynamics of two-points with delayed coupling is analyzed. We give parameter regions about the stability of the stationary point. Spiral wave synchronization , common-stationary states and two different patterns in two systems can be observed. There are more kinds of patterns appearing in transitional regions. We also discuss the dynamics of two-points and two FHN reaction-diffusion system with delayed coupling. Quantitative interpretations are given.

**Keywords** : FitzHugh-Nagumo systems , spiral wave , synchronization

**PACC** : 0547 , 0570L , 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China , the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10147201 , 10247003 ) , the Innovation Funds for Laser Technology , China ( Grant No. 20030512 ) , the Key Program of the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10335010 ) , and the Science Foundation of China Academy of Engineering Physics ( Grant No. 200404430 ).