第 54 卷 第 5 期 2005 年 5 月
1000-3290/2005/54(05)/1969-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.5, May, 2005

哈密顿 Ermakov 系统的形式不变性

楼智美

(绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

(2004 年 8 月 20 日收到;2004 年 9 月 22 日收到修改稿)

把形式不变性的方法用于研究哈密顿 Ermakov 系统,从哈密顿 Ermakov 系统的形式不变性出发,运用比较系数法得到与形式不变性相应的点对称变换生成元的表达式及势能所满足的偏微分方程.结果表明,在点对称变换下,只有自治的哈密顿 Ermakov 系统才具有形式不变性.

关键词:哈密顿 Ermakov 系统,拉格朗日函数,点对称变换,形式不变性

PACC:0320

1. 引 言

形式不变性是力学系统的动力学函数在无限小变换下仍然满足运动方程的一种不变性,它在一定条件下也可导致守恒量.近年来,关于各类力学系统形式不变性的研究已取得了一系列的成果[1—10],都没有涉及到力学系统拉格朗日函数的具体表达式. Ermakov 系统是一对相互耦合的二阶微分方程,在一定条件下它可由哈密顿正则方程导出[11],文献[12,13]讨论了哈密顿 Ermakov 系统的 Noether 对称性和 Lie 对称性,本文从哈密顿 Ermakov 系统的形式不变性出发,运用比较系数法得到与形式不变性相应的点对称变换生成元的普遍表达式及势能所满足的偏微分方程. 结果表明,在点对称变换下,只有自治的哈密顿 Ermakov 系统才具有形式不变性.

2. Ermakov 系统的哈密顿函数和拉格朗日函数

Ermakov 系统可表示成[11]

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \frac{1}{yx^2} F(y/x), \tag{1}$$

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = 0. \tag{2}$$

设方程(1),(2)由哈密顿函数

$$H = \frac{A}{2} p_x^2 + B p_x p_y + \frac{C}{2} p_y^2 + V(x, y, t) \tag{3}$$

导出,则称(3)式为 Ermakov 系统的哈密顿表述.由(3)式得

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -A \frac{\partial V}{\partial x} - B \frac{\partial V}{\partial y} + \Omega^2 x, \tag{4}$$

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = -B \frac{\partial V}{\partial x} - C \frac{\partial V}{\partial y} + \Omega^2 y. \tag{5}$$

令

$$\Omega^2 = \frac{1}{y}\left(B \frac{\partial V}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial y} \right), \tag{6}$$

则(4),(5)式就成为(1),(2)式,而势能必须满足偏微分方程

$$(Bx - Ay) \frac{\partial V}{\partial x} + (Cx - By) \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{x^2} F(y/x), \tag{7}$$

由(7)式可得势能的一般形式为

$$V = \bar{V}(q, t) + \frac{1}{q} \int^s F(s)\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

其中

$$q = Ay^2 - 2Bxy + Cx^2, \tag{9}$$

$$s = y/x. \tag{10}$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2k}(C\dot{x}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + A\dot{y}^2) - \bar{V}(q, t) - \frac{1}{q}\int^s F(s)\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

其中 $k = AC - B^2 \neq 0$.

3. 哈密顿 Ermakov 系统的形式不变性

系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (q_1=x,q_2=y), \tag{12}$$

引进无限小群变换

$$t^*=t+\varepsilon\tau(q,t),q_s^*=q_s+\varepsilon\eta_s(q,t), \tag{13}$$

其无限小生成元向量为

$$X^{(0)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{2}\eta_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{14}$$

(14)式的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{s=1}^{2}(\dot{\eta}_s-\dot{q}_s\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{15}$$

其中 ε 为无限小参数,τ,η_s 为无限小变换的生成元.

在无限小变换下,

$$L^*=L+\varepsilon X^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2), \tag{16}$$

方程(12)的形式保持不变,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial x}=0, \tag{17a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial y}=0. \tag{17b}$$

将 L 代入(17a),(17b)式,得到关于广义速度的多项式,运用比较系数法,即令所有 $\dot{x}^m\dot{y}^n$ 的系数为 0,可确定无限小变换的生成元 τ,η_1,η_2 的形式.

在(17a)式中令 $\dot{x}\ddot{x}$的系数为 0 得

$$\tau_x=0, \tag{18}$$

其中的下标 x 表示对 x 求偏导,以下类同.令 $\ddot{x}$的系数为 0 得

$$C\eta_{1x}-B\eta_{2x}-C\tau_t=0, \tag{19}$$

令 $\ddot{y}$的系数为 0 得

$$C\eta_{1y}-B\eta_{1x}+A\eta_{2x}-B\eta_{2y}+2B\tau_t=0. \tag{20}$$

在(17b)式中令 $\dot{y}\ddot{y}$的系数为 0 得

$$\tau_y=0, \tag{21}$$

令 $\ddot{y}$的系数为 0 得

$$B\eta_{1y}-A\eta_{2y}+A\tau_t=0. \tag{22}$$

由(18),(21)式可令

$$\tau=\rho(t). \tag{23}$$

由(19),(20),(22)式可解得

$$\eta_1=\dot{\rho}\,x-W(t)(-Bx+Ay)+a_1(t), \tag{24}$$

$$\eta_2=\dot{\rho}\,y+W(t)(Cx-By)+a_2(t). \tag{25}$$

在(17a)式和(17b)式中分别令 $\dot{x}$的系数为 0 得

$$C\eta_{1xt}-B\eta_{2xt}-C\tau_{tt}=0, \tag{26}$$

$$B\eta_{1xt}-A\eta_{2xt}-B\tau_{tt}=0, \tag{27}$$

由(26),(27)式得

$$\eta_{1xt}=\tau_{tt},\eta_{2xt}=0. \tag{28}$$

将(24),(25)式代入(28)式得

$$\dot{W}=0. \tag{29}$$

在(17a)式和(17b)式中分别令常数项为 0,得势能满足的偏微分方程组

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho\frac{\partial V}{\partial t}-\eta_1\frac{\partial V}{\partial x}-\eta_2\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{C}{k}\eta_{1tt}-\frac{B}{k}\eta_{2tt}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\frac{\partial V}{\partial t}-\eta_1\frac{\partial V}{\partial x}-\eta_2\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{B}{k}\eta_{1tt}+\frac{A}{k}\eta_{2tt}. \tag{31}$$

将(8)式代入,并令 $a_1(t)=a_2(t)=0$ 得

$$-\rho\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}-2\dot{\rho}\,q\frac{\partial\bar{V}}{\partial q}+\frac{2\dot{\rho}}{q}\int^{s}F(s)\mathrm{d}s-\frac{W(1+s^2)}{q}F(s)=\frac{q}{2k}\dddot{\rho}. \tag{32}$$

一般情况下,(32)式中很难求得 $\bar{V}$ 的解析表达式,若 $\dot{\rho}=0$,$W=0$,则

$$\tau=\beta,\eta_1=\eta_2=0, \tag{33}$$

其中 β 为任一常数.(32)式简化为

$$-\rho\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}=0, \tag{34}$$

由(34)式得

$$\bar{V}=\bar{V}(q). \tag{35}$$

(35)式表明,哈密顿 Ermakov 系统的势能只是位置的函数,即在点对称变换下,只有自治的哈密顿 Ermakov 系统才具有形式不变性.

[1] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120

[2] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[3] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[4] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[5] Chen P S and Fang J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1044 (in Chinese) [陈培胜、方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[6] Fang J H, Yan X H and Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[8] Qiao Y F, Zhao S H and Li R J 2004 *Chin. Phys.* **13** 292

[9] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 331 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[10] Lou Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2046 (in Chinese) [楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[11] Haas F and Goedert J 1996 *J. Phys. A: Math Gen.* **29** 4083

[12] Haas F and Goedert J 2001 *Phys. Lett.* A **279** 181

[13] Goedert J and Haas F 1998 *J. Phys. A: Math Gen* **239** 348

Form invariance for Hamiltonian Ermakov systems

Lou Zhi-Mei†

(*Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 20 August 2004; revised manuscript received 22 September 2004)

Abstract

In this paper, we study the Hamiltonian Ermakov systems using the method of form invariance. In terms of the form invariance of the Hamiltonian Ermakov systems, the generator of point symmetry transformations and the partial differential equations for the potential energy are obtained by comparing the coefficients of all monomials. The result indicates that under the point symmetry transformations, only the autonomous Hamiltonian Ermakov systems possess form invariance.

Keywords: Hamiltonian Ermakov systems, Lagrangian function, point symmetry transformations, form invariance

PACC: 0320

† E-mail: louzhimei@zscas.edu.cn