

椭圆柱体在牛顿流体中运动的格子 Boltzmann 方法模拟^{*}

张超英¹⁾ 李华兵²⁾ 谭惠丽¹⁾ 刘慕仁¹⁾ 孔令江¹⁾

¹⁾ 广西师范大学物理与信息工程学院 桂林 541004)

²⁾ 桂林电子工业学院信息材料科学与工程系 桂林 541004)

(2003 年 12 月 23 日收到, 2004 年 9 月 24 日收到修改稿)

用格子 Boltzmann 方法建立了椭圆柱体的二维动力学模型, 利用所建立的模型, 数值模拟了牛顿流体中不同形状的椭圆柱体在相同初始条件下的运动和同一椭圆柱体在不同初始条件下的运动, 并通过比较相同条件下圆柱体的运动, 讨论了椭圆柱体二维运动的特征, 得到了一些有意义的结果.

关键词: 格子 Boltzmann 方法, 椭圆柱体, 牛顿流体

PACC: 0540, 4755

1. 引 言

微小颗粒的悬浮运动现象广泛存在于工业应用、环境科学、生命科学和医学科学等领域, 近年来其运动规律已成为人们十分感兴趣的研究课题^[1-3], 例如在化学工业中的结晶生长、自然生态系统中的花粉输运及传播、医学中红细胞的悬浮运动和随血浆的流动等现象中, 了解悬浮颗粒的运动规律对于提高化学工业的生产率和产品质量、改善生态系统的循环、揭示血液流变的奥秘等有着十分重要的意义. 对于颗粒的悬浮运动, 决定其运动特征的因素诸多, 但各种规则形状颗粒(如圆柱体、矩形柱体以及椭圆柱体)的悬浮运动特征是近年来人们研究的重点内容. 文献[4, 5]利用有限元方法对圆柱体分别在牛顿流体和非牛顿流体中的二维沉降运动进行了数值模拟, 并获得了一些有意义的结果. 有限元方法对颗粒悬浮运动数值模拟的成功, 为颗粒悬浮运动的数值模拟研究奠定了良好的基础, 但由于传统有限元的方法计算量巨大、处理复杂的几何边界和运动边界比较困难, 因而其进一步地推广应用受到了一定的限制. 格子 Boltzmann 方法是近几年发展起来的一种新的数值计算方法^[6-8], 它具有计算简单、特别适合于并行计算、并能处理较复杂的几何边

界和运动边界问题等优势, 因而被广泛应用于各种复杂流体力学问题的数值模拟计算. 文献[8]将格子 Boltzmann 方法运用于复杂边界下的两组分不可混合流体的运动模拟, 文献[9]利用格子 Boltzmann 方法、反弹(bounce-back)边界条件和 Ladd 提出的运动边界处理方法^[10]对圆柱体和椭圆柱体在牛顿流体中的二维运动进行了模拟, 模拟的数值结果与有限元方法模拟的结果相符合. 文献[11, 12]基于格子 Boltzmann 方法, 建议了一套新的静态和动态复杂几何边界处理方法, 并用此套新的边界处理方法对圆柱体在牛顿流体中的二维运动和球体在牛顿流体中的三维运动进行了模拟, 模拟计算随圆柱体格子半径的增加而快速收敛, 且模拟的结果与用二阶运动有限元方法的模拟结果^[4, 5]符合得非常好. 文献[13]在文献[11, 12]的基础上进一步对带电圆柱体在牛顿流体中的二维运动进行了数值模拟, 获得了一些新结果. 本文利用格子 Boltzmann 方法建立椭圆柱体的二维动力学模型, 并采用文献[11, 12]提出的静止与运动边界条件处理方法, 数值模拟了牛顿流体中不同形状椭圆柱体在相同初始条件下的二维运动和同一椭圆柱体在不同初始条件下的二维运动, 并通过比较相同条件下圆柱体的运动, 讨论了椭圆柱体二维运动的特征.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10362001, 10347001, 70371067), 教育部科学技术研究重点项目(批准号: 02115)和广西“新世纪十百千人才工程”专项基金(批准号: 2001204)资助的课题.

2. 椭圆柱体二维运动的格子 Boltzmann 模型

考虑二维运动的情况(图 1),半径分别为 a 和 b 的椭圆柱体被置于相距为 $L = 8a$ 的两无限大平板间的流体中作二维沉降运动. 初始释放时椭圆中心距左平板为 x_0 、且长轴与 X 轴夹角为 φ_0 , 在其沉降运动中流体满足连续性方程和 Navier-Stokes 方程.

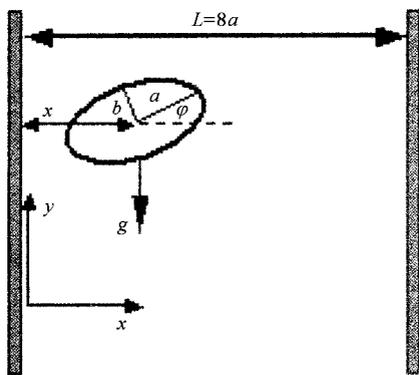


图 1 椭圆柱体在两平板间的流体中运动示意图

单弛豫近似形式下的 Boltzmann 方程可以写为^[14]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}], \quad (1)$$

其中 ξ 是运动粒子的速度, f^{eq} 为单粒子局域平衡分布函数, λ 是弛豫时间. 采用“九速”正方格子模型, 将方程(1)离散化得

$$f_i(\mathbf{x} + \partial x \cdot \mathbf{e}_i, t + \partial t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{eq}), \quad (2)$$

其中 \mathbf{e}_i ($i = 0-8$), $\tau = \lambda/\partial t$. 选择如下单粒子局域平衡分布函数^[15]:

$$f_i^{eq} = \alpha_i \rho \left[1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} u^2 \right], \quad (3)$$

式中 $\alpha_0 = 4/9$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/9$, $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 1/36$, $c = \partial x/\partial t$, ∂x 和 ∂t 分别为格子常数和 时间步长. 分别定义宏观密度 ρ 和宏观速度 \mathbf{u} 为

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i / \rho. \quad (4)$$

利用泰勒展开、多尺度技术和 Chapman-Enskog 展开, 容易导出方程(1)满足连续性方程

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha (\rho u_\alpha) = 0 \quad (5)$$

和 Navier-Stokes 方程

$$\partial_t (\rho u_\alpha) + \partial_\beta (\rho u_\alpha u_\beta) = -\partial_\alpha p + \nu \partial_\beta [\rho (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)], \quad (6)$$

其中 p 为压强, ν 为运动学黏滞系数, 它们分别定义为

$$p = c_s^2 \rho, \\ \nu = \frac{(2\tau - 1)}{6} c^2 \delta t, \\ c_s^2 = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

因此在椭圆柱体的沉降运动中, 流体的运动可通过离散化的格子 Boltzmann 方程(2)求解.

对于椭圆柱体的边界, 采用文献[11, 12]建议的方法, 即对于静态的复杂几何边界采用 Filippova 等提出的方法精确定位真实的物理边界^[16], 对于运动的椭圆柱体边界, 柱体占据的格子点和流体格子点会交替变更, 新产生的流体格子点的密度分布通过对邻近流体点所有可能方向的二阶外推值求平均获得^[17]. 利用流体与柱体边界的动量交换计算流体作用于椭圆柱体的力, 椭圆柱体的宏观运动遵从牛顿力学定律, 可由如下两方程求解^[18]:

$$\mathbf{V}_c \left(t + \frac{1}{2} \partial t \right) = \mathbf{V}_c \left(t - \frac{1}{2} \partial t \right) + \delta t \mathbf{F}_T(t) / M, \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_c(t + \partial t) = \mathbf{R}_c(t) + \partial t \mathbf{V}_c \left(t - \frac{1}{2} \right) + \delta t^2 \mathbf{F}_T(t) / M, \quad (10)$$

其中 \mathbf{V}_c 和 \mathbf{R}_c 分别为椭圆柱体质心运动的速度与位移, M 为柱体的质量, \mathbf{F}_T 为流体作用力.

3. 椭圆柱体二维运动的数值模拟

本文的研究选择水作为平板间的流体, 密度 $\rho_f = 1\text{g/cm}^3$, 运动学黏滞系数 $\nu = 0.01\text{cm}^2/\text{s}$, 椭圆柱体的密度为 $\rho_s = 1.01\text{g/cm}^3$, 并分别对如下几组几何参数和相应初始条件下的椭圆柱体二维沉降运动进行了数值模拟.

1. $a = 2b = 0.05\text{cm}$, $x_0 = 0.19L$, $\varphi_0 = 0$;
 2. $a = 2b = 0.05\text{cm}$, $x_0 = 0.19L$, $\varphi_0 = 0, \pi/4, \pi/2$;
 3. $a = kb = 0.05\text{cm}$ ($k = 2/1, 2/1.1, 2/1.125, 2/1.25, 2/1.5$), $x_0 = 0.19L$, $\varphi_0 = 0$.
- 模拟中格子大小设定为 $a = 13$ (lattice nodes),

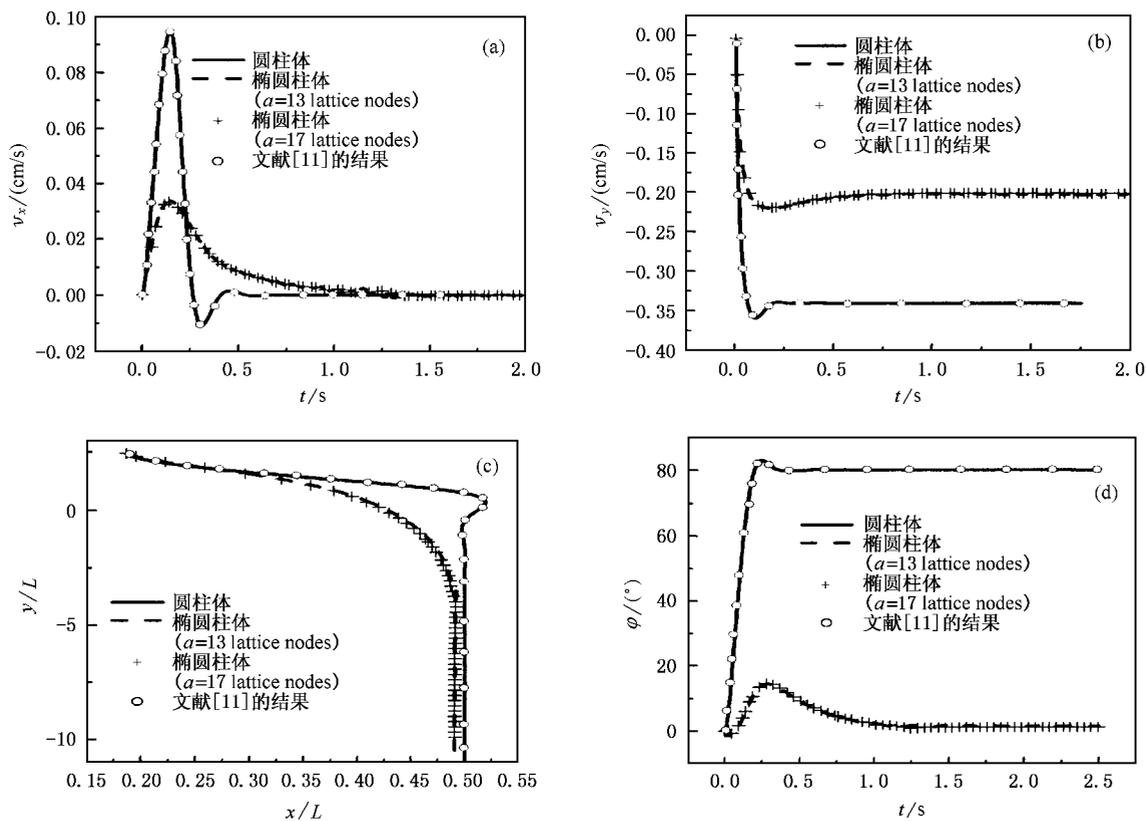


图 2 用不同格子大小对椭圆柱体 ($a/b = 2/1$) 二维运动模拟的数值结果

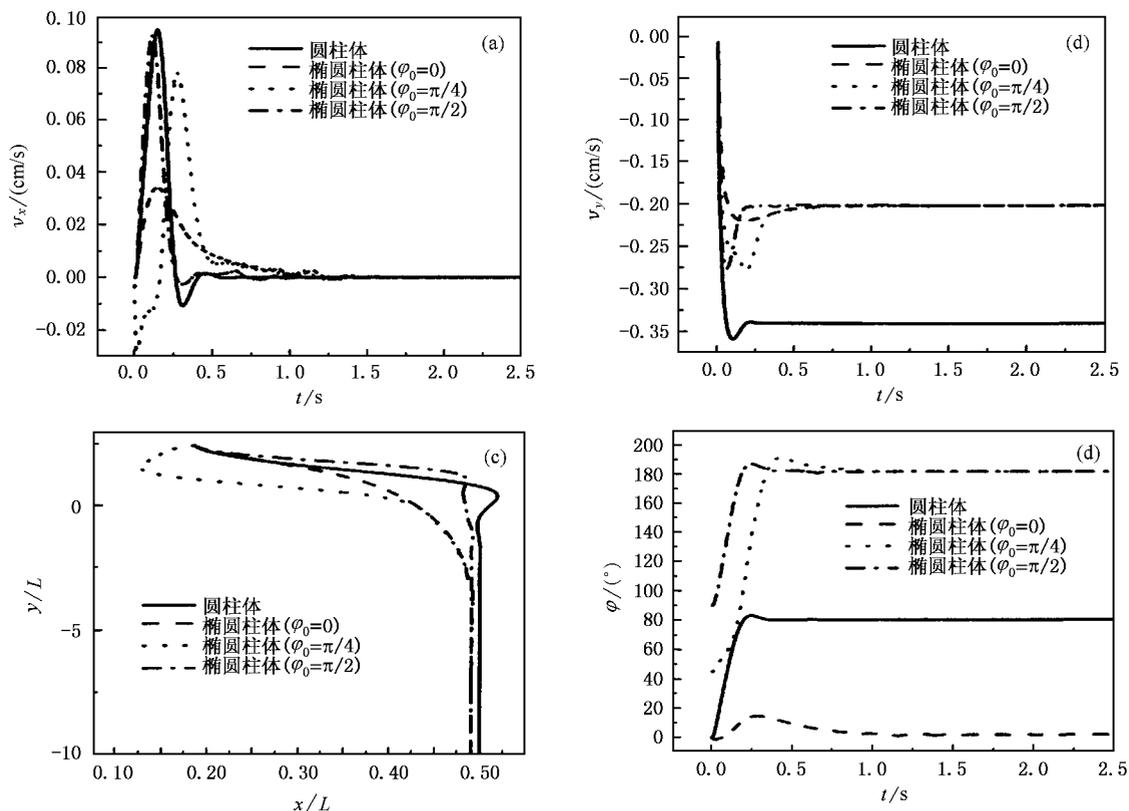
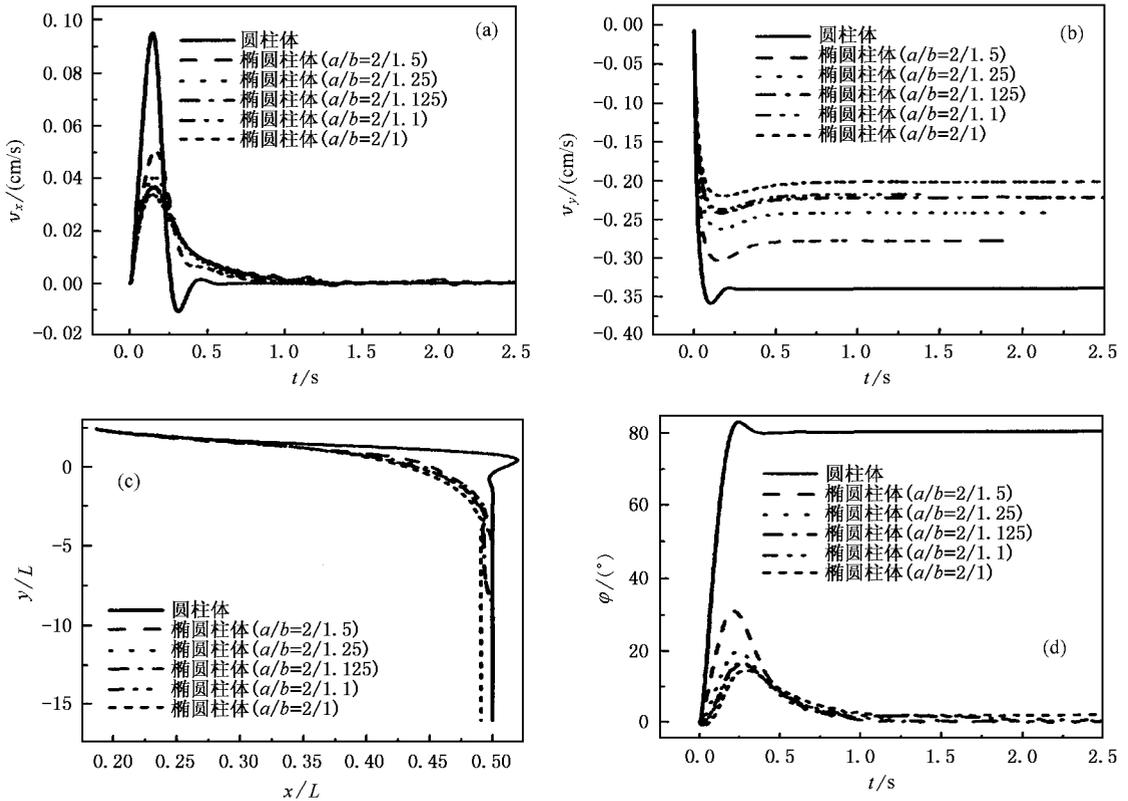


图 3 对不同初始偏转角下椭圆柱体 ($a/b = 2/1$) 二维运动模拟的数值结果

图 4 不同形状椭圆柱体 ($a/b = x$) 二维运动模拟的数值结果

弛豫时间 $\tau = 0.5534$, 上、下边界与运动柱体分别保持 $20a$ 和 $30a$, 模拟的数值结果(椭圆柱体的速度 V_x, V_y , 偏转角 φ 随时间的变化曲线和运动轨迹)分别给出于图 2—图 4 中。为了检验计算的收敛性和可靠性, 在图 2 中一并给出了用格子大小 $a = 17$ (lattice nodes) 模拟参数组 1 和文献 [11] 模拟圆柱体运动的结果。此外, 为了对照圆柱体的运动, 在图 2—图 4 中均标出了对圆柱体运动模拟的曲线。

4. 结果分析与讨论

1. 图 2 用不同大小格子对椭圆柱体二维运动的模拟结果显示了本文模拟计算的收敛性, 取 $a = 13$ lattice nodes 和 $a = 17$ lattice nodes 分别对椭圆柱体 ($a/b = 2/1$) 二维运动模拟的结果, 无论是速度随演化时间的变化, 还是其运动的轨迹均精确符合, 这说明对于椭圆柱体这样形状规则、曲率变化小的颗粒, 使用 $a = 13$ lattice nodes 的格子大小进行模拟已达到足够的精度。从图 2 还看到, 本文对圆柱体二维运动的模拟结果与文献 [11] 模拟的结果相符合。

2. 图 3 是圆柱体和初始以不同偏转角释放的

椭圆柱体 ($a/b = 2/1$) 二维运动的数值模拟结果, 圆柱体释放后, 随着其在垂直方向上的沉降, 水平方向也以较快的速度同时向中心线漂移, 过中心线后再倒回头(对应于 x 轴方向速度为负的一段曲线), 并最终沿中心线平稳下降, 这即为众所周知的圆柱体沉降运动中的“过冲”现象。对于椭圆柱体, 无论其初始偏转角为多少, 释放后从总体而言仍呈现向中心线漂移, 但有趣的是对于初始偏转角为 $\varphi_0 = \pi/4$ 的情形, 释放后先背离中心线运动, 经一段时间后再回头向中心线漂移。事实上椭圆柱体作沉降运动时, 会受到其下方流体的压力, 该力垂直于其长轴, 且阻碍椭圆柱体的下沉; 当椭圆柱体被以 $\varphi_0 = \pi/4$ 的初始角释放时, 流体的压力在水平方向的分量推动椭圆柱体向通道左壁运动, 随着椭圆柱体的下沉, 其长轴与水平方向的夹角逐渐增加, 当夹角超过 $\pi/2$ 时, 流体压力的水平方向分量将反向, 并推动椭圆柱体加速向通道中心线运动。以上几种情况下, 椭圆柱体均在靠近中心线的地方获得平衡, 并在相同的水平位移处, 以相等的偏转角和相同的速度垂直均速下降, 即不同初始偏转角的椭圆柱体最后以相同的雷诺数沉降, 这里雷诺数定义为 $Re = u_f \cdot (2a) / \nu$, 其中 u_f 为

平衡时的垂直下落速度, ν 为运动学黏滞系数, $2a$ 为特征长度.

3. 图 4 是对不同形状的椭圆柱体 ($a/b = x$) 在共同的初始偏转角 $\varphi_0 = 0$ 下的二维运动模拟的数值结果, 从图上可以看到, 不同形状椭圆柱体运动的速度、轨迹具有一定的区别: 截面形状越接近圆的椭圆柱体无论是水平方向速度, 还是竖直方向的速度都越大, 即雷诺数越大; 对于长、短轴之比 (a/b) 分别为 $2/1.125$, $2/1.25$, $2/1.5$ 的椭圆柱体, 它们在 X 方向上均最终平衡于中心线上, 且以各自的速度垂直下降, 而对 $a/b = 2/1$ 和 $a/b = 2/1.1$ 的椭圆柱体, 它们在 X 方向上的最终平衡位置都未达到中心线, 而是共同于水平方向上位移为 $x_f = 0.4908L$ 处匀速

垂直下降, 距中心的偏差约为 1.84% . 文献 [9] 在对椭圆柱体的运动模拟中, 也发现了相同的偏差现象, 其文中推断为格子 Boltzmann 方程在空间坐标离散化时所带来的偏差, 且用其文的计算方法, 对于 $a/b = 1.5/1$ (即 $a/b = 2/1.333$) 的椭圆柱体偏差为 2.3% . 本文的计算对 $a/b = 2/1.125$ 的椭圆柱体仍能精确平衡于中心线上, 即使对 $a/b = 2/1$ 的椭圆柱体运动模拟, 距中心线的偏差也仅为 1.84% , 由此可见, 本文采用的计算方法相对文献 [9] 所采用的方法而言, 精度更高. 再者, 对于平衡于同一水平位移的椭圆柱体, 到达平衡时各椭圆长轴与 X 轴的最终夹角相等.

[1] Migliorini C, Qian Y H, Edward Brown B, Rakesh Jain K and Lance Munn L 2002 *Biophys. J.* **83** 1834
 [2] Sun C H, Migliorini C and Munn L L 2003 *Biophys. J.* **85** 208
 [3] Aidun C K, Lu Y and Ding E 1998 *J. Fluid Mech.* **373** 287
 [4] Feng J, Hu H H and Joseph D D 1994 *J. Fluid. Mech.* **261** 95
 [5] Huang P Y, Hu H H and Joseph D D 1998 *J. Fluid. Mech.* **362** 297
 [6] Chen S, Chen H, Martine D O and Matthaeus W H 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3776
 [7] Qian Y H, Humieres D D and Lallemand P 1992 *Europhys. Lett.* **17** 479
 [8] Fang H P, Wan R Z and Fan L W 2000 *Chin. Phys.* **9** 515

[9] Qi D W 1999 *J. Fluid Mech.* **385** 41
 [10] Ladd A J C 1994 *J. Fluid Mech.* **271** 311
 [11] Fang H P and Chen S Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 47
 [12] Li H B et al 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026701
 [13] Wan R Z, Fang H P, Lin Z F and Chen S Y 2003 *Phys. Rev. E* **68** 011401
 [14] Bhatnager P L, Gross E P and Krook M 1954 *Phys. Rev.* **94** 511
 [15] He X and Luo L S 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6811
 [16] Filippova O and Hanel D 1997 *Comput. Fluids.* **26** 697
 [17] Chen S Y, Martinez D and Mei R W 1996 *Phys. Fluids* **8** 2527
 [18] Allen M P and Tildesly D J 1987 *Computer Simulation of Liquid* (Clarendonn) 1

Lattice Boltzmann simulations of moving elliptic cylinder in a Newtonian fluid^{*}

Zhang Chao-Ying¹⁾ Li Hua-Bing²⁾ Tan Hui-Li¹⁾ Liu Mu-Ren¹⁾ Kong Ling-Jiang¹⁾

¹⁾ College of Physics and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

²⁾ Department of Computation Science and Applied Physics, Guilin Electronic Industry Institute, Guilin 541004, China)

(Received 23 December 2003 ; revised manuscript received 24 September 2004)

Abstract

A dynamical model, based on the Lattice Boltzmann method, is presented for simulating the two-dimensional moving elliptic cylinders in a Newtonian fluid. Using this model, we have simulated the motions of elliptic cylinders with different shapes in a Newtonian fluid under the same initial conditions, and the motions of an elliptic cylinder under different initial conditions. The numerical simulations are compared with the results of moving cylinders under the same conditions. The characters of the two-dimensional moving elliptic cylinders are discussed, and some new results are obtained.

Keywords : lattice Boltzmann method, elliptic cylinder, Newtonian fluid

PACC : 0540, 4755

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos 10362001, 10347001 and 70371067); Key Projram of Technology by the Ministry of Education of China (Grant No. 02115) and by the Foundation of the Talent Project of Guangxi, China (Grant No. 2001204).