

高斯波束入射下串粒子的散射问题*

白 璐[†] 吴振森 陈 辉 郭立新
(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2004 年 4 月 7 日收到; 2004 年 9 月 23 日收到修改稿)

根据广义米理论, 将入射高斯波束利用矢量球谐函数展开, 研究了串粒子在轴条件下波束入射的电磁(光)散射. 讨论了波束宽度等因素对其散射特性的影响并与平面波入射的结果进行了比较.

关键词: 高斯波束, 广义米理论, 散射

PACC: 4110H, 4170, 0380

1. 引 言

自经典的 Lorenz-Mie 理论成功解决了球形粒子的散射问题之后, 越来越复杂粒子的散射问题, 目前已可用多种方法求解, 如体积分方程法, 矩量法, 时域有限差分法, 散射传输矩阵法等^[1-3]. 但是绝大多数这类问题的研究都是基于平面波入射条件的. 当入射的激光束是会聚的, 或入射激光的宽度与粒子本身的线度相比较小时, 平面波的入射条件将不再被满足. 近 20 年来 Gouesbet 等人根据 Davis 发展的高斯波束的一阶近似, 利用 Bronwich 公式深入地研究了波束入射时均匀球、椭球、有限柱等形状粒子对波束的相互作用, 发展了广义米理论(GLMT)^[4-6], 给出了计算波束因子 g_n, g_n^m 的三种算法^[5]. 吴提出了波束因子有限求和的改进公式^[7], 研究了波束入射对多层球、椭球的散射^[7-10].

事实上, 平面波入射情况可看作是波束入射的特例. 将复杂形状粒子在平面波入射下的散射问题推广到波束是具有一定的理论及实际意义的.

本文基于平面波入射下粒子系的散射理论, 将 GLMT 推广到位于波束轴线上的一串粒子对波束入射的散射问题. 文中将高斯波束用平面波角谱展开, 表明入射高斯波束电磁场分量的旁轴近似与 Davis 给出的一阶模式完全等价. 并基于不同的入射条件, 讨论了波束入射下串粒子散射的公式, 给出了数值计算的结果, 分析了波束宽度对其散射特性的影响.

2. 基本理论

2.1. 高斯波束入射场展开

单色高斯波束 TEM₀₀ 在均匀介质中沿 z 轴正向入射, 电极化方向在 xz 平面, 在 $z = 0$ 平面, 束腰半径为 w_0 , 省去时间因子 $\exp(-i\omega t)$, 电场的横向分量为

$$E_x(x, y, 0) = E_0 \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2], \quad (1)$$

式中 E_0 是波束中心的电场幅度. 而电场沿 y 轴分量 $E_y(x, y, 0) = 0$. 入射高斯波束在任意点的电磁场各分量均可用平面波角谱展开. 如令

$$x = \xi w_0, \quad y = \eta w_0, \quad z = \xi \zeta, \\ l = kw_0^2, \quad Q_0 = (i - 2z/l)^{-1},$$

按旁轴近似, 在波束直角坐标系中可获得入射高斯波束电磁场分量的一阶表达式为

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = E_0 \phi_0 \exp(ikz), \\ E_y(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E_z(x, y, z) = (2Q_0 x/l) E_x(x, y, z), \\ H_x(x, y, z) = 0, \\ H_y(x, y, z) = H_0 \phi_0 \exp(ikz), \\ H_z(x, y, z) = (2Q_0 y/l) H_y(x, y, z), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ 且

$$\begin{aligned} \phi_0 &= iQ_0 \exp[-iQ_0(\xi^2 + \eta^2)] \\ &= iQ_0 \exp[-iQ_0(x^2 + y^2)/w_0^2], \end{aligned} \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 60371020)及西安电子科技大学青年科研工作站基金资助的课题.

ϕ_0 满足著名的抛物型方程^[7]. (2), (3) 式与 Davis 给出的一阶模完全一致, 它近似满足麦克斯韦方程, 它们的相对误差 $O(s^2)$, $s = w_0/l$, 当 $z \ll w_0^4/(\pi\lambda^3)$, (4) 式能很好地描述波束的复振幅. 而上述条件在大多数实际情况下都能得到满足.

在以粒子为坐标原点的球坐标系中, 入射高斯波束的电磁场可分解为 TE 和 TM 模. 入射波束的电磁场径向分量可分别表示为

$$\begin{pmatrix} E_{r, \text{TM}} \\ H_{r, \text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{i,r} \\ H_{i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \phi_0 e^{K} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{2Q}{l} r \cos \theta \right] \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 $K = ik(r \cos \theta - z_0)$, $Q = [i - 2(r \cos \theta - z_0)/l]^{-1}$, z_0 是粒子的坐标中心在波束坐标系中的 z 轴坐标值. 将入射波束的电磁场用矢量球谐函数展开

$$E_{i0} = \sum_n E_n g_n (\mathbf{M}_{01n}^{(1)} - iN_{01n}^{(1)}), \quad (6)$$

$$H_{i0} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_n E_n g_n (\mathbf{M}_{01n}^{(1)} + iN_{01n}^{(1)}), \quad (7)$$

式中 $E_n = E_0 i^n (2n+1)/[n(n+1)]$, E_0 为波束中心场强幅度值. g_n 就是考虑了波束与平面波入射差别的特征参量, 即波束因子. 将(6), (7) 式的径向分量与(5)式比较, 根据球贝塞尔函数和缔合勒让德函数的正交性, 可得

$$g_n = \frac{k(2n+1)}{i^{n-1} j \pi n(n+1)} \times \int_0^\pi r F_j(kr) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d(kr) d\theta, \quad (8)$$

其中

$$F = iQ_0 \exp[-iQ_0 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{w_0^2} + ik(r \cos \theta - z_0)] \times (1 + 2Qr \cos \theta/l) \sin \theta. \quad (9)$$

2. 2. 多球串粒子对高斯波束的散射

当高斯波束入射到由 N 个球形粒子所组成的串粒子体系, 选择波束束腰中心为坐标原点, 波束传播方向为 z 轴, 建立坐标系 $O_g\text{-}xyz$ 作为体系坐标系. 粒子 j 的坐标系为 $O_p\text{-}xyz$ 且相应的坐标轴平行. 对于在轴情况, 表示第 j 粒子球心位于坐标系 $O_g\text{-}xyz$ 的 $(0, 0, z_{0j})$.

散射体系中 j 粒子的散射场, 内部场以及入射场可以该粒子 j 为中心展开为矢量球谐函数的无穷级数形式

$$E_s(j) = \sum_n E_n [i d_n^j N_{01n}^{(3)} - b_n^j M_{01n}^{(3)}], \quad (10)$$

$$H_s(j) = \frac{k}{\omega\mu} \sum_n E_n [i b_n^j N_{01n}^{(3)} + d_n^j M_{01n}^{(3)}], \quad (11)$$

$$E_l(j) = \sum_n E_n [c_n^j M_{01n}^{(1)} - i d_n^j N_{01n}^{(1)}], \quad (12)$$

$$H_l(j) = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_n E_n [d_n^j M_{01n}^{(1)} - i c_n^j N_{01n}^{(1)}], \quad (13)$$

$$E_i(j) = -\sum_n E_n [i p_n^j N_{01n}^{(1)} - q_n^j M_{01n}^{(1)}], \quad (14)$$

$$H_i(j) = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_n E_n [i q_n^j N_{01n}^{(1)} + p_n^j M_{01n}^{(1)}]. \quad (15)$$

利用边界条件, 粒子 j 的入射场展开系数, 以及散射场展开系数之间满足如下线性关系:

$$\mathbf{d}^j = \mathbf{T}^j \mathbf{p}^j, \quad (16)$$

其中 \mathbf{T}^j 是对角矩阵, 其矩阵元素即经典的单球散射的 Mie 系数. $\mathbf{d}^j, \mathbf{p}^j$ 分别是散射、入射场展开系数 $(d_n^j, b_n^j)^T, (p_n^j, q_n^j)^T$ 的简写. 因此只要知道了入射场展开系数的解析形式, 由(16) 式, 即可获得粒子 j 散射场的展开系数.

而入射到粒子 j 上的入射场应包括两部分, 即外部入射场, 以及来自粒子 $l (l \neq j)$ 上的散射场,

$$E_i^j = E_{i0}^j + \sum_{l \neq j} E_s^l. \quad (17)$$

对波束入射, 外部入射场的具体形式如(6), (7) 式所示, 记粒子 j 单独存在时相对波束坐标系的波束展开因子为 $g_n(j)$. 利用矢量球谐函数的加法定理, 将以其他粒子自身坐标为中心展开的散射场平移到散射体 j 的中心上来. 其展开系数之间的一系列相互作用方程为

$$\mathbf{d}^j = \mathbf{T}^j (\mathbf{P}^j g_n(j) + \mathbf{H}^j \mathbf{a}^l) \quad j \neq l, \quad (18)$$

其中 \mathbf{P}^j 表示平面波入射条件下粒子 j 的入射场展开系数, \mathbf{H}^j 是描述粒子间相互耦合作用的矩阵, 它只与粒子间的距离, 方位有关. 至此, 我们得到了波束入射下可以采用渐进迭代方法进行求解的一组线性方程. 与平面波入射下得到的类似方程相比(文献[1]中的 30 式) 波束入射情况在入射场展开系数上解析的叠加了波束因子项. 需要特别指出的是, 本文处理的是在轴串粒子模型, 因此(10) — (15) 式展开系数的设定与文献[1]不再相同.

故以体系中心展开的总的散射场的展开系数, 应为各个粒子散射场展开系数的叠加

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^N \mathbf{J}^{0j} \mathbf{d}^j, \quad (19)$$

其中 \mathbf{J}^{jl} 与 \mathbf{H}^{jl} 具有完全相同的形式, 只是其中用到

的是球 Bessel 函数, 而不是球 Hankel 函数. 由散射截面、消光截面的定义, 则对波束, 有

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) |g_n|^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (20)$$

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) |g_n|^2 \text{Re}\{a_n + b_n\}, \quad (21)$$

其中 $(a_n, b_n)^T$ 即体系的总散射场展开系数 a .

3. 数值结果

本文数值计算了位于高斯波束轴上的一串粒子的消光系数, 散射系数, 散射强度, 极化度随波束宽度的变化情况, 并与平面波入射进行了比较. 为方便起见, 下面的讨论中设定入射波束沿 z 轴正向入射, 波长为 $\lambda = 0.6283\mu\text{m}$.

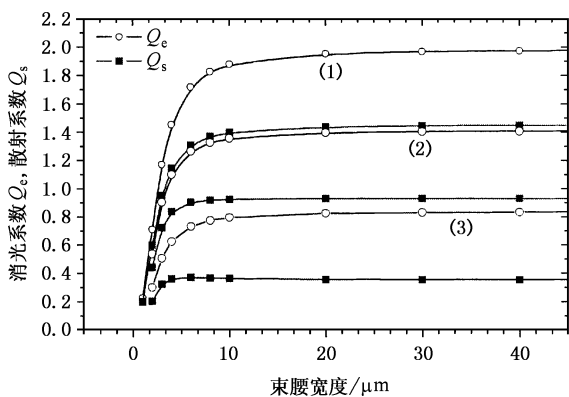
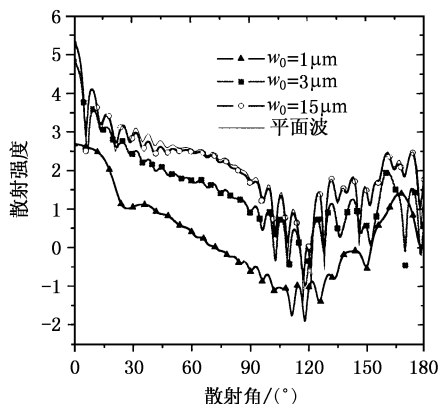


图 1 散射系数消光系数随波束宽度的变化

图 1 为消光系数与散射系数随波束束宽半径的变化情况. 两粒子的折射率都为 $m = 1.5 + 0.005i$,



两个粒子尺寸参数分别为 30, 10, 球心间的距离 $d_{12} = 7\mu\text{m}$. 消光系数 $Q_e = \sigma_{\text{ext}}/\pi r_V^2$ (r_V 是等体积的球半径) 用空心的圆点表示, 散射系数 $Q_s = \sigma_{\text{scat}}/\pi r_V^2$ 用实心的方点表示. 图 1 中的曲线 1 表示大粒子在前, 这时大、小粒子在体系坐标系中的坐标值分别为 $(0, 0, 0), (0, 0, 7\mu\text{m})$; 曲线 2 表示大粒子在后, 这时大、小粒子在体系坐标系中的坐标值分别为 $(0, 0, 7\mu\text{m}), (0, 0, 0)$; 曲线 3 表示大粒子在后, 这时大、小粒子在体系坐标系中的坐标值分别为 $(0, 0, 8\mu\text{m}), (0, 0, 1\mu\text{m})$, 即整体沿 z 轴正向平移了 $1\mu\text{m}$.

由图 1 中可以看出, 总的各曲线的变化趋势是随着波束束腰半径的增大而单调递增的. 曲线 1 与曲线 2 相比可知, 对给定的两个粒子当大粒子在前时, Q_e 以及 Q_s 值更大. 曲线 2 与曲线 3 相比可知, 粒子离波束中心的距离越远 Q_e 以及 Q_s 值更小.

图 2 为散射强度以及极化度的角分布随波束束宽半径的变化情况. 两粒子的折射率都为 $m = 1.33 + 0.0i$. 两粒子尺寸参数分别为 30, 3, 球心间的距离 $d_{12} = 3.3\mu\text{m}$. 散射角定义为 $O_g \text{-} \underline{xz}$ 面内散射方向与 z 轴之间的夹角. 图 2 中散射强度指在 $O_g \text{-} \underline{xz}$ 平面内的散射强度分量 $\log(I_{\text{slit}}/I_0)$.

由图 2 可以看出, 当如上参数的两个粒子处于波束入射下时, 体系总散射强度的干涉效应明显减少, 表现在曲线的波动振荡明显小于相应的平面波入射情况. 且总的散射强度, 尤其前向上(散射角为 0 度时)较平面波入射减弱的更为明显. 因为束宽越窄, 对应的球谐函数展开式的波束因子 g_n 随求和项数 n 下降迅速^[7], 而另一方面, 粒子尺寸参数越大, 数值计算中求和项数的截断数越大, 就必将导致窄高斯波束入射时散射场的明显减小. 这与在轴波束

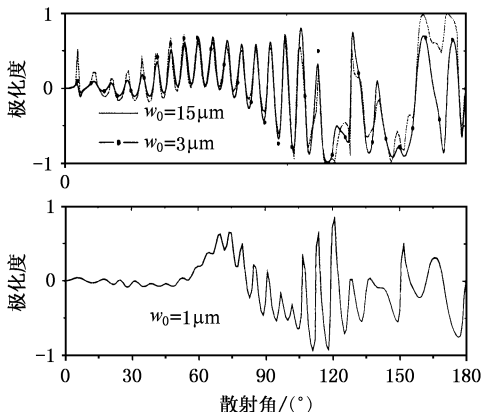


图 2 散射强度角分布以及极化度随波束宽度的变化

入射对单个球形粒子、多层球粒子相关规律类似. 由于文章篇幅所限, 更多算例方面的讨论详见文献[11].

图3为三个粒子的散射强度以及极化度的角分布随波束束宽半径的变化情况. 粒子的折射率都为 $m = 1.33 + 0.0i$. 尺寸参数都为10, 且相互接触. 一个粒子的球心在波束坐标中心, 其他两个粒子沿 z 轴正向依次放置. 图3中的散射强度仍为 $O_{e_{xz}}$ 平面内的散射强度分量.

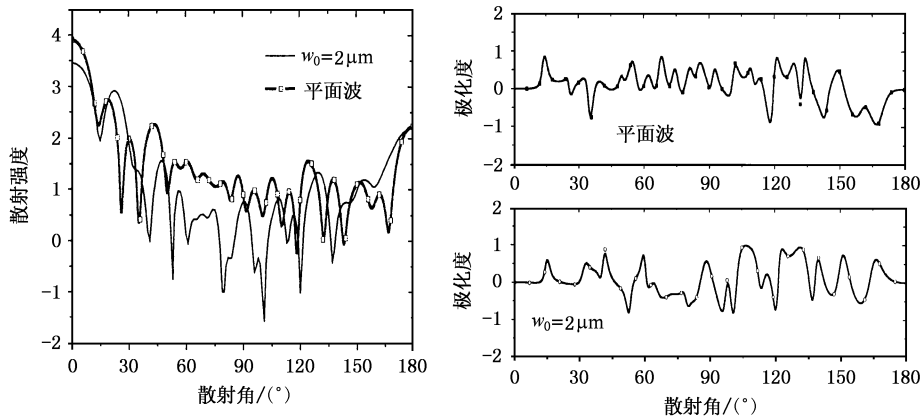


图3 散射强度角分布以及极化度随波束宽度的变化

4. 结 论

本文基于平面波入射下的群聚粒子散射, 以及GLMT对单个复杂粒子(如均匀球、椭球、多层球)的散射理论. 将两者通过具体的展开入射高斯波束的矢量球谐函数的展开系数而巧妙的结合起来, 平面波的群聚粒子散射理论指出, 体系中的任意粒子, 只要解析地知道了其入射场的展开系数, 则该粒子的散射场展开系数即可获得. 因此本文将入射高斯波束用平面波角谱展开, 利用旁轴近似得到的波束因子, 修正群聚粒子散射场展开系数中的平面波入射展开系数项, 从而得到波束入射下体系散射场展开

由图3可见, 当3个等大的粒子处在入射波束轴上时, 其总的散射强度随散射角的分布规律仍然满足波束入射较平面波入射强度降低(尤其前向)这一规律, 但由于这时体系更趋复杂, 体系中粒子的多重散射所引起的干涉效应应使其极化度的角分布规律不再与图2中的规律一致, 波束入射即使是窄波束入射(束腰半径 $w_0 = 2\mu\text{m}$) 极化度的角分布规律较平面波也不再表现为明显的振荡减弱.

系数的相互作用方程. 通过迭代求解, 得到体系总散射场展开系数.

文中数值计算了在轴波束入射下串粒子体系的散射系数, 消光系数, 散射强度以及极化度的角分布情况. 讨论了波束宽度、粒子在轴位置远近, 大小粒子在波束场中排放次序等因素对体系散射系数, 消光系数的影响. 讨论了多粒子在轴情况与双粒子, 单个粒子在轴情况相比较散射强度、极化度随波束宽度的影响, 并与平面波入射的情况做了对比. 对于其他形式的入射高斯波束, 如平顶高斯波束^[12]、厄米-高斯波束、贝塞尔-高斯波束等其他形式的入射波束, 只要其入射场展开系数可以解析的得到, 则文中所讨论的方法也同样可以适用.

[1] Xu Y L 1995 *Appl. Opt.* **34** 4573

[2] Tang W *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4173 (in Chinese) [汤炜等 2004 物理学报 **53** 4173]

[3] Mishchenko M I, Hovenier J W and Travis L D 1999 *Light scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications* (New York: Academic) p147

- [4] Gouesbet G and Gréhan G 2000 *Atomization and Sprays* **10** 277
- [5] Gouesbet G, Gréhan G and Mahen B 1988 *Appl. Opt.* **27** 4874
- [6] Gouesbet G, Gréhan G and Mahen B 1990 *J. Opt. Soc. Am. A* **7** 998
- [7] Wu Z S *et al* 1995 *Acta Electronica Sinica* **23** 32 (in Chinese)[吴振森等 1995 电子学报 **23** 32]
- [8] Wu Z S *et al* 1997 *Appl. Opt.* **36** 5188
- [9] Han Y P and Wu Z S 2001 *Applied Optics* **40** 2501
- [10] Han Y P and Wu Z S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 57 (in Chinese)[韩一平、吴振森 2000 物理学报 **49** 57]
- [11] Zhensen Wu and Lu Bai 2003 *The 6th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory* (Beijing) p464
- [12] Luo S R and Lü B D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3067 (in Chinese)[罗时荣、吕百达 2003 物理学报 **52** 3067]

Scattering of fundamental Gaussian beam from on-axis cluster spheres*

Bai Lu[†] Wu Zhen_Sen Chen Hui Guo Li_Xin
(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 7 April 2004; revised manuscript received 23 September 2004)

Abstract

Based on the generalized Lorenz_Mie theory (GLMT), the incident fundamental Gaussian beam is expanded in terms of the vector spherical harmonics. The interaction of Gaussian beam with a cluster composed of spheres located on the propagation axis is analyzed. The numerical results are discussed and compared with those obtained in the plane wave incident case.

Keywords: Gaussian beam, generalized Lorenz_Mie theory, scattering

PACC: 4110H, 4170, 0380

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60371020), and the Youth Scientific Research Workstation in Xidian University.

[†]E-mail: blu@xidian.edu.cn