第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2474-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

Lagrange 系统在施加陀螺力后的对称性*

吴惠彬† 梅凤翔

(北京理工大学理学院,北京 100081)

(2004 年 8 月 20 日收到;2004 年 10 月 18 日收到修改稿)

研究 Lagrange 系统在施加陀螺力后的 Noether 对称性与 Lie 对称性.给出系统在施加陀螺力后,可保持其 Noether 对称性与 Noether 守恒量的条件.给出系统在施加陀螺力后,可保持其 Lie 对称性与 Hojman 守恒量的条件.最后,举例说明结果的应用.

关键词:Lagrange 系统,陀螺力,对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引 言

用对称性方法研究力学系统的守恒量是数学物理科学,特别是分析力学的一个近代方法.对称性主要有 Noether 对称性[1—3],Lie 对称性[2—10]和形式不变性[11—16].陀螺力是一类重要的作用力.本文研究 Lagrange 系统在施加陀螺力后 Noether 对称性与 Lie 对称性是否能保持的问题,以及 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量是否能保持的问题.

2. Lagrange 系统及施加陀螺力后的系统的微分方程

Lagrange 系统的微分方程可表示为

$$E_s(L)=0 \quad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}. \tag{2}$$

为 Euler 算子,$L=L(t,q,\dot{q})$为 Lagrange 函数.一般说来,L 不一定是有动势的意义.Lagrange 系统可包括下列三种系统:(1)完整保守系统;(2)广义力有广义势的完整系统;(3)Lagrange 逆问题系统.

现在对系统(1)施加陀螺力 Γ_s

$$\Gamma_s=\gamma_{sk}(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_k,$$

$$\gamma_{sk}=-\gamma_{ks}(s,k=1,\cdots,n), \tag{3}$$

此时方程表示为

$$E_s(L)=\Gamma_s, \tag{4}$$

称方程(4)为施加陀螺力后的 Lagrange 方程.

3. Noether 对称性与 Noether 守恒量的保持

原系统(1)的 Noether 等式为

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}_N=0, \tag{5}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{6}$$

而 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为规范函数.系统(1)的 Noether 守恒量为

$$I_N=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\mathrm{const}. \tag{7}$$

施加陀螺力后的系统(4)的 Noether 等式为

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\Gamma_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}'_N=0. \tag{8}$$

系统(4)的 Noether 守恒量为

$$I'_N=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G'_N=\mathrm{const}. \tag{9}$$

比较(8)式与(5)式,(9)式与(7)式,得到

命题 1 如果陀螺力 Γ_s 和无限小生成元 ξ_0,ξ_s

---

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)和教育部博士点基金(批准号:20040007022)资助的课题.

†联系人.E-mail:huibinwu@bit.edu.cn

满足条件

$$\Gamma_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0, \tag{10}$$

那么施加陀螺力后系统的 Noether 对称性与 Noether 守恒量保持不变.

4. Lie 对称性与 Hojman 守恒量的保持

系统(1)的 Lie 对称性确定方程为

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} = 0, \tag{11}$$

系统(4)的 Lie 对称性确定方程为

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} - X^{(1)}(\Gamma_s) = 0, \tag{12}$$

其中

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}.$$

比较方程(12)与(11),得

命题 2 若陀螺力 Γ_s 和无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足条件

$$X^{(1)}(\Gamma_s) = 0. \tag{13}$$

则施加陀螺力后系统的 Lie 对称性保持不变.

下面研究 Lie 对称性直接导致的 Hojman 守恒量. 假设系统(1)的显式为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{14}$$

而系统(4)的显式为

$$\ddot{q}_s = \alpha'_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{15}$$

其中

$$\alpha'_s = \alpha_s + \frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\Gamma_k, \quad \Delta = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right), \tag{16}$$

而 Δ_{ks} 为 Δ 的元素(k, s)的代数余子式.

当 $\xi_0 = 0$ 时,方程(14)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k, \tag{17}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{18}$$

如果存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{19}$$

那么系统(1)存在 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right). \tag{20}$$

当 $\xi_0 = 0$ 时,方程(15)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\partial \alpha'_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \alpha'_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k, \tag{21}$$

其中

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha'_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{22}$$

如果存在某函数 $\mu' = \mu'(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial \alpha'_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu' = 0, \tag{23}$$

那么系统(4)存在 Hojman 守恒量

$$I'_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu'\xi_s) + \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu'\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right). \tag{24}$$

于是,我们有

命题 3 在时间不变的无限小变换下,如果陀螺力 Γ_s 和生成元 ξ_s 满足

$$\frac{\partial \Gamma_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k = 0, \tag{25}$$

以及

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s, \quad \mu' = \mu, \tag{26}$$

那么在施加陀螺力后 Hojman 守恒量保持不变.

5. 算　　例

例 1 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2), \tag{27}$$

施加的陀螺力为

$$\Gamma_1 = q_2\dot{q}_2, \quad \Gamma_2 = -q_2\dot{q}_1. \tag{28}$$

施加陀螺力后,Noether 等式(8)给出

$$\begin{aligned} &L\dot{\xi}_0 + \dot{q}_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + \dot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) \\ &- q_1\xi_1 - q_2\xi_2 + q_2\dot{q}_2(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) \\ &- q_2\dot{q}_1(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) + G'_{\mathrm{N}} = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

取生成元为

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0, \tag{30}$$

则

$$\Gamma_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \Gamma_s\dot{q}_s = 0. \tag{31}$$

由命题 1 可知,在施加陀螺力后,系统的 Noether 对称性保持不变,Noether 守恒量也保持不变,即

$$I'_{\mathrm{N}} = I_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) = \mathrm{const}. \tag{32}$$

例 2 二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1, \tag{33}$$

陀螺力为

$$\Gamma_1 = -\dot{q}_2, \Gamma_2 = \dot{q}_1. \tag{34}$$

方程(14)给出

$$\ddot{q}_1 = -1, \ddot{q}_2 = 0. \tag{35}$$

方程(15)给出

$$\ddot{q}_1 = -1 - \dot{q}_2, \ddot{q}_2 = \dot{q}_1. \tag{36}$$

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \tag{37}$$

则(25)式满足,(19)式给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{38}$$

(23)式给出

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu' = 0. \tag{39}$$

(38)和(39)式有解:

$$\mu' = \mu = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1, \tag{40}$$

故式(26)被满足.(20)和(24)式给出

$$I'_{\mathrm{H}} = I_{\mathrm{H}} = \left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1\right\}^{-1} = \mathrm{const}. \tag{41}$$

6. 结 论

一般说来,Lagrange 系统在施加陀螺力后,对称性和守恒量将发生变化.本文主要结果为:Lagrange 系统(1)在施加陀螺力后,若满足条件(10),则 Noether 对称性和 Noether 守恒量保持不变.若满足条件(25)和(26),则 Lie 对称性和 Hojman 守恒量保持不变.

[1] Li Z P 1993 *Classical and quantal dynamics of constrained systems and their symmetrical properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]

[2] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京:科学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[4] Mei F X 2000 *Acta Mech*. **141** 135

[5] Zhang H B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1

[6] Zhang Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 461(in Chinese)[张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[7] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048(in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[8] Zhang Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1832(in Chinese)[张 毅 2003 物理学报 **52** 1832]

[9] Fu J L and Chen L Q 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 695

[10] Liu R W and Chen L Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1615

[11] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Institute of Technology* **9** 120

[12] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Institute of Technology* **21** 535(in Chinese)[梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[13] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[14] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[15] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[16] Zhang Y and Mei F X 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1058

Symmetries of Lagrange system subjected to gyroscopic forces*

Wu Hui-Bin† Mei Feng-Xiang

(*Faculty of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 20 August 2004; revised manuscript received 18 October 2004)

Abstract

The Noether symmetry and Lie symmetry of the Lagrange system subjected to gyroscopic forces are studied. The condition that the system, under gyroscopic forces, can keep its Noether symmetry and Noether conserved quantity is given. And the condition that the system subjected to gyroscopic forces can keep its Lie symmetry and Hojman conserved quantity is also given. Finally, two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Lagrange system, gyroscopic force, symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021) and the Doctoral Programme Foundation of the State Education Ministry of China (Grant No. 20040007022).

† Corresponding author. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn