第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2482-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54,No.6,June,2005

分析热力学的应用：平衡态热力学中温度的相对论变换

沈惠川†
(中国科学技术大学天文与应用物理系统计力学中心,合肥 230026)

(2004 年 5 月 17 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

用分析热力学的观点和方法研究了温度的相对论变换公式,得到了与 Planck,Einstein 和 de Broglie 完全相同的结果:$T=\sqrt{1-\beta^2}\,T_0$.分析热力学的特色和优点是,在推演过程中根本不需要 $\delta Q=\sqrt{1-\beta}\,\delta Q_0$ 这一可能引起争议的和 $p=p_0$ 这一显而易见的相对论变换公式,它们是作为附带结果出现的.

关键词:分析热力学,相对论热力学,平衡态热力学,热力学基本 Poisson 括号
PACC:0320,0412,0570

1. 引 言

自 1905 年 A. Einstein 发表相对论以来,物理学家对热力学量的相对论变换已作了全方位的探讨;但关于温度的相对论变换公式,从 1963 年 H. Ott 开始,至今仍有人在说"三"道"四".其中最主要的观点有以下 3,4 种:

(1) Planck[1],Einstein[2],de Broglie[3] 认为

$$T=\sqrt{1-\beta^2}\,T_0,\tag{1}$$

(2) Eddington[4],Ott[5],Møller[6] 认为

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\tag{2}$$

(3) Landsberg[7—11] 认为

$$T=T_0,\tag{3}$$

(4) 另有部分人(例如 R. G. Neuburgh)认为,T_0 和 T 之间没有确定的变换关系.

上述各式中 T_0 为热力学系统在相对于它为静止的参考系 $\sum_0$ 中的 Kelvin 温度,T 为该热力学系统在另一个相对于 $\sum_0$ 以速度 $v_k=\beta_k c$ ($k=1,2,3$) 运动的惯性参考系 $\sum$ 中的 Kelvin 温度;c 为光速.

需要说明的是,de Broglie[3] 证明 Planck-Einstein 变换公式 $T=\sqrt{1-\beta^2}\,T_0$ 的方法与众不同.根据相对论[2],当一位静止的观测者关注着以速度 $v_k=\beta_k c$ ($k=1,2,3$) 运动的热力学系统时,系统内部某种周期运动的频率 ν_0 在此观测者眼里是

$$\nu=\sqrt{1-\beta^2}\,\nu_0,\tag{4}$$

紧接此式,de Broglie 由

$$k_B T=h\nu.\tag{5}$$

立即得到了与 Planck-Einstein 相同的结论.式中 k_B 和 $h=2\pi\hbar$ 分别为 Boltzmann 常数和 Planck 常数.L. de Broglie 由此建立了"单粒子"(la particule isolee)的热力学理论.

我国学者谈镐生等人[12] 和叶壬癸[13—15] 于 1982 年开始注意到有关温度的相对论变换方面的争论.在 Planck[1] 和 Einstein[2] 的论文中曾指出,若将热力学过程中外界对系统所做的元功 $\text{đ}A$ 分解为容积 V 变化所对应的元功($-p\mathrm{d}V$)与系统动量 p_k^* 变化所对应的元功($\dot q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*$)之和,则关于系统内能 U 变化的热力学第一定律可写成

$$\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V-p_k^*\,\mathrm{d}\dot q_k^*,\tag{6}$$

式中 S 和 p 分别为热力学系统的熵和压强;q_k^* 和 p_k^* 分别为系统作整体运动时的广义坐标和广义动量,$\dot q_k^*=\frac{\mathrm{d}q_k^*}{\mathrm{d}t}$ 为广义速度;重复角标按 Einstein 约定求和($k=1,2,3$).谈镐生等人的文章从另一角度出发,证明了(6)式的正确性并重新得到了(1)式;同时还分析了 Eddington 和 Møller 的错误原因,并指出了

† E-mail:shenhuichuan@tsinghua.org.cn
shenhuichuan@ustc.edu

Møller 模型的正确处理方案. 谈镐生等人认为，在$\sum_0$参考系中的观测者看来，当$\sum$参考系中热力学系统以速度 $v_k=\beta_k c(k=1,2,3)$运动时是有整体动量的，因而 Eddington 所认为的"功和热量都是能量因而必须符合质量的相对论变换公式"以及他所得到的 $\delta A=\frac{\delta A_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$和 $\delta Q=\frac{\delta Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$都是错误的. 但是谈镐生等人的文章对 Eddington 的错误原因分析得不够透彻. 式中 δA_0 和 δA 分别为在$\sum_0$ 参考系中和在$\sum$参考系中外界对热力学系统所作的元功，δQ_0 和 δQ 分别为在$\sum_0$ 参考系中和在$\sum$参考系中所观测到的热力学系统吸收的元热量. 至于 Møller 的错误论证，谈镐生等人在文章中也有一句同样的关键话没有说，即正确的处理方案应是先对实际热力学过程进行 Lorentz 变换，然后再在两个参考系$\sum_0$ 和$\sum$中取准静态极限；而 Møller 的错误在于将这两种操作次序颠倒了过来.

叶壬癸的文章则指出，所有依赖于 $\delta Q=\sqrt{1-\beta^2}\,\delta Q_0$ 推导出来的关于温度的相对论变换公式，都是有毛病的；他从狭义相对论与平衡态热力学之间的逻辑关系出发，指出关于温度的相对论变换公式的正确形式应是 Planck-Einstein 的.

近年来丁光涛等(1985 年)，李复龄[16] (1989 年)，聂金柱等(1994 年)，高天寿[17] (1994 年)，王家庆(1996 年和 2000 年)，张志远(1996 年)，以及陆全康[18] (1997 年)，高连歌等(1998 年)，刘发兴等(1998 年)，李慧(1999 年)，张有生[19] (2001 年)，李延龙等(2002 年)，也分别从不同角度讨论了这一问题.(请查阅 CNKI.net 和 ScienceChina.net.cn). 张有生在文章中所说的"尚能取得共识的是：体系的粒子数 N，熵 S 和压强 p 是 Lorentz 不变量"；"体积 V 是 Lorentz 收缩的"一席话与 Einstein 在文献[2]中的结论是一致的，即

$$N=N_0,\ S=S_0,\ p=p_0,\ V=\gamma^{-1}V_0,\tag{7}$$

式中

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\tag{8}$$

丁光涛等人和聂金柱等人的文章亦站在 Planck-Einstein-de Broglie 一边. 李复龄，陆全康，高连歌等人和王家庆则与 Ott 所持观点相同. 但值得一提的是文献[17]中的错误. 首先，文献[17]用于讨论压强 p 和温度 T 的相对论变换公式的基本出发点是分子运动论中非相对论分子的近似表达式

$$p=\frac{2}{3}\tilde{n}\langle\varepsilon\rangle,\ \frac{3}{2}k_{\rm B}T=\langle\varepsilon\rangle,$$
$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}m\langle u^2\rangle,\tag{9}$$

式中 m 为分子质量，$\tilde{n}$ 为热力学系统的分子数密度，$\langle\varepsilon\rangle$为非相对论分子平动能的平均值，$u_k(k=1,2,3)$为非相对论分子无规运动的速度分量. 由于参考系$\sum$相对于$\sum_0$ 以速度 $v_k=\beta_k c$ 运动使$\langle\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}m\langle u^2\rangle$中的 u_k 必须符合相对论速度相加公式，因而经过简单的计算可以证明文献[17]所说的"随机速度平方的平均不随参考系变换而改变"根本是错误的；从而为$\langle\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}m\langle u^2\rangle$所作的统计平均也是根本错误的. 利用 $p=\frac{2}{3}\tilde{n}\langle\varepsilon\rangle$和$\frac{3}{2}k_{\rm B}T=\langle\varepsilon\rangle$二式的实质，就是仅考虑分子平动能的平均值，所以文献[17]与 Eddington 没有考虑"当$\sum$参考系中热力学系统以速度 $v_k=\beta_k c$ 运动时是有动量的"所犯的错误也是相同的，其结果 $T=\gamma T_0$ 亦与 Eddington 错得相同. 其次，因为文献[17]的$\langle\varepsilon\rangle$相对论变换的错误，导致 $p=\gamma^2 p_0$ 的更大错误；实际上如果用$\langle\varepsilon\rangle$相对论变换是$\langle\varepsilon\rangle=\sqrt{1-\beta^2}\langle\varepsilon_0\rangle$的正确形式，则由分子数密度的相对论变换公式$\tilde{n}=\gamma\tilde{n}_0$，正好可以得到"压强 p 是 Lorentz 不变量"的正确结果.

本文从分析热力学[20-22]的角度重新讨论平衡态热力学中温度的相对论变换. 讨论的出发点是由 Planck 和 Einstein 的"将热力学过程中外界对系统所做的元功 $\text{đ}A$ 分解为容积 V 变化所对应的元功 $(-p\mathrm{d}V)$与系统动量 p_k^* 变化所对应的元功 $(\dot{q}_k^*\,\mathrm{d}p_k^*)$之和"得到的(6)式，以及 Planck 所认证的"同一系统在不同惯性系中的熵相同"(即"熵是 Lorentz 标量")这一普遍认同的假设. 其中，前一个出发点作为相对论热力学第一定律的必然表达式尽管为 Eddington 和 Ott 所违反，但也没有被他们刻意否认；他们以及 Møller 的问题将在本文文末进行讨论. 另外，由于叶壬癸说过"所有依赖于 $\delta Q=\sqrt{1-\beta^2}\,\delta Q_0$ 推导出来的关于温度的相对论变换公式，都是有毛病的"，所以本文有意 避 $\delta Q=\sqrt{1-\beta^2}\,\delta Q_0$ 这一相对论变换公式. 同时，尽管文献[17]中的结果 $p=\gamma^2 p_0$ 是错误的，但本文在论证温度的相对论变换公式时仍然避免提早使用 $p=p_0$ 这一正确公式，而宁可将其作为结论自然地推导出来；目的是不给人

以‘蛮不讲理’和‘强加于人’的错觉.

2. 分析热力学基础及其主要内容

关于不涉及系统整体运动的分析热力学[20—22]，其基础有二：一为 Pfaff 方程（在较为一般的开系中是）

$$\begin{cases} \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu_i \mathrm{d}n_i. \end{cases} \tag{10}$$

二为 Gibbs 变分原理（de Broglie 称为‘Carnot 变分原理’）

$$\begin{cases} \delta S = 0 \quad \delta^2 S < 0, \\ \delta F = 0 \quad \delta^2 F > 0, \\ \delta G = 0 \quad \delta^2 G > 0. \end{cases} \tag{11}$$

式中 F，G，H 分别为热力学系统的 Helmholtz 自由能，Gibbs 自由能和焓；μ_i，n_i 分别为热力学系统的化学势（或称为‘热势’和‘热力势’）和 mol 数，i 为组元编号；与前面一样，重复角标按 Einstein 约定求和.

实际上，Pfaff 方程（10）式就是微分形式的热力学第一定律，而 Gibbs 变分原理（11）式则等价于热力学第二定律.由（10）和（11）式，可以得到平衡态热力学中的正则方程：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}n_i} = -\frac{\partial \mu_i}{\partial V}, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n_i} = \frac{\partial \mu_i}{\partial p}, \tag{12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n_i} = \frac{\partial \mu_i}{\partial S}, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n_i} = -\frac{\partial \mu_i}{\partial T}. \tag{12b}$$

而由（12a）和（12b）式，又可得到平衡态热力学中的基本 Poisson 括号

$$[V, p]_{V,p} = 1, \ [S, T]_{V,p} = 1. \tag{13}$$

因而，熵 S 和 Kelvin 温度 T，容积 V 和压强 p，是两对共轭正则变量.但是，平衡态热力学中每对共轭正则变量的乘积，其量纲都是能量量纲；它与经典力学或量子力学中每对共轭正则变量的乘积其量纲都是作用量量纲（或角动量量纲）完全不同.

进一步，从 Gibbs 变分原理还可以得到热力学正则变换和分析热力学中的‘准 Hamilton-Jacobi 方程”；不过，由于在平衡态热力学中 $\delta U \neq 0$ 以及 $\delta H \neq 0$，因而热力学正则变换只有 4 种而不是 16 种；同时，正是出于这一原因，分析热力学暂时还不能纳入“Birkhoff 系统动力学”[23]的范畴.

由于分析热力学与分析力学一样，都是建立在 Pfaff 方程，Legendre 变换和变分原理的数学基础上，因此所有在分析力学[24,25]中讨论的事，也可以在分析热力学或者‘分析力学—热力学’中进行讨论.例如，分析力学中的‘化 Hamiltonian 为动量的正则变换技术’[26,27]就可以用于分析热力学，以化简化学势（正则函数）的表达式.

3. 整体运动热力学系统中的新的共轭正则变量

在作整体运动的热力学系统（开系）中，其 Pfaff 方程是（10）式的直接推广：

$$\begin{cases} \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V - p_k^* \mathrm{d}\dot{q}_k^* + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V - p_k^* \mathrm{d}\dot{q}_k^* + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p - p_k^* \mathrm{d}\dot{q}_k^* + \mu_i \mathrm{d}n_i, \\ \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}V - p_k^* \mathrm{d}\dot{q}_k^* + \mu_i \mathrm{d}n_i, \end{cases} \tag{14}$$

式中 $\dot{q}_k^*$ 和 p_k^* 分别为系统作整体运动时的广义速度和广义动量.由（14）式可知（为简化书写略去脚标 k 和 i）

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\dot{q}^*,n}, \\ p &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\dot{q}^*,n}, \\ p_k^* &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k^*}\right)_{T,V,n}, \\ \mu_i &= \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{T,V,\dot{q}^*}. \end{aligned} \tag{15}$$

从而得到

$$\begin{aligned} [p_k^*, \dot{q}_l^*]_{V,p} &= \frac{\partial(p_k^*, \dot{q}_l^*)}{\partial(V,p)} \\ &= \frac{\partial(p_k^*, \dot{q}_l^*)/\partial(V, \dot{q}_l^*)}{\partial(V,p)/\partial(V,\dot{q}_l^*)} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial p_k^*}{\partial V}\right)_{\dot{q}^*}}{\left(\frac{\partial p}{\partial \dot{q}_l^*}\right)_V} \\ &= \frac{-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial \dot{q}_k^*}\right)_{T,V,\dot{q}^*,n}}{-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_l^* \partial V}\right)_{T,V,\dot{q}^*,n}} = \delta_{kl}, \end{aligned}$$

即有基本 Poisson 括号：

$$[p_k^*, \dot{q}_l^*]_{V,p} = \delta_{kl}, \tag{16}$$

式中 δ_{kl} 为 Krönecker 符号. 上式（兼顾正则方程（12a）和（12b））表明在作整体运动的热力学系统中，整体运动的广义动量 p_k^* 和广义速度 $\dot{q}_k^*$ 是一对新的共轭正则变量. 由于平衡态热力学中每对共轭正则变量的乘积，其量纲都是能量量纲，所以与广义动量 p_k^* 共轭的是广义速度 $\dot{q}_k^*$，而不是分析力学中的广义坐标 q_k^*.

由（13）式，又有

$$[p_k^*,\dot{q}_l^*]_{S,T}=\frac{\partial(p_k^*,\dot{q}_l^*)}{\partial(S,T)}=\frac{\partial(p_k^*,\dot{q}_l^*)}{\partial(V,p)}\cdot\frac{\partial(V,p)}{\partial(S,T)}=\frac{[p_k^*,\dot{q}_l^*]_{V,p}}{[S,T]_{V,p}}=\frac{\delta_{kl}}{1}.$$

于是又有基本 Poisson 括号：

$$[p_k^*,\dot{q}_l^*]_{S,T}=\delta_{kl}. \tag{17}$$

同理还有另两个基本 Poisson 括号：

$$[n_i,\mu_j]_{V,p}=\delta_{ij}, \tag{18}$$

和

$$[n_i,\mu_j]_{S,T}=\delta_{ij}. \tag{19}$$

4. 温度的相对论变换公式

回到本文讨论的问题. 以下标 0 表示在相对于热力学系统为静止的 Σ_0 参考系中的热力学量和力学量. 根据相对论[2]，动量的相对论变换为

$$p_l^*=(\delta_{kl}+\alpha\beta_k\beta_l)p_{0k}^*+\beta_l\gamma\frac{E_0}{c}, \tag{20}$$

而速度的相对论相加公式是

$$\dot{q}_k^*=\frac{(\delta_{kl}+\alpha\beta_k\beta_l)\dot{q}_{0l}^*+\beta_k\gamma c}{\gamma\left(1+\beta_m\frac{\dot{q}_{0m}^*}{c}\right)}. \tag{21}$$

式中 $\beta_k c=v_k\,(k=1,2,3)$ 为运动参考系 Σ 相对于参考系 Σ_0 的运动速度，E_0 为热力学系统在参考系 Σ_0 中的整体运动的能量，而

$$\alpha=\frac{\gamma^2}{\gamma+1},\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad\left(\text{或 }\beta^2=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right). \tag{22}$$

因为

$$\frac{\partial p_l^*}{\partial p_{0l}^*}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\quad（\text{不对 } l \text{ 求和}）, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\dot{q}_k^*}{\partial\dot{q}_{0k}^*}=\frac{1-\beta^2}{\left(1+\beta_l\frac{\dot{q}_{0l}^*}{c}\right)^2}\cong1-\beta^2\quad（\text{不对 } k \text{ 求和}）, \tag{24}$$

（其中用到了热力学系统‘整体运动速度不大’或‘取准静态极限’的假设）所以，

$$\frac{\partial(p_l^*,\dot{q}_k^*)}{\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_{0k}^*)}=\frac{\partial(p_l^*,\dot{q}_k^*)/\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_k^*)}{\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_{0k}^*)/\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_k^*)}=\frac{\partial p_l^*}{\partial p_{0l}^*}\cdot\frac{\partial\dot{q}_k^*}{\partial\dot{q}_{0k}^*}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(1-\beta^2)=\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25}$$

又因为（17）式有

$$1=\frac{[p_l^*,\dot{q}_k^*]_{S,T}}{[p_{0l}^*,\dot{q}_{0k}^*]_{S_0,T_0}}=\frac{\partial(p_l^*,\dot{q}_k^*)}{\partial(S,T)}\cdot\frac{\partial(S_0,T_0)}{\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_{0k}^*)}=\frac{\partial(p_l^*,\dot{q}_k^*)}{\partial(p_{0l}^*,\dot{q}_{0k}^*)}\cdot\frac{\partial(S_0,T_0)}{\partial(S,T)}. \tag{26}$$

所以将（25）式代入（26）式后得到

$$\frac{\partial(S,T)}{\partial(S_0,T_0)}=\sqrt{1-\beta^2}=\gamma^{-1}. \tag{27}$$

最后，应用 Planck 的‘同一系统在不同惯性系中的熵相同’（即‘熵是 Lorentz 标量’）这一普遍认同的假设，即

$$S=S_0, \tag{28}$$

就有

$$\frac{\partial(S,T)}{\partial(S_0,T_0)}=\frac{\partial(S_0,T)}{\partial(S_0,T_0)}=\left(\frac{\partial T}{\partial T_0}\right)_{S_0}=\sqrt{1-\beta^2}. \tag{29}$$

于是，

$$T=\sqrt{1-\beta^2}\,T_0=\gamma^{-1}T_0. \tag{30}$$

5. 几个附带的相对论变换公式

首先，根据基本 Poisson 括号（16）式，有

$$1=\frac{\partial(p_k^*,\dot{q}_k^*)}{\partial(V,p)}$$

$$= \frac{\partial(p_l^*, \dot{q}_k^*)}{\partial(V, p)} \cdot \frac{\partial(V_0, p_0)}{\partial(p_{0l}^*, \dot{q}_{0k}^*)}$$

$$= \frac{\partial(p_l^*, \dot{q}_k^*)}{\partial(p_{0l}^*, \dot{q}_{0k}^*)} \cdot \frac{\partial(V_0, p_0)}{\partial(V, p)}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{\partial(V_0, p_0)}{\partial(V, p)},$$

即

$$\frac{\partial(V, p)}{\partial(V_0, p_0)} = \sqrt{1-\beta^2} = \gamma^{-1}. \tag{31}$$

将由容积 V 的相对论[2] 收缩公式(实际上源于长度沿运动方向的收缩)

$$V = \sqrt{1-\beta^2}\, V_0 = \gamma^{-1} V_0. \tag{32}$$

代入(31)式,就自然得到

$$p = p_0. \tag{33}$$

其次,根据基本 Poisson 括号(19)式,有

$$1 = \frac{\partial(n_i, \mu_i)}{\partial(S, T)} = \frac{\partial(n_i, \mu_j)}{\partial(S, T)} \cdot \frac{\partial(S_0, T_0)}{\partial(n_{0i}, \mu_{0j})}$$

$$= \frac{\partial(n_i, \mu_j)}{\partial(n_{0i}, \mu_{0j})} \cdot \frac{\partial(S_0, T_0)}{\partial(S, T)}$$

$$= \frac{\partial(n_i, \mu_j)}{\partial(n_{0i}, \mu_{0j})} \cdot \frac{\partial(S_0, T_0)}{\partial(S_0, T)},$$

即

$$\frac{\partial(n_i, \mu_j)}{\partial(n_{0i}, \mu_{0j})} = \left(\frac{\partial T}{\partial T_0}\right)_{S_0}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} = \gamma^{-1}. \tag{34}$$

对 mol 数不变的系统(即"闭系")来说,有

$$n_i = n_{0i}. \tag{35}$$

此时有

$$\mu_i = \sqrt{1-\beta^2}\, \mu_{0i}. \tag{36}$$

从而,在单元"闭系"中,其 Gibbs 自由能的相对论变换是

$$G = \sqrt{1-\beta^2}\, G_0. \tag{37}$$

既然在单元"闭系"中其 Gibbs 自由能的相对论变换是(37)式,那么对于所有热力学系统来说其 Gibbs 自由能的相对论变换都是(37)式.

最后,由 $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, n, \dot{q}^*}$ 可知,内能 U 的相对论变换也与(37)式类似:

$$U = \sqrt{1-\beta^2}\, U_0. \tag{38}$$

同样,由 $\delta Q = T\delta S$ 可得,元热量 δQ 的相对论变换是

$$\delta Q = \sqrt{1-\beta^2}\, \delta Q_0. \tag{39}$$

6. 结论和讨论

(A)用分析热力学的观点和方法来研究温度的相对论变换公式十分方便,而且在数学上十分严密;分析热力学的特色和优点是,在推演过程中根本不需要 $\delta Q = \sqrt{1-\beta^2}\,\delta Q_0$ 这一可能引起争议的相对论变换公式,甚至连 $p = p_0$ 这一显而易见(但也有人认为并非显而易见)的相对论变换公式都不需要,它们是作为附带结果在本文中出现的.与此相悖,若是按照 Ott-Møller 理论将热力学第一定律表成通常热力学中的(非相对论)形式,则利用容积 V 的 Lorentz 变换公式和压强 p 是 Lorentz 标量作为前提条件,仍然可得到温度 T 的 Lorentz 变换公式是 Planck-Einstein-de Broglie 的,而不是 Eddington-Ott-Møller 的.

(B)本文只有两个前提条件,即相对论热力学第一定律(6)式,以及 Planck 所认证的"同一系统在不同惯性系中的熵相同"(即"熵是 Lorentz 标量")这一普遍认同的假设.这两个前提条件由于其普遍性而根本算不上什么"额外条件".从而,本文的结果更具一般性.同时,由于本文的结果与 Planck-Einstein-de Broglie 的结论完全相符,反过来也说明,分析热力学理论是完全正确的.当然,分析热力学的两个前提条件,即 Pfaff 方程(对应于热力学第一定律)和 Gibbs 变分原理(对应于热力学第二定律)也根本算不上什么"额外条件".

(C)本文中推演温度的相对论变换公式的关键是(25)式,而在计算(25)式之前必先计算(23)式和(24)式;关键的关键是相对论动量公式(20)式和速度相加公式(21)式即

$$p_l^* = (\delta_{kl} + \alpha\beta_k\beta_l)\, p_{0k}^* + \beta_l\gamma\frac{E_0}{c},$$

$$\dot{q}_k^* = \frac{(\delta_{kl} + \alpha\beta_k\beta_l)\,\dot{q}_{0l}^* + \beta_k\gamma c}{\gamma\left(1 + \beta_m\frac{\dot{q}_{0m}^*}{c}\right)}$$

(后一式的通常形式即相对参考系沿 $q_1^* = q^*$ 运动时的形式为 $\dot{q}^* = \frac{\dot{q}_0^* + \beta c}{1 + \beta\frac{\dot{q}_0^*}{c}}$).注意,在进行(24)式偏导数运算之前不要急于将相对论速度相加公式(21)式化为通常形式,否则会导致错误结果.这中间有个"求导数运算和投影运动方向孰前孰后"的次序问题,必须格外注意并弄清其中的物理含义.

（D）一般来说，当问题中同时涉及相对论和热力学时，相对论考虑和热力学考虑并不分孰前孰后；但“平衡态”是一种近似，“准静态”则更是一种近似，而近似处理在理论分析中总是放到最后一步才去实现的．Eddington 的错误，表面上是对“系统动量 p_k^* 变化所对应的元功（$\dot{q}_k^* \mathrm{d}p_k^*$）”未加考虑，但其本质上则是将“Lorentz 变换”［在相对论热力学第一定律（6）式中应用“相对论速度相加公式”（21）式］和“取准静态极限”这两种操作次序颠倒了过来：在（6）式中不考虑（$-p_k^* \mathrm{d}\dot{q}_k^*$）这最后一项，实际上等同于过早地使用了“取准静态极限”条件［用非相对论热力学第一定律取代了相对论热力学第一定律（6）式］．而 Ott 和 Møller 的错误，表面上是将相对论考虑置于 δQ 之中，但其本质也在于将“Lorentz 变换”（即相对论速度相加公式及对其偏微商）和“取准静态极限”（即对分母的近似处理）这两种操作次序颠倒了过来：只是程度有所不同而已．与 Eddington 的错误稍微不同的是，Ott 和 Møller 的“取准静态极限”操作稍晚了几步（但也没有“放到最后一步去实现”）．此外，Møller 过早地引入 $p = p_0$，是导致他犯错的另一个原因．由此可见，Eddington，Ott 以及 Møller 的错误，包括所有导致 $T = \gamma T_0$ 的错误，都是这些作者违背相对论所致：这一点在分析热力学中看得格外清楚．

（E）从逻辑上讲，本文所证明的相对论变换关系与 Landsberg 的结果无关．Landsberg 错误的本质，在于他破坏了热力学第一定律必须具有不变形式这一得到公认的前提；关于这一点，在 Bazarov[28] 的书中看得很清楚．在所谓的“温度不变量的相对论热力学”中，甚至连许多最基本的热力学关系式都需要重写并且随着参考系的运动速度具有不确定性．换言之，在 Landsberg 和 Bazarov 的理论中，相对论热力学第一定律（6）式是不成立的．在他们的理论中只承认 Planck 的 $S = S_0$．由此可见，Landsberg 和 Bazarov 的错误，包括所有导致 $T = T_0$ 的错误，都是这些作者破坏热力学所致．至于 Landsberg 所提到的“两个相互运动参考系中的观测者将各认对方参考系中的温度降低，因而应有 $T = T_0$”的佯谬，实际上与通常在相对论讨论中出现的“尺缩钟慢”佯谬是同一类问题．这类问题已有许多人作了解释，故而不值一驳．

（F）本文的目的就是探讨温度的相对论变换，因而行文之初就已排斥了认为“T_0 和 T 之间没有确定的变换关系”的无理推测．认为“T_0 和 T 之间没有确定的变换关系”的奇谈怪论，实质上是某些作者犯了既违背相对论又破坏热力学这双重错误所致．至于，在 Bazarov 书中提到的（作为“T_0 和 T 之间没有确定的变换关系”的理由的）测温器具的方向问题，从来就不具有理论意义；例如，根据 de Broglie[3]，可利用（5）式测温．

（G）A. S. Eddington 作为坚定的相对论学者竟然做出违背相对论的事，P. T. Landsberg 作为著名的热力学工作者竟然写出破坏热力学的文章，是出人意料的．这再一次说明，在研究交叉科学的时候必须慎之又慎，必须对所涉及的几个领域的基本知识都了如指掌，而且要保持头脑清醒：不能因为照顾热力学而违背相对论，也不能因为坚持相对论而破坏热力学：不管他是有心的还是无意的．

（H）分析力学，热力学和相对论（包括狭义的和广义的）是物理学其他学科赖以成立的理论基础，是物理学其他学科所必须共同遵守的“约束条件”，是物理中的物理，是物理中的哲学．本文所探讨的课题，正是此“铁三角”基础理论的最佳结合点．

[1] Planck M 1907 *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* （*Berlin：Sitzungsberichte*） p542. 1908 Reprinted in：*Annalen der Physik*，**26**：1

[2] Einstein A 1907 *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*，**4** 411. Issued 22 January 1908. 原文又载 1989，The Collected papers of Albert Einstein. Vol. 2（eds by John Stachel *et al*.）Princeton University Press，433. ［中译文：Einstein A 2002 爱因斯坦全集（第二卷），范岱年主译，湖南科学技术出版社，第 370 页］

[3] de Broglie L 1995 *Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativists*.（eds by G. Lochak，M. Karatchentzeff et D. Fargue）（Berlin Heidelberg：Springer）

[4] Eddington A S 1952 *The Mathematical Theory of Relativity* （Cambridge：Cambridge University Press）p34

[5] Ott H 1963 *Zeitschrift für Physik* **175** 70

[6] Møller C 1967 *Mat.-Fys. Medd.，Kgl. Danske Videnskab. Selskab*，**36**（1）

[7] Landsberg P T 1966 *Proc. Phys. Soc.* **89** 1007

[8] Landsberg P T 1966 *Nature* **212** 571

[9] Landsberg P T 1967 *Nature* **214** 903

[10] Landsberg P T and Johns K A 1968 *Proc. Roy. Soc.* A **306** 477

[11] Landsberg P T 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45**（3） 149

[12] Tan H S *et al* 1982 *Science in China* A（3） 244（in Chinese）［谈镐生等 1982 中国科学 A（3） 244］

[13] Ye R G 1982 *Journal of Xiamen University* (Natural Science) **21** 319 (in Chinese) [叶壬癸 1982 厦门大学学报(自然科学版) **21** 319]

[14] Ye R G 1984 *Journal of Xiamen University* (Natural Science) **23** 420 (in Chinese) [叶壬癸 1984 厦门大学学报(自然科学版) **23** 420]

[15] Ye R G 1996 *European Journal of Physics* **17** 265

[16] Li F L 1989 *Progress in Physics* (3) 362 (in Chinese) [李复龄 1989 物理学进展 (3) 362]

[17] Gao T S 1994 *Journal of Xi'an Inst. of Metall. & Cons. Eng.* **26** 217 (in Chinese) [高天寿 1994 西安冶金建筑学院学报 **26** 217]

[18] Lu Q K 1997 *Journal of Fudan University* (Natural Science) **36** (3) 241, 275 (in Chinese) [陆全康 1997 复旦大学学报(自然科学版) **36**(3) 241, 275]

[19] Zhang Y S 2001 *Physics and Engineering* **11** 16-19, 41 (in Chinese) [张有生 2001 物理与工程 **11** 16-19, 41]

[20] Shen H C 2002 *Acta Mechanica Sinica* **234** (Supplement) 234 (in Chinese) [沈惠川 2002 力学学报 **34**(增刊) 234]

[21] Shen H C 2003 *Journal of Beijing Institute of Technology* **23** 671 (in Chinese) [沈惠川 2003 北京理工大学学报 **23** 671]

[22] Shen H C 2003 *Chinese Quarterly of Mechanics* **24** 462 (in Chinese) [沈惠川 2003 力学季刊 **24** 462]

[23] Mei F X 1991 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Press of Beijing Institute of Technology) 1991 (in Chinese) [梅凤翔 1991 Birkhoff 系统动力学(北京: 北京理工大学出版社)]

[24] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[25] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[26] Shen H C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 201 (in Chinese) [沈惠川 2000 物理学报 **49** 201]

[27] Shen H C and Wei S Q 2002 *The Progress of Research for Mathematics Mechanics Physics and High-New Technology* **9** 298 (in Chinese) [沈惠川、韦世强 2002 数学力学物理学高新技术研究进展 **9** 298]

[28] Bazarov E P 1983 *Thermodynamics* (Moscow: High-Education Press) (in Russian)

Application of analytical thermodynamics: relativistic transformation of temperature in equilibrium thermodynamics

Shen Hui-Chuan†

(*Center for Statistical Mechanics*, *Department of Astronomy and Applied Physics*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230026, *China*)

(Received 17 May 2004; revised manuscript received 27 October 2004)

Abstract

Relativistic transformation of temperature in equilibrium thermodynamics can again be studied with a new view point and method of analytical thermodynamics, and the same result of $T=\sqrt{1-\beta^2}\,T_0$ obtained by Planck, Einstein or de Broglie can again be obtained. In analytical thermodynamics, its characteristic or advantage is that the disputed relativistic transformation $\delta Q=\sqrt{1-\beta^2}\,\delta Q_0$ and the obvious relativistic transformation $p=p_0$ are not needed, they are by-products in the derivation.

Keywords: analytical thermodynamics, relativistic thermodynamics, equilibrium thermodynamics, basic Poisson's bracket in thermodynamics

PACC: 0320, 0412, 0570

†E-mail: shenhuichuan@tsinghua.org.cn and shenhuichuan@ustc.edu