第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2489-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.6, June, 2005

广义 Hojman 定理*

张宏彬[1)2)] 陈立群[1)] 刘荣万[1)3)] 顾书龙[2)]

[1)](上海大学上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

[2)](安徽省巢湖学院物理系,巢湖 238000)

[3)](广东省韶关大学物理系,韶关 512005)

(2004 年 7 月 1 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

研究利用 Lie 对称的生成元 $\tau(t,q,\dot{q})$ 和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$ 来构造广义 Hojman 守恒量,并讨论三种特殊情况,研究表明:Hojman 守恒量是该广义守恒量的特例,且在 Lie 对称的生成元的形式为 $\tau(t,q)$ 和 $\xi_s(t,q)$ 时,该广义 Hojman 守恒量可以导出 Lutzky 守恒量,此外,还给出一个排除平凡守恒量的条件.最后,给出两个简单例子,作为所获得结果的说明.

关键词:动力学系统,广义 Hojman 定理,Lie 对称,守恒量

PACC:0320,0420M

1. 引 言

较长一段时间以来,动力学系统的对称性问题一直是现代数学、物理和力学中的重要课题,吸引着许多研究者的关注.动力学系统若存在某种对称性则意味着系统具有与该对称性相关的某种性质,此外,由于动力学系统的对称性与不变量(第一积分)紧密相关,所以对称性理论也是积分运动方程的一个有力工具.寻找动力学系统的不变量的现代方法主要是:利用 Noether 对称性、Lie 对称性和梅的形式不变性.Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小连续变换群作用下具有不变性[1],Noether 定理指出每一个 Noether 对称性都给出一个不变量.梅的形式不变性是指系统运动的微分方程中的动力学函数,比如 Lagrange 函数、非势广义力、广义约束反力和约束方程等在无限小连续变换群作用下具有不变性[2—6],利用梅的形式不变性可以直接构造一个新形式的守恒量[7].Lie 对称性则是指系统运动的微分方程在无限小连续变换群作用下具有不变性或将其方程的一个解映射为另一个解,1979 年,Lutzky 应用 Lie 理论研究力学系统的对称性问题,且得到了系统的守恒量,然而 Lutzky 所获得的守恒量仅是 Noether 型的[8].

1992 年,Hojman[9] 提出一个新形式的守恒量,其守恒量的构造既不用 Lagrangian 也不用 Hamiltonian,而仅仅基于 Lie 对称的生成元.后来,这个直接利用系统的 Lie 对称的生成元构造守恒量的方法被 González-Gascón[10] 利用几何理论进行了推广,Lutzky[11] 应用这个直接方法研究了 Lagrange 系统的 Hojman 不变量.虽然 Pillay 和 Leach[12] 曾证明:如果这个生成元不仅是 Lie 对称的,而且又是 Noether 对称的,则这个 Hojman 不变量是平庸的.但是利用这个直接方法寻找动力学系统的非 Noether 守恒量仍是一件有意义的课题.自从文献[13]讨论了 Hojman 守恒量后,我国学者对这一课题的研究取得了很大的进展,张毅[14] 将这个直接方法推广至 Birkhoff 系统,梅凤翔在文献[15]和[16]中,分别研究了相空间运动微分方程的非 Noether 守恒量和广义 Hamilton 系统的非 Noether 守恒量.罗绍凯[17] 讨论了非完整系统的非 Noether 守恒量.傅景礼和陈立群[18] 给出了约束系统的含速度对称性和守恒量.

鉴于 Hojman 定理以及后来的各种推广,都是利用特殊的 Lie 变换群(即仅广义坐标变分 $\Delta q_s \neq 0$,而时间变分 $\Delta t = 0$).研究由时间和广义坐标都变化的一般意义 Lie 变换群来构造 Hojman 守恒量显然更有

* 国家自然科学基金项目(批准号:10172056)及安徽省教育厅科研基金项目(批准号:2004kj294)资助的课题.

意义.本文将就这一命题作如下讨论,首先利用 Lie 对称的生成元 $\tau(t,q,\dot{q})$ 和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$ 来构造广义 Hojman 守恒量,接着研究了它的几个特例,而原先的 Hojman 守恒量则是该广义守恒量的推论之一,此外,如果系统的 Lie 对称的生成元为 $\tau(t,q)$ 和 $\xi_s(t,q)$,则该广义的 Hojman 守恒量可以给出 Lutzky[19] 守恒量,需要指出的是该广义 Hojman 守恒量有时给出的不变量是平凡的,与 Pillay 和 Leach 类似,我们也给出了一个排除平凡不变量的条件.最后,我们给出两个简单例子,作为本文所获得结果的说明.

2. 力学系统的 Lie 对称性

设一力学系统的运动方程为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,q,\dot{q}) \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $\alpha_s(t,q,\dot{q})$ 是力函数.

引入无限小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\tau(t,q,\dot{q}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,q,\dot{q}) \end{cases} (s = 1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

其中 ε 为一无限小参数,$\tau(t,q,\dot{q})$ 和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$ 为无限小生成元.

引入无限小变换的生成元向量

$$\tilde{X}^{(0)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

它的一阶扩展

$$\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X}^{(0)} + \left(\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} - \dot{q}_s\frac{\bar{d}\tau}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

二阶扩展

$$\tilde{X}^{(2)} = \tilde{X}^{(1)} + \left(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} - 2\alpha_s\frac{\bar{d}\tau}{dt} - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}\tau}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

根据微分方程的 Lie 理论,方程(1)在无限小变换(2)的不变性导致如下的确定方程

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right) - 2\alpha_s\frac{\bar{d}}{dt}\tau - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\tau\right) = \tilde{X}^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

因此,我们有下面的命题:

命题 1 如果无限小生成元 $\tau(t,q,\dot{q})$ 和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$ 满足确定方程(7),则无限小变换(2)是微分方程(1)的 Lie 对称变换.

3. 力学系统的广义 Hojman 守恒量

利用无限小变换(2),我们可以构建下面的广义 Hojman 守恒量.

命题 2 如果无限小生成元 $\tau(t,q,\dot{q})$ 和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$ 满足确定方程(7),且存在函数 $\lambda = \lambda(t,q,\dot{q})$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt}\ln\lambda = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

则系统(1)拥有下面的守恒量

$$I = \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} + \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}\xi_s}{dt} - \dot{q}_s\frac{\bar{d}\tau}{dt}\right) + \tilde{X}^{(1)}\{\ln\lambda\} - \frac{\bar{d}}{dt}\tau \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

证明 由方程(9),我们有

$$\frac{\bar{d}I}{dt} = \frac{\bar{d}}{dt}\left\{\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} + \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\tau\right)\right\} + \frac{\bar{d}}{dt}\tilde{X}^{(1)}\{\ln\lambda\} - \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

对任意函数 $A(t,q,\dot{q})$ 容易验证[9]

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{d}A}{dt} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_k} \quad (k = 1,2,\cdots,n), \tag{11}$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left\{\frac{\partial A}{\partial q_s}\right\} = \frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\bar{d}A}{dt} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_s}\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_k} \quad (s,k = 1,2,\cdots,n), \tag{12}$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left\{\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_s}\right\} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{d}A}{dt} - \frac{\partial A}{\partial q_s} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_k} \quad (s,k = 1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

$$\tilde{X}^{(1)}\left\{\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_s}\right\} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}\{A\} - \frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial A}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}\xi_k}{dt} - \dot{q}_k\frac{\bar{d}\tau}{dt}\right)\frac{\partial A}{\partial\dot{q}_k} \quad (s,k = 1,2,\cdots,n). \tag{14}$$

如果 $\tilde{X}^{(1)}$ 是系统(1)的一个对称向量,对任意函数 $A(t,q,\dot{q})$,我们可以得到下面的关系

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tilde{X}^{(1)}\{A\} = \tilde{X}^{(1)}\left\{\frac{\bar{\mathrm{d}}A}{\mathrm{d}t}\right\} + \frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}A}{\mathrm{d}t}. \tag{15}$$

利用方程(11),(12)和(13),我们可以证明

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\right\}\\&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}+\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}\right.\\&\quad\left.-2\alpha_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{\partial\alpha_k}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}\\&\quad-\frac{\partial\alpha_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\\&\quad(s,k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{16}$$

此外,由方程(7),(14)和(16)我们有

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{(1)}\left\{\frac{\partial\alpha_k}{\partial\dot{q}_k}\right\}&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\right\}\\&\quad-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\\&\quad(s,k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{17}$$

将方程(9),(15)和(17)代入方程(10)的右边,即可得到

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}I}{\mathrm{d}t}=0.$$

需要指出的是:(9)式有时给出的守恒量是平凡的.我们在文献[19]中给出了一个排除平凡守恒量的条件,即如果我们利用的生成元又是 Noether 对称的,且函数 $\lambda=\lambda(t,q,\dot{q})=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}$,则(9)式给出的守恒量是平凡的.

于是我们有下面的命题

命题 3　如果系统(1)的 Lagrangian 为 $L(t,q,\dot{q})$,$\lambda(t,q,\dot{q})=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}$,且 $\tau(t,q,\dot{q})$和 $\xi_s(t,q,\dot{q})$是系统的 Noether 对称生成元,则(9)式给出的守恒量是平凡的.

由命题 2,我们很容易给出下面三个推论

推论 1　如果无限小生成元 $\tau(t,q,\dot{q})=0$,$\xi_s(t,q,\dot{q})$满足确定方程(18)

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)-\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k-\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k=0$$
$$(s,k=1,2,\cdots,n),\tag{18}$$

且函数 $\lambda=\lambda(t,q,\dot{q})$满足方程(8),则系统(1)拥有下面形式的守恒量

$$I=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(\lambda\xi_s)}{\partial q_s}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\lambda\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)$$
$$(s=1,2,\cdots,n).\tag{19}$$

很明显,在 $\lambda=\lambda(q)$,推论 1 就是 Hojman 定量[9].

推论 2　如果无限小生成元 $\xi_s(t,q,\dot{q})=0$,$\tau(t,q,\dot{q})$满足确定方程(20)

$$2\alpha_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}+\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}+\tau\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}-\dot{q}_k\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}$$
$$=0\quad(s,k=1,2,\cdots,n),\tag{20}$$

且函数 $\lambda=\lambda(t,q,\dot{q})$满足方程(8),则系统(1)拥有下面形式的守恒量

$$I=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(\lambda\tau)}{\partial t}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\lambda\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)-\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}$$
$$(s=1,2,\cdots,n),\tag{21}$$

这是一个以前文献中没有出现过的,新形式守恒量.

推论 3　如果系统(1)的 Lagrangian 为 $L(t,q,\dot{q})$,让方程(1)不变的单参数 Lie 变换群是由向量

$$\tilde{X}^{(0)}=\tau(t,q)\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s(t,q)\frac{\partial}{\partial q_s}$$
$$(s=1,2,\cdots,n)\tag{22}$$

生成,则系统(1)拥有下面形式的守恒量

$$I=2\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}-\dot{q}_s\frac{\partial\tau}{\partial q_s}\right)-n\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau$$
$$+X^{(1)}\{\ln D\}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{23}$$

其中 $\lambda=D=\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k)$,$\tilde{X}^{(1)}$是 $\tilde{X}^{(0)}$的一阶扩展.

利用关系

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s},\tag{24a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\tau}{\partial q_s}.\tag{24b}$$

我们可以从(9)式推出(23)式.而推论 3 正是 Lutzky 守恒定律[20].可见 Lutzky 守恒定律正是广义 Hojman 定理在点对称下的自然结果.

4. 举　例

为了说明前节理论的应用,我们研究下面两个例子:

例 1　单自由度线性阻尼振子,其 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}^2,\tag{25}$$

其中 γ 为常数,则系统的运动微分方程如下

$$\ddot{q} = -\gamma\dot{q}. \tag{26}$$

若令

$$\xi = \xi(t, q), \tag{27a}$$

$$\tau = \tau(t, q). \tag{27b}$$

则方程(26)在无限小变换(27)下的不变性导致下面的确定方程

$$\begin{aligned}\xi_{tt} + \gamma\xi_t + (2\xi_{tq} + \gamma\tau_t - \tau_{tt})\dot{q} \\ + (\xi_{qq} - 2\tau_{tq} + 2\gamma\tau_q)\dot{q}^2 - \tau_{qq}\dot{q}^3 = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

因此,我们有

$$\xi_{tt} + \gamma\xi_t = 0, \tag{29a}$$

$$2\xi_{tq} + \gamma\tau_t - \tau_{tt} = 0, \tag{29b}$$

$$\xi_{qq} - 2\tau_{tq} + 2\gamma\tau_q = 0, \tag{29c}$$

$$\tau_{qq} = 0. \tag{29d}$$

方程(29)有下面的解

$$\begin{aligned}\tau = [c_3 + c_4\exp(\gamma t)]q + c_5 + c_6\exp(\gamma t) \\ - \frac{c_2}{\gamma^3}\exp(-\gamma t),\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\xi = \frac{c_1 + c_2 q}{\gamma^2}\exp(-\gamma t) + c_8 + c_7 q - c_3\gamma q^2. \tag{30b}$$

由方程(8),我们可得到

$$-\gamma + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\lambda = 0. \tag{31}$$

方程(38)存在解

$$\lambda = \dot{q}^{-1}. \tag{32}$$

将(30)和(32)式代入(9)式,可得下面的守恒量

$$\begin{aligned}I = c_7 + c_1\frac{\exp(-\gamma t)}{\gamma\dot{q}} + c_2\frac{\dot{q} + \gamma q}{\gamma^2\dot{q}}\exp(-\gamma t) \\ - 2c_3(\dot{q} + \gamma q) - 2c_4\dot{q}\exp(\gamma t).\end{aligned} \tag{33}$$

例 2 下面我们来研究单自由度线性谐振子,其 Lagrangian 为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2), \tag{34}$$

则系统的运动微分方程如下

$$\ddot{q} = -q. \tag{35}$$

若引入无限小变换(27),则方程(35)在其变换下的不变性导致下面的确定方程

$$\begin{aligned}\xi + \xi_{tt} - q\xi_q + 2q\tau_t + (2\xi_{tq} + 3q\tau_q - \tau_{tt})\dot{q} \\ + (\xi_{qq} - 2\tau_{tq})\dot{q}^2 - \tau_{qq}\dot{q}^3 = 0.\end{aligned} \tag{36}$$

因此,我们有

$$\xi + \xi_{tt} - q\xi_q + 2q\tau_t = 0, \tag{37a}$$

$$2\xi_{tq} + 3q\tau_q - \tau_{tt} = 0, \tag{37b}$$

$$\xi_{qq} - 2\tau_{tq} = 0, \tag{37c}$$

$$\tau_{qq} = 0. \tag{37d}$$

方程(37)有下面的解

$$\begin{aligned}\tau = (c_1\cos t + c_2\sin t)q \\ + (c_7\sin 2t + c_8\cos 2t) + c_3,\end{aligned} \tag{38a}$$

$$\begin{aligned}\xi = (-c_1\sin t + c_2\cos t)q^2 \\ + (c_7\cos 2t - c_8\sin 2t)q + c_4 q \\ + (c_5\cos t + c_6\sin t).\end{aligned} \tag{38b}$$

由方程(8),我们可得到

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\lambda = 0. \tag{39}$$

方程(39)存在解

$$\lambda = (q^2 + \dot{q}^2). \tag{40}$$

将(38)和(40)式代入(9)式,可得下面的守恒量

$$\begin{aligned}I = c_1(-5q\sin t - 5\dot{q}\cos t) \\ + c_2(5q\cos t - 5\dot{q}\sin t) + 4c_4 \\ + c_5\frac{2q\cos t - 2\dot{q}\sin t}{q^2 + \dot{q}^2} \\ + c_6\frac{2q\sin t + 2\dot{q}\cos t}{q^2 + \dot{q}^2} \\ + c_7\frac{(q^2 - \dot{q}^2)2\cos 2t - 4q\dot{q}\sin 2t}{q^2 + \dot{q}^2} \\ + c_8\frac{(\dot{q}^2 - q^2)2\sin 2t - 4q\dot{q}\cos 2t}{q^2 + \dot{q}^2}.\end{aligned} \tag{41}$$

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Ges. Wiss.* 235

[2] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[3] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[4] Mei F X and Chen X W 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 138

[5] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[6] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[7] Mei F X 2004 *J. Dyna. Contr* **2** 28 (in Chinese) [梅凤翔 2004 动力学与控制学报 **2** 28]

[8] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[9] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[10] Gonález-Gascón F 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** L59

[11] Lutzky M 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** L637

[12] Pillay T and Leach P G L 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 6999

[13] Zhang R C 2001 *Ph. D Thesis of Beijing Institute of Technology* (in Chinese) [张睿超 2001 博士学位论文 北京理工大学]

[14] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[15] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 1544

[16] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[17] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 666]

[18] Fu J L 2004 *Chin. Phys.* **13** 287

[19] Zhang H B and Chen L Q 2005 *J. Phys. Soc. Jap.* **74** 905

[20] Lutzky M 1979 *Phys. Lett.* **75** A 8

The generalized Hojman's theorem*

Zhang Hong-Bin[1)2)] Chen Li-Qun[1)] Liu Rong-Wan[1)3)] Gu Shu-Long[2)]

[1)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Chaohu College, Chaohu* 238000, *China*)

[3)] (*Department of Physics, Shaoguan University, Shaoguan* 512005, *China*)

(Received 1 July 2004; revised manuscript received 27 October 2004)

Abstract

A new conservation theorem is studied, the conserved quantity is only constructed in terms of the infinitesimal generators $\tau(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ and $\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ of Lie symmetry of the dynamical equations. Three special cases are discussed, where the Hojman conserved quantity can be deduced as a corollary of this general conservation theorem at $\tau(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0$, and the Lutzky conserved quantity can be derived by using this general conservation theorem at $\tau=\tau(t,\boldsymbol{q})$ and $\xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q})$. Moreover, a condition is presented to exclude trivial conserved quantities. Finally, two examples to illustrate the application of the results are given.

Keywords: dynamical system, generalization Hojman's theorem, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320, 0420M

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10172056) and the Science Research Foundation of Education Hall of Anhui Province (Grant No. 2004kj294)